擺線－滾動圓面上定點的軌跡研究

高中組數學科第三名

台北市立建國高級中學

作　　者：章立維、林重維

指導教師：傅銘東

一、研究動機

以前曾經玩過一種可繪製曲線圖形的玩具，它包含幾個在邊緣滿是鋸齒的小圓形板，以及一個圓周內刻滿鋸齒的大圓形板，用法是將小圓板沿大圓板繞著轉，便可以畫出各式各樣的曲線。當時只覺得那些圖形變化多端，然而在和同學一起研究後，却發現了很大的學問，這些都是在深入討論前意想不到的。

二、研究目的

發現各種擺線圖形形成的條件，並設法找出其中的關係和性質。

三、研究工具

紙、筆、尺，上述的玩具和電腦

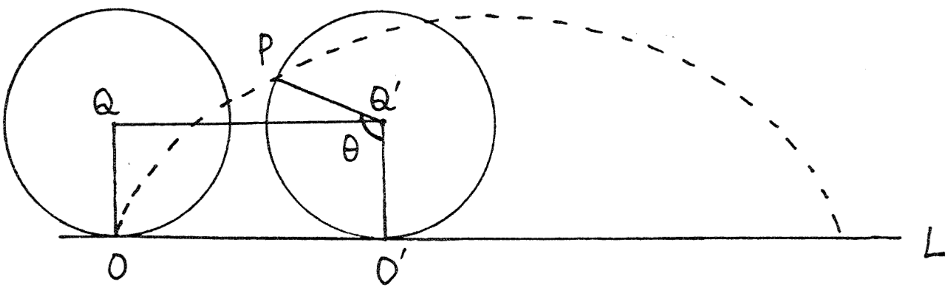
四、研究過程

(一)參數方程式

1.在直線上滾動：

當一個圓沿一條直線滾動，但不滑動時，其動圓周上一定點的軌跡即稱爲擺線，在此我們以 θ 爲參數來求它的方程式：

如圖，設動圓半徑 $\overline{OQ} = r$，且滾過的弧度爲 θ，則有



$$\begin{cases}\overline{O'Q'} = r \\ \overline{OO'} = r\theta\end{cases}$$

由 P 位置得

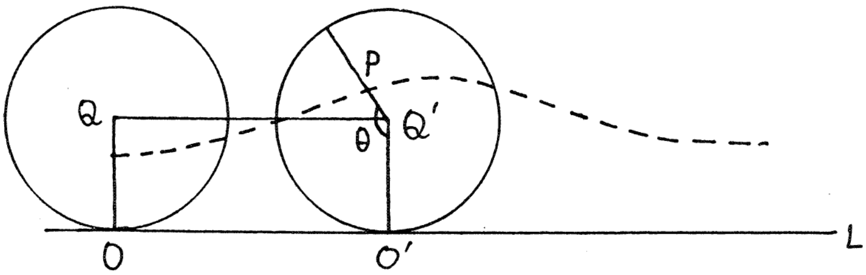
$$\begin{cases}x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta)\end{cases}$$

接下來，討論定點在圓面上的情形，相對於擺線，此圖形稱餘擺線。

如下圖，設半徑為 $\overline{PQ}$ 的 a 倍即 $\overline{PQ} = r/a$，則 P (x,y) 為

$$x = r\left(\theta - \frac{1}{a}\sin\theta\right)$$

$$y = r\left(1 - \frac{1}{a}\cos\theta\right)$$



2.在圓外側滾動（如圖一）

相對於擺線，此圖形為外擺線。設動圓半徑為 r，定圓半徑為 br 則 P (x,y) 為

$$x = r[(b+1)\cos\theta - \cos(b+1)\theta]$$

$$y = r[(b+1)\sin\theta - \sin(b+1)\theta]$$

同理，可導出外餘擺線之方程式為

$$x = r\left[(b+1)\cos\theta - \frac{1}{a}\cos(b+1)\theta\right]$$

$$y = r\left[(b+1)\sin\theta - \frac{1}{a}\sin(b+1)\theta\right]$$

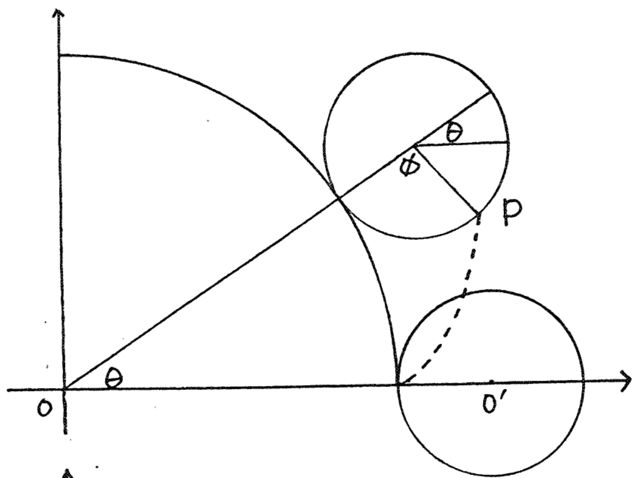
3.在圓內側滾動

依上法可求得內擺線之方程式為

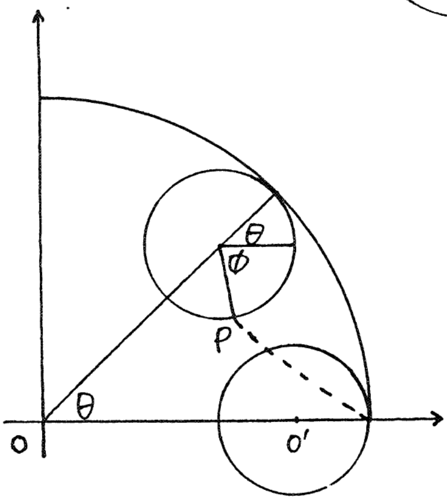
$$x = r[(b-1)\cos\theta + \cos(b-1)\theta]$$

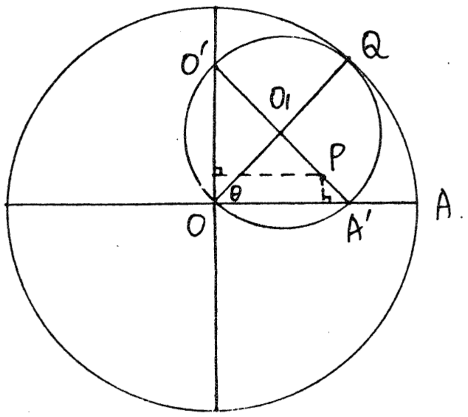
$$y = r[(b-1)\sin\theta - \sin(b-1)\theta]$$

接著討論定點在圓面上的情形，當定圓為動圓兩倍時，如圖二：



圖一





圖二

$\angle QO_1A' = 2\angle QOA'$

又$\overset{\frown}{A'Q} = r\angle QOA'$，$\overset{\frown}{AQ} = 2r\angle QOA'$

$\therefore \overset{\frown}{A'Q} = \overset{\frown}{AQ}$，同理$\overset{\frown}{BQ} = \overset{\frown}{O'Q}$

這正代表在滾動的過程中A′和Q′一直在圓O的直徑上移動則P（x,y)爲

$$x = \cos\theta\ a$$

$$y = \sin\theta\ b$$

此即爲橢圓的方程式。然而當定圓並非爲動圓，我們則無法用上述的方法說明圖形，因此再以θ爲參數，求得內餘擺線的方程式爲

$$\begin{cases} x = r\left[(b-1)\cos\theta + \frac{1}{a}\cos(b-1)\theta\right] \\ y = r\left[(b-1)\sin\theta - \frac{1}{a}\sin(b-1)\theta\right] \end{cases}$$

4.在任意曲線上滾動

以上討論3圓在直線和圓內外滾動的方程式，現在討論沿任意曲線滾動的情形，如圖，設圓半徑 r

且 $A(\alpha, f(\alpha))$

$B(t, f(t))$

$C(\beta, \gamma)$

以B爲原點建立一個直角座標系S，若C對S爲(x,y)，則有

$\beta = X + t$

$\gamma = Y + f(t)$

再建立一個以B爲原點且以 $f(x)$ 在B點的切線爲x軸之直角座標系 S'，於是我們可將圓視爲 S' 上以(o,a)爲中心順時鐘旋轉

如圖：設AB曲線長爲$\triangle \ell$，則有

$$\frac{2\pi a}{\triangle \ell} = \frac{2\pi}{\theta} \qquad \therefore \theta = \frac{\triangle \ell}{\gamma}$$（其中$\triangle \ell$可由線積分求得）

於是我們可用三角函數求C對 S' 的座標。而 S' 的x軸斜率爲 $f'(t)$，若 S' 和S的夾角爲 ϕ，則有 $\phi = \tan^{-1} f'(t)$

至此可求出C對S的座標，則$C(\beta, \gamma)$可求。

以上所注重的是方法，並不要求精密計算，以後有實際需要時，可交由電腦代勞。

(二)圖形分析

1.圖形的退化性質

根據所導出的方程式來看，可得知，三種餘擺線和擺線相比，只在後半部的三角函數多了$1/a$倍，因 $1/a < 1$，因此當a越大，三角函數值就越小，也使圖形起伏減小，當 $\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a} = 0$時，所得的餘擺線即退化爲直線或圓。

2.內外擺線的相容性

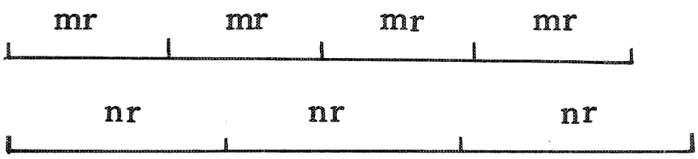
在計算方程式過程中，可知b是正數，然而，若b代負數，圖形爲何呢？以外擺線爲例，若b＋1仍爲負，則前方三角函數爲負，後方則cos不變，sin變號，提出負號後，方程式即變爲內擺線，同理，用同樣的方

法變化內擺線，則可得外擺線的方程式，因此，可知內外擺線互爲 b 爲負數的特例。

3.內外擺線的瓣數公式

若定義動圓繞一圈所成的圖形爲一瓣，則瓣數和兩圓半徑的比值有一定的關係。

設動圓周長mr ，定圓圓周長nr 。m•n 爲整數，且m•n 互質，根據瓣數的定義，我們只要討論動圓要繞幾圈後，圖形才會回到原來的起點即可，如果把兩圓的圓周攤平，那就清楚多了，如圖：



我們可以一直繼續下去，直到兩線段分別乘上一個整數倍而相等，即mra = nrb 因爲m•n 互質

∴〔 m,n 〕= mn ⇒取最小的（ a , b ）爲（ n,m ）

這就是說，圖形要再回到原點 P ，周長爲mr 的動圓至少要繞 n 圈，即 n 瓣。結論是當定圓和動圓半徑比爲 n/m，且m•n 互質時，圖形有 n 瓣，和 m無關，若 n/m 爲無理數，則將繞行無限多圈，所成的圖形爲超越曲線，反之，則爲代數曲線。

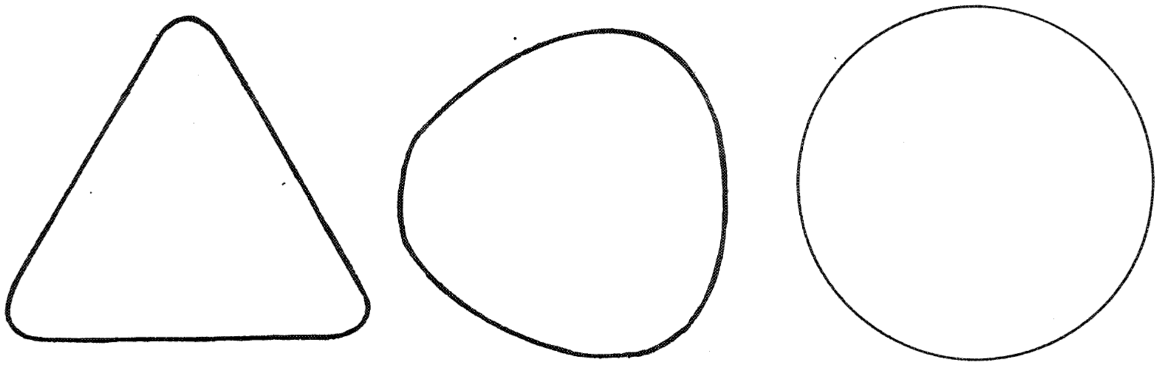
4.內餘擺線的特殊圖形

(1)玫瑰線

根據瓣數公式，得知當 $b=\frac{n}{m}$時，圖形有 n 瓣，然而同樣是 n 瓣，中央所圍出的面積却不相同，現在討論此 n 瓣的圖形何時交於中央一點。在每瓣圖形均相同的前提下，我們知道，此中央的交點即爲定圓圓心，同時，此交點至定圓圓周的距離即爲 $r+\frac{r}{a}$，又定圓半徑爲 br ，因此可知圖形交於中央一點的充要條件爲 $b=1+\frac{1}{a}$，此圖形即稱玫瑰線。

(2)橢圓的拓展

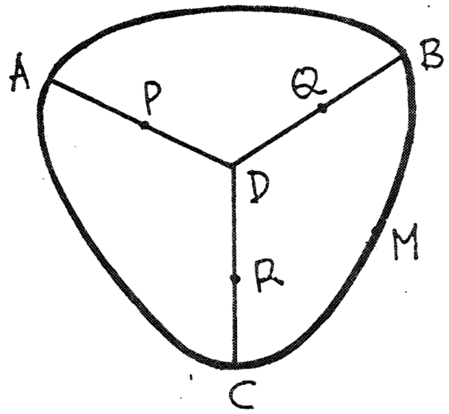
在內餘擺線的方程式中，當 b = 2 時，所得的圖形爲橢圓，而當 b 爲大於 2 的整數時，圖形爲何呢？以 b = 3 爲例，同時考慮 a 的大小，圖形則有



由於b ＝ 2時橢圓是周上任一點至兩焦點距離和一定的圖形，因此我們推測當b ＝ 3時可能造成一種周上任一點至內部某三點距離和一定的圖形，同時，此三點必成正三角形。

爲了討論方便，我們證明此圖形存在性的方法爲給定圖形內部特定的三個點，再說明必存在一個符合條件的a值。

如圖，設A,B,C爲瓣和瓣相交的端點，D爲△ABC的重心，我們定$\overline{AD}$，$\overline{BD}$，$\overline{CD}$中點P,Q,R爲此三點。在圖中，若任取一瓣的中點M



，則我們發現在a ＝ 2 的圖形中，$\overline{AP}+\overline{AQ}+\overline{AR}>\overline{MP}+\overline{MQ}+\overline{MR}$，然而在a→ ∞ 的圖形圓中，$\overline{AP}+\overline{AQ}+\overline{AR}<\overline{MP}+\overline{MQ}+\overline{MR}$。

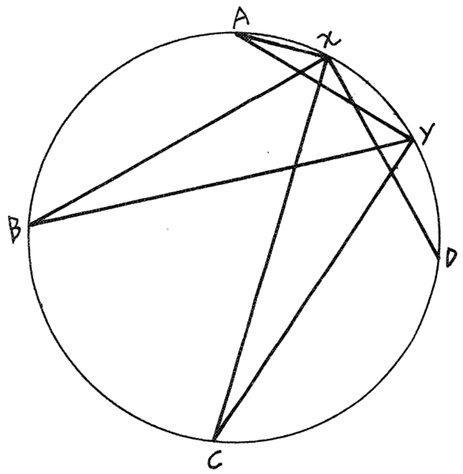
由於a從2到趨近無窮大的過程中是呈連續變動，因此，我們得知在定點向定圓圓心靠近的過程中，必可找到一個適合的a值，使瓣與瓣的交點和每瓣中點至P,Q,R三點的距離和相同，至於圖形上的其它點，經由電腦的模擬和計算，他們至P,Q,R三點的距離和也是相同的。

同理，當b ＝ 4，5，6… 時，亦可找到一個符合條件的a值。另外，若改選取P，Q，R三點為每瓣向內對摺的三個交點和瓣和瓣的交點的中點，則根據電腦的模擬，當b越大時，數個〝焦點〞也越分散，即越靠近圖形，當b→ ∞ 時，圖形為圓，於是無限多個焦點便和圓周重合，故圓可視為周上任一點至圓周上無限多點距離和一定的圖形。

討論至此，我們得到一個聯想，若在圓周上有有限個等分點，在圓周上任取兩點，則它們到此有限個等分點的距離和是否相等？答案是肯定的，證明如下：

如圖，A，B，C，D為圓O四等分點

x，y為圓上任兩點



則$\overset{\frown}{XB}+\overset{\frown}{XD}+\overset{\frown}{XC}+\overset{\frown}{XA}=\overset{\frown}{BXC}+\overset{\frown}{AXD}$＝圓0周長

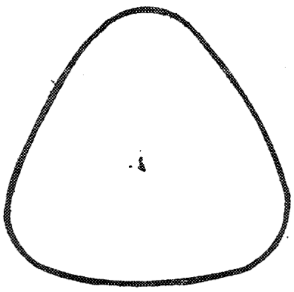
同理$\overset{\frown}{YA}+\overset{\frown}{YB}+\overset{\frown}{YC}+\overset{\frown}{YD}$＝圓O周長

又∵等弧對等弦

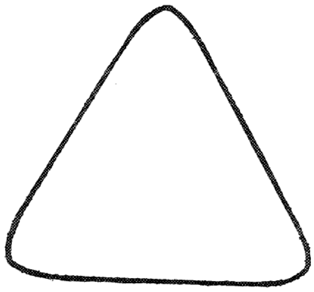
∴X和Y到這四點的距離和是相同的

以上的討論說明了當b ＝ 3而a從 1→∞的過程中，可找到一個圖形，符合周上有任一點至形內三點距離和常數，同時由於討論前為了方便所作的規定，此三點是圖形中心至三尖點線段之中點，但是，若不限定此條件，反過來說，是否每個a值所成的圖形都存在三個滿足條件的點呢？根據橢圓的作圖，我們知道，愈狹長的橢圓，其兩個焦點愈分散，因此我們猜測，當a愈大，也就是圖形愈圓滑時，三個焦點理應愈集中，因此，討論a→∞的圖形（圓），依以上的猜測，它的三個焦點應該非常非常集中，事實上正是它的圓心，因此，顯然，圓符合我們的條件。而在a→1的過程中，圖形的三瓣分別由圓滑趨於平直，再向圖形內部

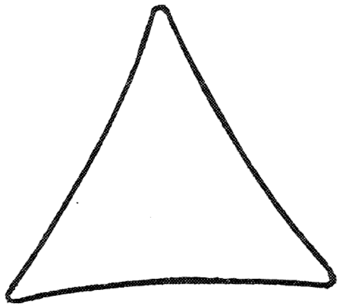
凹入，根據電腦的模擬，如下圖所示：



a = 4



a = 1.93



a = 1.3

在討論的過程中，我們另選取 3 a = 1.93 的圖形來看，我們把三個點從圖形的中心，沿著中心和三尖點的連線向外分散，發現當三點和三尖點重合時，尖點至此三點的距離仍大於瓣中點至此三點的距離，這說明了我們無法在形內找到適合的三點滿足條件，這個結果曾一度令我們沮喪，但在苦思之後靈機一動——三焦點亦可在圖形外，於是我們立刻以 a = 1 的三瓣星形線來試驗，將形中心和三尖點的連線延長，並找一個充份大的正三角形，便可使尖點至三點的距離和小於瓣中點至此三點的距離和，也就是說，在解除了對三焦點的位置限制後，只要是 b = 3 的內餘擺線圖形，即使是在形外，我們都可找到三個適合的點，使圖形上任一點至此三點的距離合爲常數。

同理當 b 爲正整數時，所成的內餘擺線即爲至此數個點距離和爲常數的圖形。

至此，對內餘擺線的討論已告一段落，唯美中不足的是，我們仍然無法找出焦點位置和方程式的關係，亦未能進一步找出橢圓的諸性質和內餘擺線的關係，這些希望能在以後的後續研究中能有所突破。

㈢擺線的切線作圖法

欲作擺線的切線，我們可由圓的切線談起，若欲作圓O上一點P的切線，只需要作一條過P點而和 $\overline{PO}$ 垂直的直線即可，這是因爲圓O即是以O點爲旋轉中心旋轉所成的軌跡，而對擺線而言，它雖無固定的旋轉中心，然而，對每一時間而言，動圓和定圓或直線的切點即爲瞬時旋轉中心。故欲作擺線上一點P的切線或法線，只須找出動圓環行至P點時，動圓和直線或定圓的切點即可，以下舉例說明：

1.取 $\overset{\frown}{AB}$ 中點M，連 $\overline{AB}$

2.過M作$\overline{MR}\perp\overline{AB}$，R在$\overline{AB}$上

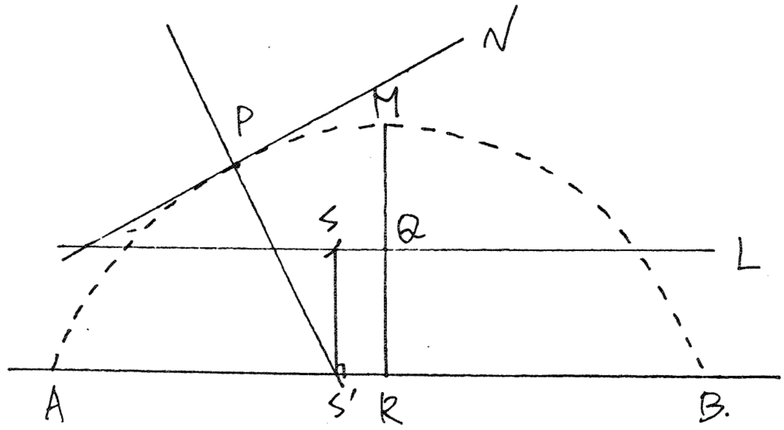
3.取$\overline{MR}$中點Q，過Q作L∥$\overline{AB}$

4.以P爲圓心，$\overline{QR}$爲半徑，畫弧交L於S（S在擺線內部）

5.過S作$\overline{SS'}\perp\overline{AB}$，S′在$\overline{AB}$上

6.連$\overline{S'P}$，過P作直線$N\perp\overline{S'P}$，則N爲所求之切線

同理，若欲求內外擺線的切線，只須先作一個同心圓，再仿上法即可。



(四)擺線的弧長和所圍的面積

在擺線的弧長和所圍面積的計算上，文獻記載的方法是利用漸屈線和Roberval曲線，此處我們用微積分來加以討論，針對一瓣的擺線，我們欲求其

弧長，只需計算$\int_0^{2\pi}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,d\theta$

$$\frac{dx}{d\theta}=x'=r\sin\theta \qquad \frac{dy}{d\theta}=y'=r(1-\cos\theta)$$

$$\therefore\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2\sin^2\theta+r^2-2r^2\cos\theta+r^2\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=2r\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=2r\int_0^{\pi}\sin t\quad 2dt\ (\text{令 } t=\frac{\theta}{2})$$

$$=8r$$

另外，欲求二瓣擺線和底線所圍的面積則需計算

$$\int_0^{2\pi} y\,x'\,d\theta$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} r(1-\cos\theta)(r-r\cos\theta)\,d\theta$$

$$=4r^2\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=8r^2\int_0^{\pi}\sin^4\phi\,d\phi\ (令\phi=\frac{\theta}{2})$$

$$=3\pi r^2$$

五、結論

略

六、參考資料

科學月刊第二十卷第 11,12 期，幼獅數學大辭典

評語

圓內餘擺線是動點距圓外數點距離和爲常數的軌跡這是作者仔細研究發現的結果，雖無確切之證明，但作者儘可能加以確認，是發現數學定理的典範。