

# Moire'圖形在數學上的應用

高中組數學科第三名

台北市立第一女子高級中學

作者：陳虹妙、尙卿  
劉欣怡、楊佳寧  
指導教師：張仁昌、翁錫伍

## 一、研究動機

物理課做水波槽實驗時，重疊的波紋引起我們極大的興趣。於是老師介紹我們看一篇（The Physics Teacher）雜誌中有關Moire' Pattern的文章。Moire' Pattern的特徵是當有寬度的條紋彼此重疊時，會出現一些新的圖形。我們對於這些富於變化，又具有規則性的圖形，感到興奮不已，就開始研究了。

## 二、研究目的

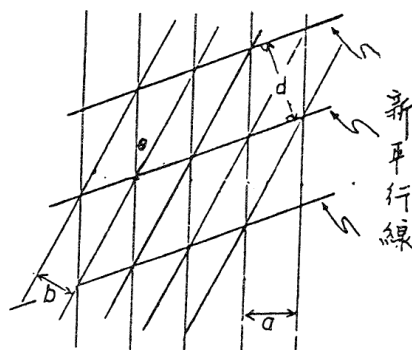
希望以數學的方式來分析Moire' Pattern，而不只是以“美學”的觀點來“欣賞”它們。

## 三、研究器材

紙、筆、投影片，並配合微電腦。

## 四、研究過程

- (一)先找出數種基本圖形，如：各種平行線組（含等間隔與不等間隔）、同心圓組、夫瑞奈環（Fresnel Zone）、輻射狀直線等。
- (二)將基本圖形加以重疊，以投影片操作，或直接在電腦上演練。
- (三)預測、觀察所呈現之圖形，並分析之。



## 五、實驗與討論（限於篇幅，文中的推導與證明過程均省略）

經過多次的嘗試，觀察的圖形不下數十種，茲選擇其中十六種，加以分析與討論如下：（所有附圖在文末）

### (一)粗線與粗線（圖1）

將兩組等間隔平行直線疊合，可見到另一新的平行線組。由於原來兩組線為

粗線，所形成的新平行線甚為明顯，但數學上難以分析。

(二) 細線與細線 (圖 2)

把(一)中的線改為細線，以便於數學分析。

上圖中的  $a$ 、 $b$  各為原平行線組的間距，這兩組的交角為  $\theta$ ，經分析可得新平行線組的間距為：

$$(\text{間距}) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - 2ab\cos\theta + b^2}}$$

(三)、(四)、(五) 直線組與等間隔同心圓：(圖 3、圖 4、圖 5)

這三組之基本圖形相似，唯一差別在於間距不同。根據二次錐線中  $d(P、F) / d(P、L) = e$  比值的關係，可得：

$$(\text{離心率}) e = \frac{(\text{同心圓組間距}) r}{(\text{直線組間距}) d}$$

圖 3 為  $0 < e = \frac{r}{d} < 1$  故為橢圓

圖 4 為  $e = \frac{r}{d} = 1$  為拋物線

圖 5 為  $e = \frac{r}{d} > 1$  為雙曲線

(六) 直線與平移的半圓 (圖 6)

經我們分析，可證明出此兩組圖形重疊，可出現橢圓。

如果平行直線的間距恰與平移半圓組的間距相等時，則成直線。

(七) 兩組等間距的同心圓 (圖 7-1、7-2、7-3)

此情形可形成雙曲線，這與物理課中水波槽實驗所看到的干涉條紋相同。再由定義，可知也能形成橢圓。

又根據阿波羅圓之定義，由兩組同心圓重疊，亦能得圓。

(八) 夫瑞奈環波紋 (圖 8)

1. 兩組同大的夫瑞奈環重疊時，經分析可證明形成的條紋為等間隔的平行線組。(圖 8-1)

2. 兩組不同大小的夫瑞奈環重疊時，經分析可證明會形成另一組夫瑞奈環。(圖 8-2)

(九) 平行線與平移的拋物線 (圖 9-1、9-2、9-3)

直線與平移的拋物線組重合後，我們證明出：

設直線間距為  $d$ ，拋物線組的間距為  $r$ ，則

(  $r / d$  )  $< 1$  時，得新的拋物線組，開口方向與原來方向相同。

(  $r / d$  ) = 1 時，形成直線。

(  $r / d$  )  $> 1$  時，得新的拋物線組，開口方向與原來方向相反。

(+) 夫瑞奈環與平方根序列直線組 (圖10—1、10—2、10—3)

一平行直線組， $d(L_1, L_2) = \sqrt{1} a$ ， $d(L_1, L_3) = \sqrt{2} a$ ，  
 $d(L_1, L_4) = \sqrt{3} a$ ，……，我們特稱此為平方根序列直線組。

設夫瑞奈環第一個圓的半徑為  $r$ ，則我們分析並證明出：

1. 當  $a > r$  時，所成的圖形為橢圓。(圖10—1)

2. 當  $a < r$  時，所成的圖形為雙曲線。(圖10—2)

3. 當  $a = r$  時，所成的圖形為拋物線。(圖10—3)

(+) 夫瑞奈環與反向平方根序列直線組 (圖11)

我們也證明出所形成的圖形為一橢圓。

(+) 兩組平方根序列直線組夾一角度 (圖12)

經我們證明出此圖形成為雙曲線。

(+) 兩組輻射狀直線，中心點隔開一段距離 (圖13)

在觀察圖形時，我們覺得所成圖形與物理中，等電量的兩異性電荷所成的電力線非常相似。經我們分析導出方程式後，發現正與此電力線的方程式相同，都是圓方程式。

(+) 平方根序列直線與等間距平行直線組 (圖14)

可證明出可得拋物線。

(+) 反向平方根序列直線與等間隔同心圓 (圖15)

我們分析出所成的圖為對稱於 X 軸的四次方曲線。

(+) 夫瑞奈環與等間隔同心圓 (圖16—1, 16—2)

我們也證明出所成的圖形為對稱於 X 軸的四次方曲線。

(+) 等間隔平行直線與夫瑞奈環重合，可能形成新的夫瑞奈環，但是我們並沒有證明出來，見圖17—1、17—2。

## 六、結論

(一) 將兩組平行線重合，可得另一組新的平行線。

(二) 直線和圓系(同心圓或平移的圓)重合，因間距的不同，可得到二次曲線。

(三) 兩同大的夫瑞奈環可形成一組平行直線。

(四) 平方根序列直線組與夫瑞奈環重合，由於比例的不同，可形成各種二次曲線。

- (五)反向平方根序列直線組與夫瑞奈環重合，可得橢圓。
- (六)兩組平方根序列直線，以某一角度相交，可形成雙曲線。
- (七)兩組輻射直線重合，可得與物理上電力線相同的圖形。

## 七、參考資料

1. Bernero B.

The Moire'Effect in Physics Teaching

( The Physics Tescher ) Oct. 1989, P.602 - P.608

2. Gerald Oster and Yasunori Nishjima

Moire'Pattern

( Scientific American ) 208, P.54-P.63

3.高中數學課本第三冊。

4.溫讓珊等三人

直線疊紋的聯想

中華民國第二十一屆科展

5.李志宏，黃書健

同心圓，平行線重疊形成曲線的研究

中華民國第二十八屆科展

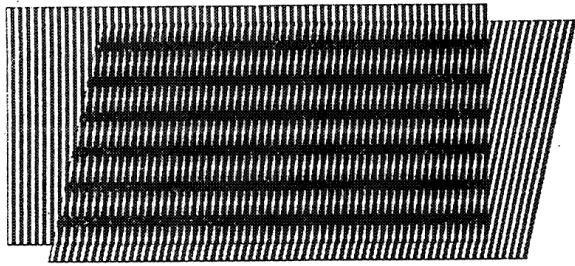


圖 1

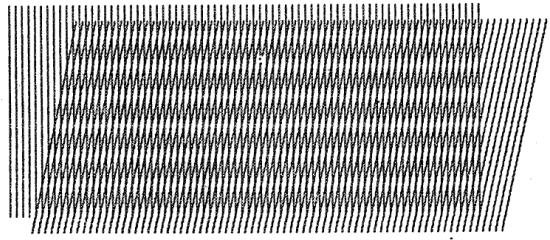


圖 2

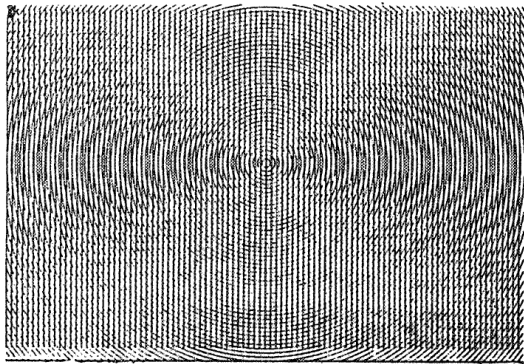


圖 3

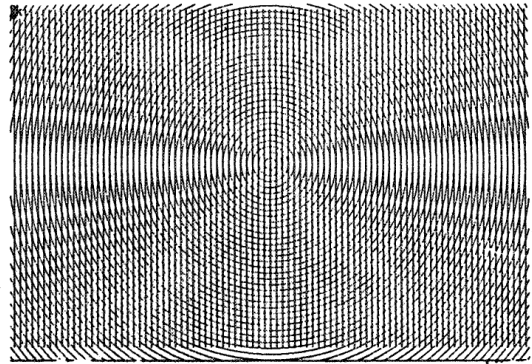


圖 4

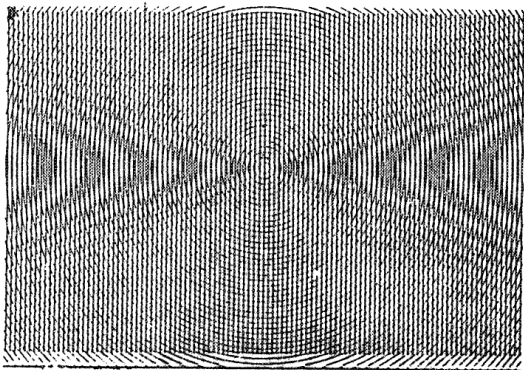


圖 5

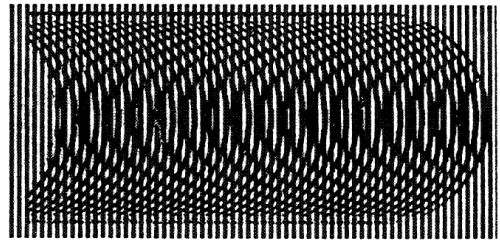


圖 6

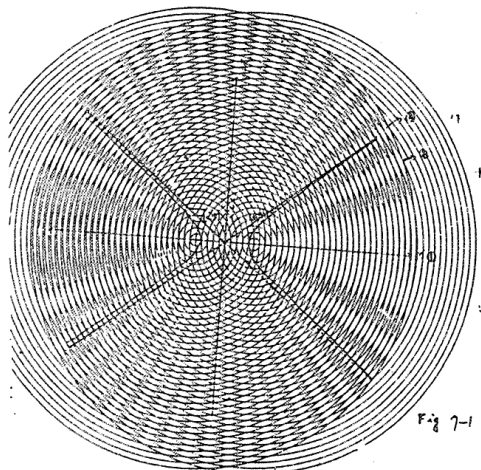


圖 7-1 雙曲線

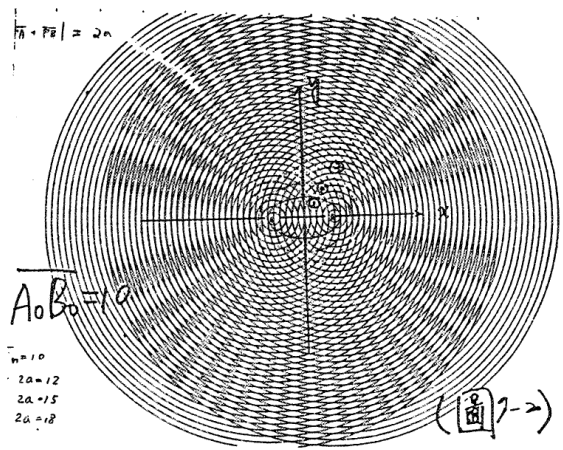


圖 7-2 橢圓

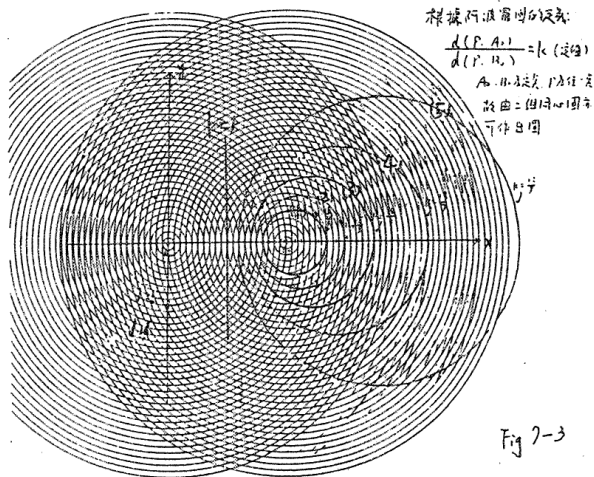


圖 7-3 阿波羅圓

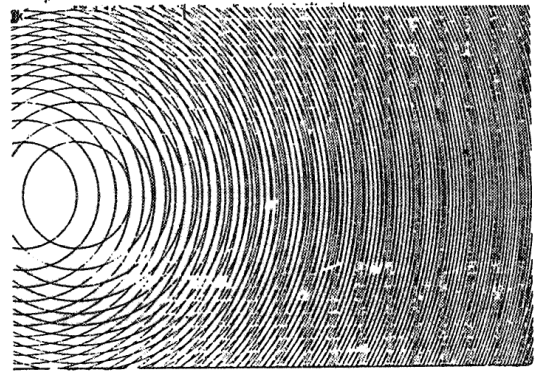


圖 8-1

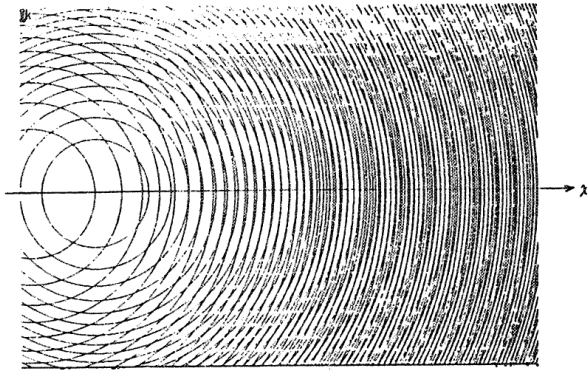


圖 8-2

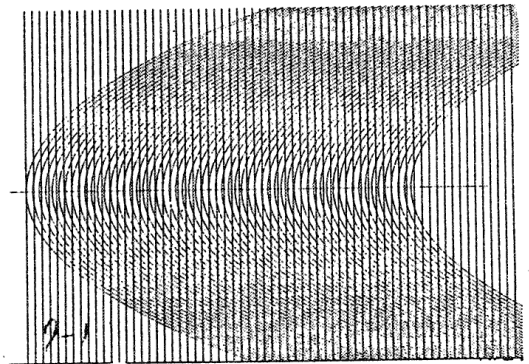


圖 9-1

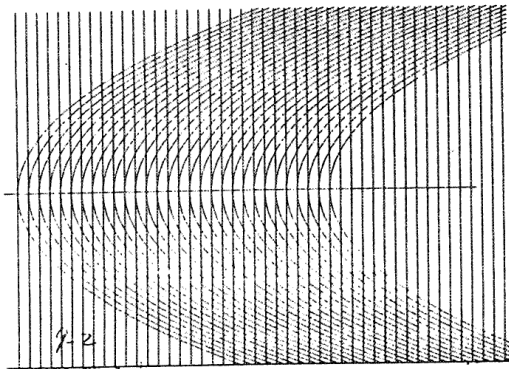


圖 9-2

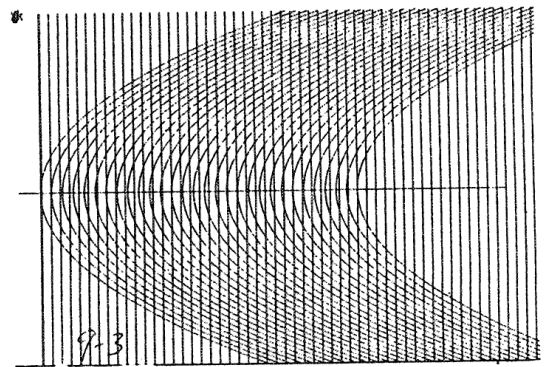


圖 9-3

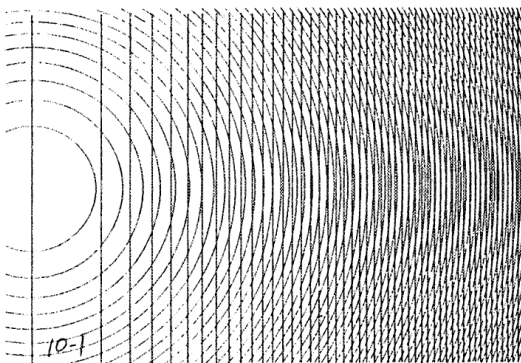


圖 10-1

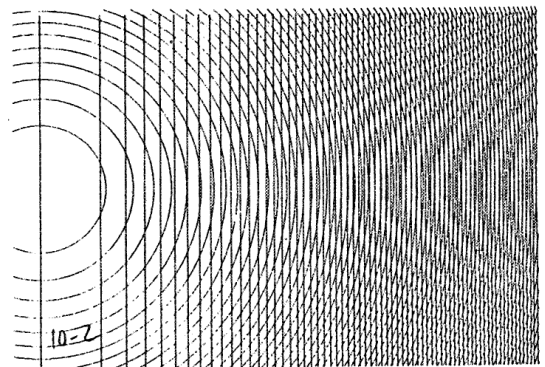


圖 10-2

圖



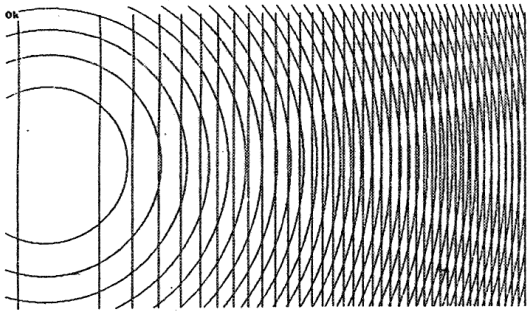


圖 10-3

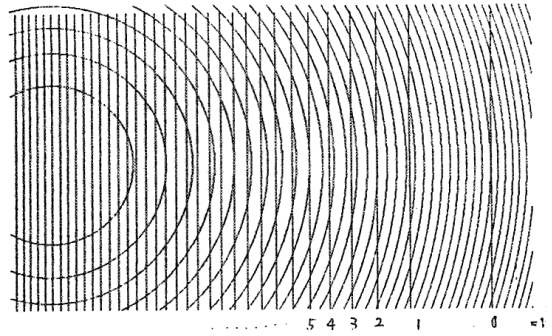


圖 11

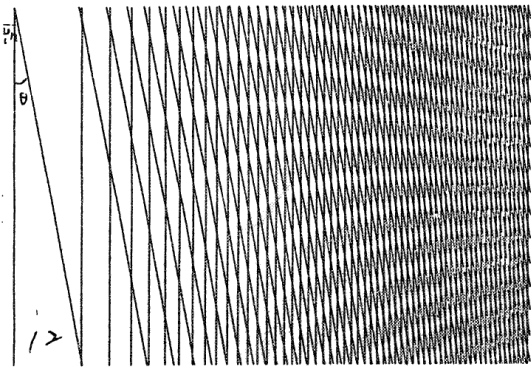


圖 12

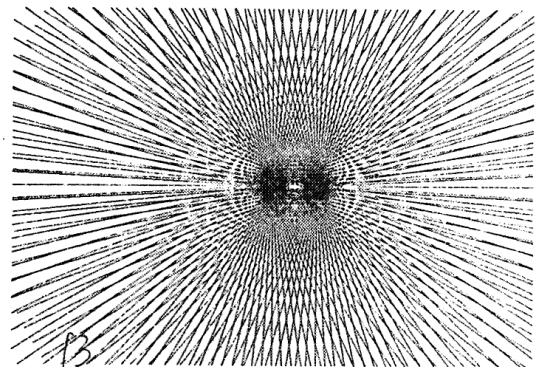


圖 13

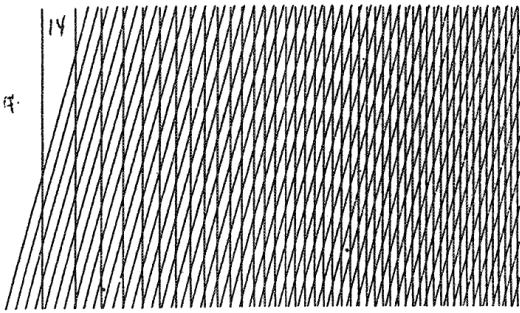


圖 14

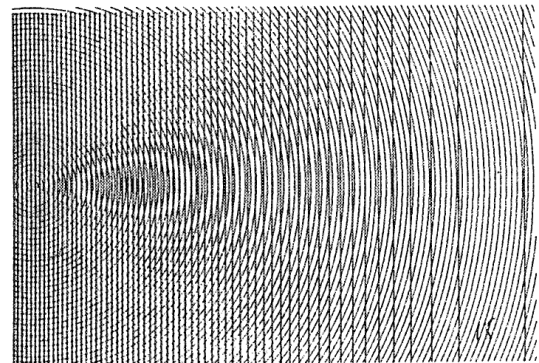


圖 15

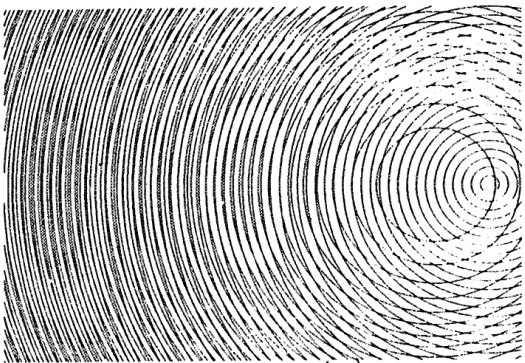


圖 16-1

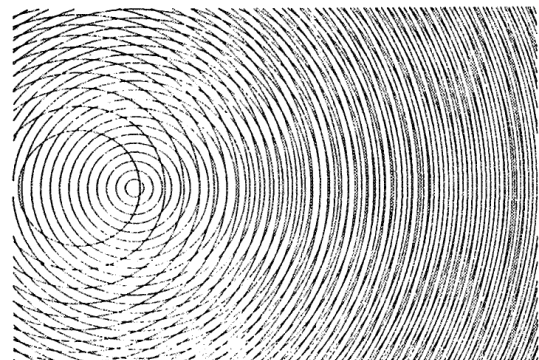


圖 16-2

(圖 16 - 1 與 16 - 2 是同一  
組合，觀察不同範圍 )

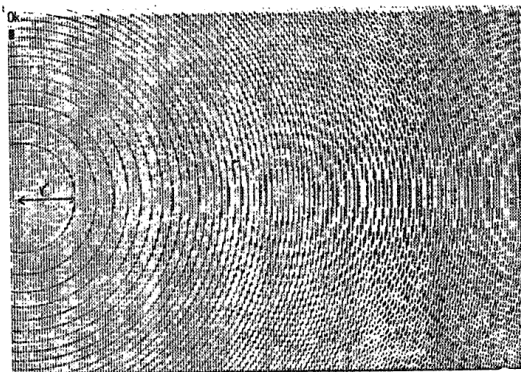


圖 17-1

直線距。d  
第一個圓半徑 = r

$$\frac{d}{r} = \frac{10}{100}$$

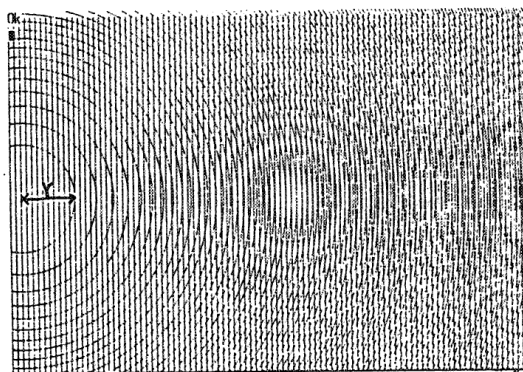


圖 17-2

$$\frac{d}{r} = \frac{5}{100}$$

### 評語

1. 本主題在過去有兩屆科展出現過，但我們選出本作品的原因，在於他們從物理現象出發，並且把所有可以產生Moiré現象的曲線族都一一探討，遠遠超過前兩屆的類似作品。
2. 製作透明膠片顯示這種效果，非常有效。