循環小數的探討

高中組數學科第二名

台灣省立新竹高級中學

作　　者：呂函庭・林士惟

指導教師：何聖宗

一、研究動機

高一課本(上)第一章專門討論有關整數的問題，對於小數的部份則沒有詳細的介紹，因為小數不僅在各種數學演算及日常生活中都常出現，而且它又包含了十進位制、加法律、減法律、除法律、乘法律、極限等的概念，含蓋範圍很廣，所以引發了我們研究、探討的興趣。

二、研究目的

本作品整理了循環小數的原理及基本理論，並且加入新的特性予以製成循環小數表。我們還推導循環節長度與除數的關係，且進一步解釋非純循環小數與純循環小數的關連，同時我們也探討了循環小數分組的特性，最後更導出預測循環節長度的方法。

三、研究討論

(一)循環小數的基本原理：

所有循環小數都可化為一分數（用無窮等比級數計算），而分數形式又可使用直式運算轉化為循環小數，如左下一（令 $(A, B)=1$，即化為最簡分數，且 $A<B$，$A, B, C_i, R_i \in N$，$Q_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$）

$$
\begin{array}{rl}
 & \;\;0.Q_1\;Q_2\;Q_3\cdots\cdots \\
B & \overline{)\,A0\qquad\qquad\qquad} \\
 & \;\;\underline{\;\;C_1\;\;} \\
 & \;\;\;R_1\,0 \\
 & \;\;\;\;\underline{\;\;C_2\;\;} \\
 & \;\;\;\;\;R_2\,0 \\
 & \;\;\;\;\;\;\underline{\;\;C_3\;\;} \\
 & \;\;\;\;\;\;\;R_3\,0 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\vdots
\end{array}
$$

圖(一)

我們由除法公式便可把左邊的直式運算化成橫式，而從中探究其關係→

先假設 $(10A, B)=1$，而 $(10A, B)\neq 1$ 時的情況留待後面第(四)步驟討論：

$10A = BQ_1 + R_1$ ∵ $(10A, B)=1$ 由輾轉相除法原理可知 $(B, R_1)=1$

又∵由假設B不含2・5因數　∴$(10R_1, B) = 1$

$10R_1 = BQ_2 + R_2$　∵$(10R_1, B) = 1$ 同理可證 $(10R_2, B) = 1$

$10R_2 = BQ_3 + R_3$　$(10R_3, B) = 1$

⋮　⋮

$10R_n = BQ_n + R_n$　$(10R_n, B) = 1$

⋮　⋮

因爲被除數永遠和除數互質，必定不能除盡，所以循環小數能夠永無休止。但是上述餘數R_i都小於B且與B互質，因此所能出現的相異餘數個數最多只有ℓ(B)個（ℓ(B)表比B小且與B互質的數），然而餘數卻有無限多個，可見餘數必定重覆出現。因爲根據除法原理，商數和餘數是唯一存在的，即一個餘數必對應一個唯一的商數，故若某一餘數R_n重覆出現時，則必得商Q_{n+1}餘數R_{n+1}，餘數R_{n+1}必得商Q_{n+2}餘數R_{n+2}，因爲R_n、R_{n+1}、R_{n+2}會重覆出現，整個演算勢必重演。於是商數出現順序就是$OQ_1Q_2Q_3 \cdots\cdots Q_n Q_1 Q_2 Q_3 \cdots\cdots Q_n \cdots\cdots$，因此就產生了循環節，故餘數的重現造成循環節的成立，進而形成了循環小數。

㈡循環節和餘數的性質1：

由循環小數表我們可以看出一些奇怪的特性，如下：

循環小數	循環節	循環節數字和	餘數和
6 ÷ 7	$0.\overline{857142}$	8+5+7+1+4+2=27=9×3	6+4+5+1+3+2=21=7×3
9 ÷ 13	$0.\overline{692307}$	6+9+2+3+0+7=27=9×3	9+12+3+4+1+10=39=13×3
8 ÷ 13	$0.\overline{615384}$	6+1+5+3+8+4=27=9×3	8+2+7+5+11+6=39=13×3
23 ÷ 39	$0.\overline{589743}$	5+8+9+7+4+3=36=9×4	23+35+38+29+17+14=156=39×4

很奇怪吧！這些循環節裏的數字加起來都等於9的倍數，餘數和都等於除數的倍數，這些都是巧合嗎？讓我們一探究竟吧！假設$Z = Q_1 + Q_2 + Q_3 \cdots\cdots + Q_n$（即循環節數字和）$C_i$爲$R_i \times B$的積，因爲餘數$R_i$被B除時要乘

上10，參閱圖(一)，故可得以下的式子：

(除數)（商數和）　（積的和）

$$B \times Z = (C_1+C_2+C_3+\cdots\cdots+C_n)=(10A-R_1)+(10R_1-R_2)+(10R_2-R_3)+\cdots\cdots\cdots+(10R_{n-1}-A)$$

$$=9(R_1+R_2+R_3\cdots\cdots+R_{n-1}+R_n)$$

∵A會重覆出現

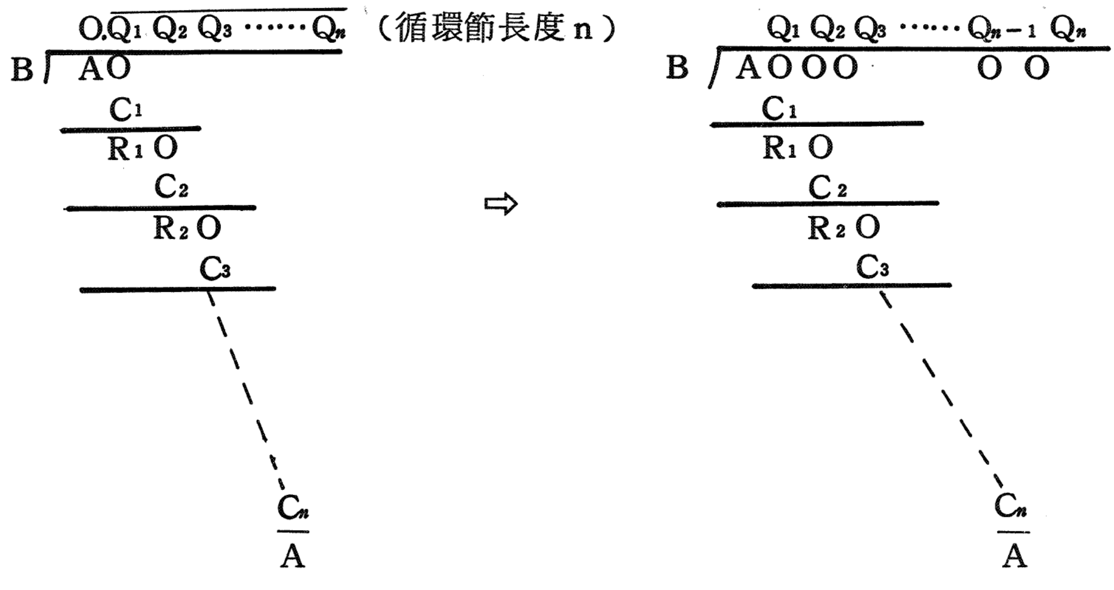
∴設 $R_n=A$

所以若 $(B,3)=1$ 則：$\dfrac{Z}{9}=\dfrac{R_1+R_2+R_3+\cdots\cdots R_{n-1}+R_n}{B}\in N$

也就是說如果B不含3之因數，那麼很顯然的Z一定是9的倍數，且B能整除 $(R_1+R_2+R_3+\cdots\cdots R_n)$；但若B含有3的因數，那麼Z就不一定是9的倍數，而B也不一定能整除 $(R_1+R_2+R_3+\cdots\cdots R_n)$。總而言之，Z（商數和）若是9的Y倍，則 $R_1+R_2+R_3+\cdots\cdots+R_n$（餘數和）必定是B（除數）的Y倍。

(三)循環節長度公式：

假設A會在餘數中重覆出現，且 $(A,B)=1$



亦即：$A(10^n-1)=B\times(10^{n-1}Q_1+10^{n-2}Q_2+\cdots\cdots+10Q_{n-1}+Q_n)\cdots$

$\cdots\cdots$循環節長度公式

（若某餘數 R_i 或A不能重覆出現，則不符合）

經由推導，我們發現了循環節長度n是使得 $B|(10^n-1)$ 的最小的數。若 $(A,B)=1$ 則循環節長度n是使得 $B|A\cdot(10^n-1)$ 的最小的數。

(四)非純循環小數：

假若 $(10A,B)\neq 1$ 時，這時就是非純循環小數。如下圖，我們可以發現一

些性質：　〔假設$P>Q$　$P,Q\in N$　$(A,B)=1$〕

(1)

$$\begin{array}{rl} & \underline{O.M_1} \\ B \big) & A\ O \to \text{只含 } 2^1 5^1 \\ & \underline{\ \ C_1} \to \text{至少有 } 2^p 5^q \\ & \ \ R_1 \to \text{只含有 } 2^1 5^1 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rl} & \underline{O.M_1M_2} \\ B \big) & AO \\ & \underline{\ \ C_1} \\ & \ \ R_1\ O \to \text{只含 } 2^2 5^2 \\ & \underline{\ \ \ \ C_2} \to \text{至少含 } 2^p 5^q \\ & \ \ \ \ R_2 \to \text{只含 } 2^2 5^2 \end{array}$$

(3)……(4)…………

………(q)

$$\begin{array}{rl} & \underline{O.M_1 M_2 \cdots\cdots M^q} \\ B \big) & AO \\ & \underline{\ \ C^1} \\ & \ \ R^1\ O \\ & \quad \vdots \\ & \qquad R_{q-1}\ O \to \text{只含 } 2^q\ 5^q \\ & \qquad \underline{\quad C_q} \to \text{至少有 } 2^p.5^q \\ & \qquad \quad R_q \to \text{只含} 2^q \text{ 但已有 } 5^q \end{array}$$

(q+1)

$$\begin{array}{rl} & \underline{O M_1 M_2 \cdots\cdots M_{q+1}} \\ B \big) & AO \\ & \underline{\ \ C_1} \\ & \ \ R_1\ O \\ & \quad \vdots \\ & \qquad R^q\ O \to \text{只含 } 2^{q+1} \text{但已有 } 5^q \\ & \qquad \underline{C_{q+1}} \to \text{至少有 } 2^p\ 5^q \\ & \qquad R_{q+1} \to \text{只含} 2^{q+1} \text{ 但已有 } 5^q \end{array}$$

(q+2)…

……(p−1)

$$\begin{array}{rl} & \underline{O.M_1 M_2 \cdots\cdots\cdots M_{p-1}} \\ B \big) & A\ O \\ & \underline{\ \ C_1} \\ & \ \ R_1\ O \\ & \quad \vdots \\ & \qquad R_{p-2}\ O \to \text{只有} 2^{p-1} \text{ 已有 } 5^q \\ & \qquad \underline{C_{p-1}} \to \text{至少有 } 2^p\ 5^q \\ & \qquad R_{p-1} \to \text{只有 } 2^{p-1} \text{ 已有 } 5^q \end{array}$$

(p)

$$\begin{array}{rl} & \underline{O.M_1 M_2 \cdots\cdots\cdots M_{p-1} M_p} \\ B \big) & AO \\ & \underline{\ \ C_1} \\ & \ \ R_1\ O \\ & \underline{\ \ \ \ C_2} \\ & \quad \vdots \\ & \qquad R_{p-1}\ O \to \text{只有 } 2^p \text{ 已有 } 5^q \\ & \qquad \underline{\quad C_p} \to \text{至少有 } 2^p\ 5^q \\ & \qquad \quad R_p \to \text{已有} 2^p\ 5^q \end{array}$$

（R_p以後餘數進入循環）

因爲$Rd\times(10^n-1)=B\times(10^{n-1}Q_1+10^{n-2}Q_2+\cdots\cdots+Q_n)$，所以若B含有$2^p\cdot5^q$　的因數，由於$10^n-1=\overbrace{999\cdots\cdots99}^{n\text{個}}$不含2或5，故可知Rd就應含有$2^p\cdot5^q$　。因爲每經過一個步驟，餘數就乘以10，且$(A,B)=1$,A不含2或5，因此要經過P步驟後餘數Rp才能含有$2^p\cdot5^q$　，即符合上述公

式，非循環節部份就有P位了。同理，若q ＞ p非循環節部分就有q位。

(五)在這有一個很重要的概念：因爲餘數重現，演算就會重演，當然某些餘數就會形成一組，彼此不分開。同一組的餘數不會在不同組出現，而且每一個 ℓ (B)都可以出現，因此我們就可以得到循環節長度(n)×組(k)＝ℓ(B)的式子，用來計算組別數。

(六)循環節和餘數組：

1÷13的餘數　　1,10,9,12,3,4
2÷13的餘數　+) 2,7,5,11,6,8
（按順序）　　3,17,14,23,9,12
　　　　　　　　-13-13-13
　　　　　　　　4,1,10,

（3,4,1,10,9,12在4÷13的餘數組裏）

6÷41的餘數　　6,19,26,14,17
5÷41的餘數　+) 5,9,8,39,21
（按順序）　　11,28,34,53,38
　　　　　　　　　　　-41
　　　　　　　　　　　12,

（11,28,34,12,38在11÷41的餘數組裏）

經過許多次試驗，發現同一除數B的兩組餘數按順序相加，大於B就減去B，所成的新數列都是屬於同一組的餘數，爲什麼會有這種規則呢？因爲一個餘數必對應一個商數，由於這些餘數是成組的出現，所以一組餘數與一組循環節相互對應。

6,19,26,14,17 ←對應→ $\overline{14634}$
+) 5,9,8,39,21 ←對應→ $\overline{12195}$

11,28,34,53,38
-41
12 ← 進位

$\overline{2\ 6\ 8\ 2\ 9}$
有進位

因爲同一除數的循環節相當於同一分母的分數，相加所得的循環節也是同一除數的循環節，當然這新的循環節所對應的餘數組也是同一組的，這種對應的關係在進位方面也是很顯著的，例如3＋9進位對應餘數14＋39超過41。

(七)循環節和餘數的性質2：

某些純循環小數的循環節爲2L，如 $\frac{A}{B} = 0.\overline{Q_1 Q_2 Q_3 \cdots\cdots Q_{L-1} Q_L Q_{L+1} \cdots\cdots\cdots Q_{2L-1} Q_{2L}}$

餘數順序　$R_1\ R_2\ R_3 \cdots\cdots R_{L-1}\ R_L\ R_{L+1} \cdots\cdots\cdots R_{2L-1}\ R_{2L}$

若將循環節兩半對調所得的循環小數 $0.\overline{Q_{L+1}\,Q_{L+2}\cdots\cdots Q_{2L-1}\,Q_{2L}\,Q_1\cdots\cdots Q_{L-1}\,Q_L}$ 就等於 $\frac{R_L}{B}$。我們若將兩循環小數相加，得到的應是 $\frac{A}{B}+\frac{R_L}{B}=\frac{A+R_L}{B}$

$$
\begin{array}{rl|l|l|}
 & 0. & Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4\cdots\cdots Q_{L-1}\ Q_L & Q_{L+1}\ Q_{L+2}\cdots\cdots Q_{2L-1}\ Q_{2L} \\
+) & 0. & Q_{L+1}\ Q_{L+2}\ Q_{L+3}\ Q_{L+3}\cdots Q_{2L-1}\ Q_{2L} & Q_1\ Q_2\cdots\cdots Q_{L-1}\ Q_L \\
\hline
 & 0. & (\qquad\qquad\qquad\qquad) & (\qquad\qquad\qquad\qquad)
\end{array}
$$

新的循環小數循環節照理說應該也是 2 L，可是我們卻發現循環節的前半段和後半段都是由相同的數碼 $Q_1\,Q_2\,Q_3\cdots\cdots Q_{L-1}\,Q_L$ 和 $Q_{L+1}\,Q_{L+2}\cdots\cdots Q_{2L-1}\,Q_{2L}$ 相加所得。因此，循環節的前半段和後半段就一樣，循環節長度就變成一半 L 了。這是很奇怪的事情，因爲我們由循環節長度公式知道，若被除數與除數互質時，以同一除數 B 的循環小數循環節的長度應該一樣，也就是 $\frac{A+R_L}{B}$ 的循環節長度就應該是 2 L，而實際上卻是 L？這其間的原因就是 $\frac{A+R_L}{B}$ 可約分化爲最簡分數時，除數 B 改變了，循環節長度才改變，這是很重要的發現，$\frac{A+R_L}{B}$ 可約分，表示 $A+R_L$ 與 B 不互質，又若 B 爲質數；那麼 $B\mid(A+R_L)$，但是 $A<B$，$R_L<B \Rightarrow A+R_L<2B$ $\therefore A+R_L=B$ 同理

$R_1+R_{L+1}=R_2+R_{L+2}=\cdots\cdots\cdots\cdots=R_{L-1}+R_{2L-1}=B$

$\because A+R_L=B$ $\quad \frac{A}{B}+\frac{R_L}{B}=\frac{B}{B}=1=0.\dot{9}=0.999\cdots\cdots\cdots\cdots$

也就是說：

$$
\begin{array}{rl|l|l|}
 & 0. & Q_1\ \ Q_2\ \ Q_3\ \cdots\cdots Q_{L-1}\ Q_L & Q_{L+1}\,Q_{L+2}\cdots\cdots\cdots Q_{2L-1}\,Q_{2L} \\
+) & 0. & Q_{L+1}\,Q_{L+2}\,Q_{L+3}\cdots\cdots Q_{2L-1}\,Q_{2L} & Q_1\ \ Q_2\ \cdots\cdots\cdots Q_{L-1}\ Q_L \\
\hline
 & 0. & 9\ \ 9\ \ 9\ \cdots\cdots 9 & 9\ \ 9\ \ 9\ \cdots\cdots\cdots 9\ \ 9
\end{array}
$$

所以 $\frac{A}{B}$ 的循環節對半分開後相加，所得的數全由數碼 9 組成。

例如：$\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$ $\qquad$ $142+857=999$

餘數順序 1 3 2 6 4 5

7

$\frac{15}{17}=0.\overline{8823529411764705}$ $\qquad$ $88235294+11764705=99999999$

餘數順序 15 14 4 6 9 5 16 7 2 3 13 11 8 12 1 10

(八)循環節長度的推測

我們可以利用循環節長度公式求出 n，繼而求出 k 。但是使用循環節長度公式時極為麻煩，因此我們就想出用通分相加的方式，導出：

若 $B = P_1 \times P_2 \times P_3 \times \cdots\cdots \times P_K$ （P_1、$P_2 \cdots\cdots P_K$ 爲相異非 5 or 2 的質數）

則 $n(B) = [\, n(P_1), n(P_2), \cdots\cdots, n(P_K) \,]$ 　註 $n(P)$ 表示以 P 爲除式的循環節長度

但是這個方法應用上的限制就是不能求出若 B 不是全由相質數組成時的循環節長度了。

就在某天我們設計程式來計算循環節長度時，我們發現了一種規則：

$n(7) = 6$	$n(11) = 2$	$n(17) = 16$	$n(3) = 1$
$n(49) = 42 = 6 \times 7$	$n(121) = 22 = 2 \times 11$	$n(289) = 272 = 16 \times 17$	$n(9) = 1$
$n(343) = 294 = 6 \times 7^2$	$n(1331) = 242 = 2 \times 11^2$	$n(4913) = 4624 = 16 \times 17^2$	$n(27) = 3 = 1 \times 3$
$n(2401) = 2058 = 6 \times 7^3$	$n(14641) = 2662 = 2 \times 11^3$	$\vdots$	$n(81) = 9 = 1 \times 3^2$
$\vdots$	$\vdots$		$n(243) = 27 = 1 \times 3^3$
			$\vdots$

即：除了 9 = 3 以外 $n(P^h) = n(P) \times P^{h-1}$

（這個原因是因爲 $10^1 - 1 = 9$ 　1 同時是使得 $3 \mid 10^n - 1$ 和 $9 \mid 10^n - 1$ 的最小的數。

example：$\because n(7) = 6$ 　$\therefore$ 6 是使得 $7 \mid 10^n - 1$ 的最小的數， $7 \mid 10^6 - 1$

$$10^{42} - 1 = (10^6 - 1)(\underbrace{10^{36} + 10^{30} + 10^{24} + 10^{18} + 10^{12} + 10^6 + 1}_{7\text{ 項}})$$

$\Rightarrow 10^{42} - 1 = (10^6 - 1) \times [(10^{36} - 1) + (10^{30} - 1) + (10^{24} - 1) + (10^{18} - 1) + (10^{12} - 1) + (10^6 - 1) + (1 - 1) + 7]$

$\because 10^6 - 1 \mid 10^{36} - 1$, $10^6 - 1 \mid 10^{30} - 1$, $\cdots\cdots\cdots$ $10^6 - 1 \mid 1 - 1$, 且 $7 \mid 10^6 - 1$

$\therefore [(10^{36} - 1) + (10^{30} - 1) + (10^{24} - 1) + (10^{18} - 1) + (10^{12} - 1) + (10^6 - 1) + (1 - 1) + 7]$ 就只含一個 7

$\Rightarrow$ $(10^{42} - 1)$ 比 $(10^6 - 1)$ 多含一個 7 。我們又證明了：

若 $10^6 - 1$ 只含一個 7 ，則 $10^{12} - 1$, $10^{18} - 1$, $10^{24} - 1$, $10^{30} - 1$; $10^{36} - 1$ 　只含一個 7

我們還證明了：

$10^{13} - 1$, $10^{14} - 1$, $\cdots$ $10^{17} - 1$; $10^{19} - 1$, $10^{20} - 1$, $\cdots\cdots$ $10^{23} - 1$; $10^{25} - 1$, $10^{26} - 1$, $\cdots\cdots$ $10^{29} - 1$; $10^{31} - 1$, $10^{32} - 1$, $\cdots\cdots$ $10^{35} - 1$; $10^{37} - 1$, $10^{38} - 1$, $\cdots\cdots$ $10^{41} - 1$ 　都不爲 7

的倍數。

綜合起來，(10^1-1),(10^2-1),(10^3-1)………$(10^{40}-1)$,$(10^{41}-1)$ 都

不滿足 $49 \mid 10^n-1$ 。

也就是42是使得 $49 \mid 10^n-1$ 的最小的數⇨$n(49)=42$ #

利用這種方法，我們就可以證明這種規則了。

有了這種規則，我們便可利用通分相加的方式，再導出：

若 $B=P_1^{h1}\times P_2^{h2}\times P_3^{h3}\times\cdots\cdots\times P_k^{hk}$（$P_1,P_2,P_3\cdots\cdots P_k$ 為相異非 5，2 or 3 的質數）

則 $n(B)=[n(P_1)\times P_1^{h1-1},\ n(P_2)\times P_2^{h2-1},\ \cdots\cdots\cdots n(P_k)\times P_k^{hk-1}]$

也就是只要我們把除式因式分解，導入上式，利用已知質數的循環節長度，就可以用來推測 $n(B)$ 了。

四、研究結論

我們研究的結論尚有：

(1)若 $(A,B)\neq 1$，則 n 是使得 $B \mid A(10^n-1)$ 的最小的數

(2)若除數 B 不含 2 or 5 時，保證被除數 A 一定會重覆出現，即循環節從小數點後第一位開始。

(3)若非循環節有 d 位⇨B 含有 2^d or 5^d 的因數。

(4)若 $B=2^p.5^q\times b$（b 不含 2 or 5）⇨ 循環節部分為以 b 為除式的循環節。

(5)若 P 不含 5 or 2 的因數，則 P 必可找到無數個 n 使得 $P \mid 10^n-1$。

本作品最重要的發現就是找到許多循環小數的規則，製成表，並且能夠推測循環節的長度，非循環節的長度及組別，利用餘數組的性質，我們可以用已知的餘數組變換組合後相加，得到其它的餘數組。在研究的過程中我們也發現了許多有關數的問題，遠遠超過循環小數的範圍，可見循環小數的可看性。

非　純　循　環　小　數　表

循環小數		B所含 2 × 5	非循環節位數 d
3／1120	$0.00267\overline{857142}$	$2^5\times5^1$	5 位
7／3400	$0.002\overline{0588235294117647}$	$2^3\times5^2$	3 位
3／15200	$0.00019\overline{736842105263157894}$	$2^5\times5^2$	5 位
1／280	$0.003\overline{571428}$	$2^3\times5^1$	3 位
3／27500	$0.0001\overline{09}$	$2^2\times5^4$	4 位

循　環　小　數　表

循環小數	1 ÷ 7	1 ÷ 11	2 ÷ 11	3 ÷ 11
循環節	$0.\overline{142857}$	$0.\overline{09}$	$0.\overline{18}$	$0.\overline{27}$
循環節數字和	1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 27 = 9 × 3	0 + 9 = 9	1 + 8 = 9	2 + 7 = 9
餘數和（按餘數出現順序）	1 + 3 + 2 + 6 + 4 + 5 = 21 = 7 × 3	1 + 10 = 11	2 + 9 = 11	3 + 8 = 11
循環小數	4 ÷ 11	5 ÷ 11	1 ÷ 13	2 ÷ 13
循環節	$0.\overline{36}$	$0.\overline{45}$	$0.\overline{076923}$	$0.\overline{153846}$
循環節數字和	3 + 6 = 9	4 + 5 = 9	0+7+6+9+2 +3=27=9×3	1 + 5 + 3 + 8 + 4 + 6 = 27 = 9 × 3
餘數和	4 + 7 = 11	5 + 6 = 11	1+10+9+12+3 +4=39=13×3	2 + 7 + 5 + 11 + 6 + 8 = 39 = 13 × 3
循環小數	1 ÷ 17	1 ÷ 21	2 ÷ 21	1 ÷ 31
循環節	$0.\overline{0588235294117647}$	$0.\overline{047619}$	$0.\overline{095238}$	$0.\overline{032258064516129}$
循環節數字和	0 + 5 + 8 + 8 + 2 + 3 + + 5 + 2 + 9 + 4 + 1 + 1 + 7 + 6 + 4 + 7 = 72 = 9 × 8	0 + 4 + 7 + 6 + + 1 + 9 = 27 = 9 × 3	0 + 9 + 5 + 2 + + 3 + 8 = 27 = 9 × 3	0 + 3 + 2 + 2 + 5 + 8 + 0 + 6 + 4 + 5 + 1 + 6 + 1 + 2 + 9 = 54 = 9 × 6
餘數和	1 + 10 + 15 + 14 + 4 + 6 + 9 + 5 + 16 + 7 + 2 + 3 + 13 + 11 + 8 + 12 = 136 = 17 × 8	1 + 10 + 16 + 13 + 4 + 19 = 63 63 = 21 × 3	2 + 20 + 11 + 5 + 8 + 17 = 63 = 21 × 3	1 + 10 + 7 + 8 + 18 + 25 + 2 + 20 + 14 + 16 + 5 + 19 + 4 + 9 + 28 = 186 = 31 × 6
循環小數	3 ÷ 31	1 ÷ 47		
循環節	$0.\overline{096774193548387}$	0.0212765957446808510638297872340425531914893617		
循環節數字和	0 + 9 + 6 + 7 + 7 + 4 + + 1 + 9 + 3 + 5 + 4 + 8 + 3 + 8 + 7 = 81 = 9 × 9	0+2+1+2+7+6+5+9+5+7+4+4+6+8+0+8+5+1 +0+6+3+8+2+9+7+8+7+2+3+4+0+4+2+5+5+3 +1+9+1+4+8+9+3+6+1+7=207 = 9 × 23		
餘數和	3 + 30 + 21 + 24 + 23 + + 13 + 6 + 29 + 11 + 17 + 15 + 26 + 12 + 27 + 22 = 279 = 31 × 9	1 + 10 + 6 + 13 + 36 + 31 + 28 + 45 + 27 + 35 + 21 + 22 + 32 + 38 + 4 + 40 + 24 + 5 + 3 + 30 + 18 + 39 + 14 + 46 + 37 + 41 + 34 + 11 + 16 + 19 + 2 + 20 + 12 + 26 + 25 + 15 + 9 + 43 + 7 + 23 + 42 + 44 + 17 + 29 + 8 + 33 = 1081 = 47 × 23		

評語

1.作者具強烈之好奇心，並能發掘問題。

2.分析力強，思路活絡。

3.作品的表達簡潔、明快。

4.有深入研究之傾向。