費玻納西數列末 k 位均為{0}的項是第幾項？（k 為正整數）

高中組數學科第一名

省立嘉義女子高中

作　　者：陳桂榕、潘品全

指導教師：洪銈雄

一、研究動機與目的

在老師教完數列這一章後，也順便把 Fibonacci 數列及 Lucas 數列介紹給我們，而引發了好奇心與興趣去探索它。我們首先發現 Fibonacci 數列的第十五項末位有一個“0”，那兩個“0”呢？或許我們將表列得多一點，可找出末兩位為“0”的項，但三個、四個、……“0”呢？若有，又是第幾項呢？這些都是值得我們去探討的問題，因此展開了底下的研究！

二、研究內容與過程

經過一番的研討，首先我們發現以上的問題的答案都是肯定的。現在先證明有末四位均為“0”的項存在：

pf：1.若我們可以找到數列中，某一對相鄰項（F_k，F_{k+1}）和另外一對相鄰項（F_{n+k}，F_{n+k+1}）末四位數全同(*)

即　$F_k = F_{n+k}$ —（多少萬）　　$F_{k+1} = F_{n+k+1}$ —（多少萬）

則　$F_{k-1} = F_{k+1} - F_k = F_{n+k+1}$ −（多少萬）−〔F_{n+k} −（多少萬）〕

$= (F_{n+k+1} - F_{n+k})$ −（多少萬）$= F_{n+k-1}$ −（多少萬）

∴ F_{k-1} 與 F_{n+k-1} 的末四位全同，依此類推 F_n 與 F_0 的末四位就全同了！因 $F_0 = 0$，故 F_n 末四位為“0”!!

2.今在前面 $10^8 + 2$ 項中，共有 $10^8 + 1$ 對相鄰項，此 $10^8 + 1$ 對中必有兩對末四位相同，也就是有某一對相鄰項（F_k，F_{k+1}）和另一對相鄰項（F_{n+k}，F_{n+k+1}）末四位全同，滿足上述條件(*)，∴得證有末四位均為“0”的項存在，同理可證：末 k 位均為“0”的項均存在。

現進一步要來求末 k 位均為“0”的項為第幾項，為達此目的，我們先介紹 Fibonacci 數列與 Lucas 數列如下：

Fibonacci 數列

＜F_n＞：1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89、144、233……

F_5　F_6　　　　　F_{12}

Lucas 數列

＜L_n＞：1、3、4、7、11、18、29、47、76、123、199……

廣義的 Fibonacci 數列：

＜H_n＞：p、q、p+q、p+2q、2p+3q、3p+5q、……

我們先來證明幾個預備性質（㈠到㈦）：

㈠ $H_{n+2} = pF_n + qF_{n+1}$，$n \geq 0$，$F_0 = 0$

pf：用數學歸納法可證。

㈡ $L_n = F_n + 2F_{n-1} = F_{n-1} + F_{n+1}$

pf：由㈠可證。

㈢ Fibonacci & Lucas 的 Binet 型：

設 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

則 1. $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$　　2. $L_n = \alpha^n + \beta^n$

pf：1. 令 $F_{n+2} - \alpha F_{n+1} = \beta(F_{n+1} - \alpha F_n)$

即 $F_{n+2} = (\alpha + \beta)F_{n+1} - \alpha\beta F_n$

則 $\alpha + \beta = 1$ …………(a)，$\alpha\beta = -1$ …………(b)

由(b)得 $\beta = -\dfrac{1}{\alpha}$ 代入(a)：$\alpha - \dfrac{1}{\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$

$\therefore \alpha = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$，$\beta = \dfrac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$

(1) $F_{n+2} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}F_{n+1} = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(F_{n+1} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}F_n\right)$

表＜$F_{n+1} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}F_n$＞為一公比 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 的 G.P.

$\therefore F_{n+1} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}F_n = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(F_2 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}F_1\right)$

$\therefore F_{n+1} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}F_n = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ ……………………①

(2) $F_{n+2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}F_{n+1}=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})(F_{n+1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}F_n)$

表 $<F_{n+1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}F_n>$ 為一公比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 的 G.P.

$\therefore F_{n+1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}F_n=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}(F_2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}F_1)$

$\therefore F_{n+1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}F_n=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ ……………………………②

(3)由②－①得 $\sqrt{5}F_n=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

$\therefore F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$ $n\in N$

即 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$

2.由(二) $L_n=F_{n-1}+F_{n+1}=\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\sqrt{5}}+\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{5}}$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^n(\alpha^{-1}+\alpha)-\beta^n(\beta^{-1}+\beta)]$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n\cdot\sqrt{5}+\beta^n\cdot\sqrt{5})$

$=\alpha^n+\beta^n$

(四) $F_n\mid F_{nk}$ $(m\mid n\Rightarrow F_m\mid F_n)$

pf : $F_{nk}=\frac{\alpha^{nk}-\beta^{nk}}{\alpha-\beta}$

$=\frac{(\alpha^n-\beta^n)[(\alpha^n)^{k-1}+(\alpha^n)^{k-2}\beta^n+\cdots\cdots+(\beta^n)^{k-1}]}{\alpha-\beta}$

$=F_n[(\alpha^n)^{k-1}+(\alpha^n)^{k-2}\beta^n+\cdots\cdots+(\beta^n)^{k-1}]$

$=\left\{\begin{array}{l}F_n[L_{n(k-1)}+(-1)^nL_{n(k-3)}+(-1)^{2n}L_{n(k-5)}+\cdots\cdots\\ \pm L_n]\leftarrow k-1\text{ 為奇數}\\ \text{or }=F_n[\underbrace{L_{n(k-1)}+(-1)^nL_{n(k-3)}+(-1)^{2n}L_{n(k-5)}}_{\text{為整數}}+\cdots\\ \pm 1]\leftarrow k-1\text{ 為偶數}\end{array}\right.$

$\therefore F_n \mid F_{nk}$

(五) $m \mid n \Longleftrightarrow F_m \mid F_n$

pf： 1° $(\Rightarrow)$ (四)已證

2° $(\Leftarrow)$ 令 $n = mk + r$，$0 \leq r < m$，現欲證 $r = 0$

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^m - \beta^m} = \frac{\alpha^{mk+r} - \beta^{mk+r}}{\alpha^m - \beta^m} = \frac{(\alpha^m)^k \cdot \alpha^r - (\beta^m)^k \cdot \beta^r}{\alpha^m - \beta^m}$$

$$= \frac{(\alpha^m - \beta^m)[(\alpha^m)^{k-1} \cdot \alpha^r + (\beta^m)^{k-1} \cdot \beta^r]}{\alpha^m - \beta^m}$$

$$\frac{+ (\alpha^m)^{k-1} \cdot \alpha^r \cdot \beta^m - \alpha^m \cdot (\beta^m)^{k-1} \cdot \beta^r}{}$$

$$= (\alpha^{m(k-1)+r} + \beta^{m(k-1)+r}) + \frac{\alpha^m \beta^m (\alpha^{m(k-2)+r} - \beta^{m(k-2)+r})}{\alpha^m - \beta^m}$$

$$= L_{m(k-1)+r} + (-1)^m \frac{\alpha^{m(k-2)+r} - \beta^{m(k-2)+r}}{\alpha^m - \beta^m}$$

繼續以上的步驟，可得

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^m - \beta^m} = L_{m(k-1)+r} + (-1)^m [L_{m(k-3)+r}$$

$$+ (-1)^m \frac{\alpha^{m(k-4)+r} - \beta^{m(k-4)+r}}{\alpha^m - \beta^m}$$

$$= L_{m(k-1)+r} + (-1)^m L_{m(k-3)+r} + (-1)^{2m} L_{m(k-5)+r}$$

$$+ \cdots\cdots \pm \frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha^m - \beta^m} \left(\text{或} \frac{\alpha^{m-r} - \beta^{m-r}}{\alpha^m - \beta^m}\right)$$

$$= \text{整數} \pm \frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha^m - \beta^m} \left(\text{或} \frac{\alpha^{m-r} - \beta^{m-r}}{\alpha^m - \beta^m}\right)$$

若 $r \neq 0$，則上式＝整數 $\pm \frac{F_r}{F_m}$（或 $\frac{F_{m-r}}{F_m}$），因 $0 < r < m$，故 $F_r <$ F_m 且 $F_{m-r} < F_m$，因而 $\frac{F_r}{F_m}$ 與 $\frac{F_{m-r}}{F_m}$ 均為眞分數，不為整數，於是 $\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^m - \beta^m}$ 不為整數，即 $\frac{F_n}{F_m}$ 不為整數，此與 $F_m \mid F_n$ 矛盾，故必 $r = 0$，因而本命題得證。

(六) $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$

pf： 令 $(F_m, F_n) = F_k$ 且 $(m, n) = d$

則 $F_k \mid F_m, F_k \mid F_n \Rightarrow k \mid m, k \mid n$（由(五)）$\Rightarrow k \mid d \Rightarrow F_k \mid F_d$ ……(1)

又 $d \mid m$，$d \mid n \Rightarrow F_d \mid F_m, F_d \mid F_n$（由(五)$\Rightarrow F_d \mid F_k$……………………(2)

由(1)(2)得 $F_k = F_d$ 即得證 $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$

(七) $(m, n) = 1 \Rightarrow F_m \cdot F_n \mid F_{mn}$

pf： 1° $(m, n) = 1 \Rightarrow (F_m, F_n) = F_{(m,n)} = F_1 = 1$ （由(六)）

2° 今 $F_m \mid F_{mn}$，$F_n \mid F_{mn}$ 且知 $(F_m, F_n) = 1$，故 $F_m \cdot F_n \mid F_{mn}$。

(八)欲求 $10000 \mid F_n$，n最少多少？

sol： $10000 = 5^4 \times 2^4 = 625 \times 16$

$<F_n>$：1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89、144、233

F_3 F_5 F_6 F_{10} F_{12}

由數列觀察得 $5 \mid F_5$，$8 \mid F_6$，$16 \mid F_{12}$

1° 找 16 之倍數，到了 F_{12}"始"被找到 $\because F_n \mid F_{nk}$

$\therefore F_{12} \mid F_{12k} \Rightarrow 16 \mid F_{12k}$

2° 再找 $625 \mid F_n$，n最少多少？ $\because 5 \mid F_5$ $\therefore 5 \mid F_{5k}$

要找 625 之倍數，則先從 25、125 之倍數找起。

$\because$ 625 之倍數必定為 5、25、125 之倍數

1. 25 之倍數：從 F_{5k} 找起

令 $\dfrac{F_{5k}}{F_5} = t$，若 t 為 $<\begin{matrix}5\\25\end{matrix}$ 的倍數，則 F_{5k} 為 $<\begin{matrix}25\\125\end{matrix}$ 的倍數。

(1) $\dfrac{F_{10}}{F_5} = \alpha^5 + \beta^5 = L_5 \equiv 1 \pmod 5$（參閱下註） $\therefore 25 \nmid F_{10}$

(2) $\dfrac{F_{15}}{F_5} = \alpha^{10} + \alpha^5\beta^5 + \beta^{10} = L_{10} - 1 \equiv 3 - 1 = 2 \pmod 5$

$\therefore 25 \nmid F_{15}$

(3) $\dfrac{F_{20}}{F_5} = \alpha^{15} + \alpha^{10}\beta^5 + \alpha^5\beta^{10} + \beta^{15} = L_{15} - L_5 \equiv 4 - 1$

$= 3 \pmod 5$ $\therefore 25 \nmid F_{20}$

(4) $\dfrac{F_{25}}{F_5} = \alpha^{20} + \alpha^{15}\beta^5 + \alpha^{10}\beta^{10} + \alpha^5\beta^{15} + \beta^{20} = L_{20} - L_{10} + 1 \equiv 2 - 3$

$+ 1 = 0 \pmod 5$ 為 5 之倍數，$\therefore 25 \mid F_{25} \Rightarrow 25 \mid F_{25k}$

$\dfrac{F_{25}}{F_5} = L_{20} - L_{10} + 1 \equiv 2 - 23 + 1 = -20 \pmod{25}$

∴非25之倍數⇒$125 \nmid F_{25}$

〔註〕：∵此種檢驗只是觀察餘數是否爲“0”，∴利用“同餘的方法”即可檢驗：

我們發現$\langle L_n \rangle$數列（觀察檢驗出）

被5除餘數有：1、3、4、2之循環性。

被25除餘數有：1、3、4、7、11、18、4、22、1、23、24、22、21、18、14、7、21、3、24、2（共20個）之循環性。

2. 125之倍數：從F_{25k}找起

令$\dfrac{F_{25k}}{F_{25}}=t$，若t爲$\left\langle \begin{matrix}5\\25\end{matrix}\right.$的倍數，則$F_{25k}$爲$\left\langle \begin{matrix}125\\625\end{matrix}\right.$的倍數。

(1)$\dfrac{F_{50}}{F_{25}}=\alpha^{25}+\beta^{25}=L_{25}\equiv 1 \pmod 5$

(2)$\dfrac{F_{75}}{F_{25}}=\alpha^{50}+\alpha^{25}\beta^{25}+\beta^{50}=L_{50}-1\equiv 3-1=2 \pmod 5$

(3)$\dfrac{F_{100}}{F_{25}}=\alpha^{75}+\alpha^{50}\beta^{25}+\alpha^{25}\beta^{50}+\beta^{75}=L_{75}-L_{25}\equiv 4-1=3$

$\pmod 5$

(4)$\dfrac{F_{125}}{F_{25}}=\alpha^{100}+\alpha^{75}\beta^{25}+\alpha^{50}\beta^{50}+\alpha^{25}\beta^{75}+\beta^{100}=L_{100}-L_{50}+1$

$\equiv 2-3+1=0 \pmod 5$

但$\dfrac{F_{125}}{F_{25}}=L_{100}-L_{50}+1\equiv 2-23+1=-20\equiv 5 \pmod 5$

故F_{125}是125的倍數，但非625的倍數。

3. 625之倍數：從F_{125k}找起

令$\dfrac{F_{125k}}{F_{125}}=t$，若t爲5的倍數，則$F_{125k}$爲625的倍數。

(1)$\dfrac{F_{250}}{F_{125}}=\alpha^{125}+\beta^{125}=L_{125}\equiv 1 \pmod 5$

(2)$\dfrac{F_{375}}{F_{125}}=\alpha^{250}+\alpha^{125}\beta^{125}+\beta^{250}=L_{250}-1\equiv 3-1=2 \pmod 5$

(3)$\dfrac{F_{500}}{F_{125}}=\alpha^{375}+\alpha^{250}\beta^{125}+\alpha^{125}\beta^{250}+\beta^{375}=L_{375}-L_{125}\equiv 4-1=3$

$(\bmod 5)$

(4) $\frac{F_{625}}{F_{125}}=\alpha^{500}+\alpha^{375}\beta^{125}+\alpha^{250}\beta^{250}+\alpha^{125}\beta^{375}+\beta^{500}=L_{500}-L_{250}+1$

$\equiv 2-3+1=0 \pmod 5$

$\therefore 625 \mid F_{625} \Rightarrow 625 \mid F_{625k}$ 故找 625 之倍數，到了 F_{625} "始" 被找到。

3° 由 1°2° 得　$16 \mid F_{12}$　$625 \mid F_{625}$　$\because (12,625)=1$　∴由性質(七)得

$F_{12}\cdot F_{625} \mid F_{12\cdot 625}$　$\therefore 16\cdot 625 \mid F_{7500}$　即 $10000 \mid F_{7500}$

因使 $16 \mid F_n$ 之最小的 n 爲 12　$625 \mid F_n$ 之最小的 n 爲 625

故始 $10000 \mid F_n$ 之最小的 n 爲 $12\times 625=7500$　即末四位均爲 0 的第一項

爲 F_{7500} 當然 F_{7500k} $(k\in N)$ 亦均末四位爲 0

4° 同樣的方法，由 $4 \mid F_{6k}, 25 \mid F_{25k}$　可得 $100 \mid F_{150k}$，故末 "二" 位均爲 "0" 第一個爲 F_{150}

(九)我們更進一步發現有下列規則性：

1. $8 \mid F_6$、$16 \mid F_{12}$・$32 \mid F_{24}$・$64 \mid F_{48}$……是否必 $2^k \mid F_{3\cdot 2^{k-2}}$ $(k\geq 3$，$k\in N)$ 呢？

2. $5 \mid F_5$・$25 \mid F_{25}$・$125 \mid F_{125}$・$625 \mid F_{625}$……是否必 $5^k \mid F_{5^k}$ $(k\in N)$ 呢？

經過我們鍥而不捨反覆的思考研究，終於發現上述的結果都是肯定的，證明如下：

pf ：我們用數學歸納法證明如下：

1. 1° $k=3$　$2^3=8 \mid F_6=F_{3\cdot 2^1}=8$　成立。

2° 設 $k=m$ 時，$(m\geq 3)$ 成立，即設 $2^m \mid F_{3\cdot 2^{m-2}}$

則 $k=m+1$ 時，我們要證明 $\frac{F_{3\cdot 2^{m-1}}}{F_{3\cdot 2^{m-2}}}$ 是 2 的倍數

今 $\frac{F_{3\cdot 2^{m-1}}}{F_{3\cdot 2^{m-2}}}=\frac{\alpha^{3\cdot 2^{m-1}}\cdot\beta^{3\cdot 2^{m-1}}}{\alpha^{3\cdot 2^{m-2}}-\beta^{3\cdot 2^{m-2}}}=\frac{\alpha^{3\cdot 2^{m-2}\cdot 2}-\beta^{3\cdot 2^{m-2}\cdot 2}}{\alpha^{3\cdot 2^{m-2}}-\beta^{3\cdot 2^{m-2}}}$

$=\frac{(\alpha^{3\cdot 2^{m-2}})^2-(\beta^{3\cdot 2^{m-2}})^2}{\alpha^{3\cdot 2^{m-2}}-\beta^{3\cdot 2^{m-2}}}=\alpha^{3\cdot 2^{m-2}}+\beta^{3\cdot 2^{m-2}}$

$=L_{3\cdot 2^{m-2}}=F_{3\cdot 2^{m-2}}+2F_{3\cdot 2^{m-2}-1}$

(由(二)得) $=2^m d+2F_{3\cdot 2^{m-2}-1}$

$=2(2^{m-1}d+F_{3\cdot 2^{m-2}-1})$ ∴爲 2 的倍數

$\therefore 2^{m+1} \mid F_{3\cdot 2^{m-1}}$　故得證

2. 1° $k=1$，$5\mid F_5=5$ 成立

2° 設 $k=m$（$m\in N$）時，成立，即設 $5^m\mid F_{5^m}$，則 $k=m+1$ 時，欲證

$$\frac{F_{5^{m+1}}}{F_{5^m}}=t\ ,\ t\ 爲5的倍數。$$

$$令\ t=\frac{\alpha^{5^{m+1}}-\beta^{5^{m+1}}}{\alpha^{5^m}-\beta^{5^m}}=\frac{(\alpha^{5^m})^5-(\beta^{5^m})^5}{\alpha^{5^m}-\beta^{5^m}}$$

$$=(\alpha^{5^m})^4+(\alpha^{5^m})^3(\beta^{5^m})+(\alpha^{5^m})^2(\beta^{5^m})^2+(\alpha^{5^m})(\beta^{5^m})^3$$
$$+(\beta^{5^m})^4$$
$$=L_{5^m\cdot 4}-L_{5^m\cdot 2}+1$$

已知 L_n 數列除以 5 餘：1、3、4、2 循環

$\therefore L_{5^m\cdot 4}$ 除以 5 餘 2（$\because \dfrac{5^m\cdot 4}{4}=5^m$……餘 0）

$L_{5^m\cdot 2}$ 除以 5 餘 3（$\because \dfrac{5^m\cdot 2}{4}=\dfrac{(4+1)^m\cdot 2}{4}$ 餘 2）

$\therefore$原式 $t\equiv 2-3+1=0\ (\mathrm{mod}5)$

$\therefore\ 5^{m+1}\mid F_{5^{m+1}}$，故得證。

(十)現已知 $2^k\mid F_{3\cdot 2^{k-2}}$，但爲 2^k 之倍數的項是否必爲 $F_{(3\cdot 2^{k-2})\cdot \ell}$（$\ell\in N$）呢？又 $5^k\mid F_{5^k}$，但爲 5^k 之倍數的項是否必爲 $F_{5^k\cdot \ell}$（$\ell\in N$）呢？這兩個答案都是肯定的，讓我們逐一來證明它！

1.先證明：(1) $2^k\mid F_{3\cdot 2^{k-2}}$，但 $2^k\nmid F_{3\cdot 2^{k-3}}$（$k\geq 3$）

(2) $5^k\mid F_{5^k}$，但 $5^k\nmid F_{5^{k-1}}$（$k\in N$）

pf：①吾人已證 $2^k\mid F_{3\cdot 2^{k-2}}$，現證 $2^k\nmid F_{3\cdot 2^{k-3}}$ 即可：

1° 顯然 $2^3\nmid F_3$　$2^4\nmid F_6$

2° 設 $F_{3\cdot 2^{k-3}}$ 不是 2^k 的倍數（$k\geq 4$），由(九)之證明(1)中可知

$$\frac{F_{3\cdot 2^{k-2}}}{F_{3\cdot 2^{k-3}}}=L_{3\cdot 2^{k-3}}=F_{3\cdot 2^{k-3}}+2F_{3\cdot 2^{k-3}-1}$$

$$=2^{k-1}d+2F_{3\cdot 2^{k-3}-1}$$
$$=2(2^{k-2}d+F_{3\cdot 2^{k-3}-1})$$

$\because F_{3\cdot 2^{k-3}}$ 是 2^{k-1} 的倍數，又根據性質(六)$(F_m,F_n)=F_{(m,n)}$

$\therefore (F_{3\cdot 2^{k-3}},F_{3\cdot 2^{k-3}-1})=F_{(3\cdot 2^{k-3},3\cdot 2^{k-3}-1)}$

$=F_1=1$

$\therefore F_{3\cdot 2^{k-3}}$ 與 $F_{3\cdot 2^{k-3}-1}$ 互質

$\therefore F_{3\cdot 2^{k-3}-1}$ 不為 2 的倍數，故 $\dfrac{F_{3\cdot 2^{k-2}}}{F_{3\cdot 2^{k-3}}}$ 不為 4 的倍數，因

$F_{3\cdot 2^{k-3}}$ 不是 2^k 的倍數，而 $\dfrac{F_{3\cdot 2^{k-2}}}{F_{3\cdot 2^{k-3}}}$ 不是 4 的倍數，故

$F_{3\cdot 2^{k-2}}$ 不是 2^{k+1} 的倍數，得證。

② $5^k \mid F_{5^k}$（已知）現證 $5^k \nmid F_{5^{k-1}}$ ：

1° 顯然 $5 \nmid F_1$ ， $5^2 \nmid F_5$

2° 設 $F_{5^{k-1}}$ 不是 5^k 的倍數（ $k \geq 2$ ）由(九)之證明(2)中可得知

$$\frac{F_{5^k}}{F_{5^{k-1}}} = L_{5^{k-1}\cdot 4} - L_{5^{k-1}\cdot 2} + 1 \equiv 2 - 23 + 1 = -20 \equiv 5 \pmod{25}$$

故 $\dfrac{F_{5k}}{F_{5^{k-1}}}$ 不是 25 的倍數

3° 今 $F_{5^{k-1}}$ 不為 5^k 之倍數，而 $\dfrac{F_{5^k}}{F_{5^{k-1}}}$ 不是 25 的倍數，故 F_{5^k} 不是

5^{k+1} 之倍數，得證。

2.再證明：(1) $2^k \mid F_n \Rightarrow n = 3 \cdot 2^{k-2} \cdot \ell$

(2) $5^k \mid F_n \Rightarrow n = 5^k \cdot \ell$ （ $\ell \in N$ ）

pf：現先以特例引導，如欲證明 $2^4 \mid F_n \Rightarrow n = 12\ell$ （ $\ell \in N$ ），因 $2^4 \mid F_{12}$ 、 $2^5 \mid F_{24}$ ，故我們只要證明 $12 < n < 24$ 、 $2^4 \nmid F_n$ 即可，令 $n = 12 + r$ （ $0 < r < 12$ ），則由(六)得 $(F_{12+r}, F_{12}) = F_{(12+r, 12)}$ ，再令 $(12+r, 12) = d$ ，則 $d \mid 12$ ，且 $d < 12$ ，故 d 最大為 6 ，亦即 $(F_{12+r}, F_{12}) = F_d$ ，最大為 F_6 。∵ $F_6 = 8$ ，且 F_{12} 為 16 之倍數，故 F_{12+r} 非 16 之倍數，亦即在 F_{12} 與 F_{24} 間無 16 之倍數的項存在，當然 $n \geq 24$ 時，亦只有 $n = 12\ell$ ， $\ell \in N$ ， F_n 才為 16 之倍數囉！

一般而言，因 $2^k \mid F_{3\cdot 2^{k-2}}$, $2^{k+1} \mid F_{3\cdot 2^{k+1}}$ （ $k \geq 3$ ）則令 $n = 3 \cdot 2^{k-2} + r$ ， $0 < r < 3 \cdot 2^{k-2}$ ，且 $(3 \cdot 2^{k-2} + r, 3 \cdot 2^{k-2}) = d$ ，則 $(F_{3\cdot 2^{k-2}+r}, F_{3\cdot 2^{k-2}}) = F_{(3\cdot 2^{k-2}+r,\, 3\cdot 2^{k-2})} = F_d$ ，此中 $d \mid 3 \cdot 2^{k-2}$ 且 $d < 3 \cdot 2^{k-2}$ ，故 d 最大為 $3 \cdot 2^{k-3}$ ，亦即 Fd 最大為 $F_{3\cdot 2^{k-3}}$ ，因 $F_{3\cdot 2^{k-3}}$ 為 2^{k-1} 之倍數，且 $F_{3\cdot 2^{k-2}}$ 為 2^k 之倍數（由(九)之(1)知），故 $F_{3\cdot 2^{k-2}+r}$ 非 2^k 之倍數，此中 $0 < r < 3 \cdot 2^{k-2}$ ，當然 $n \geq 3 \cdot 2^{k-1}$ 時，亦只有 $n = 3 \cdot 2^{k-2} \cdot \ell$ ， $\ell \in N$ ， F_n 才是 2^k 倍數，∴得證(1)

同理可證 $5^k \mid F_n \Rightarrow n = 5^k \cdot \ell$ ($\ell \in N$)

(十一)經過如此一番功夫的探討後，我們立即可得 $10^k \mid (F_{3\cdot 2^{k-2}} \cdot F_{5^k})$ ，$k \geq 3$，又因 ($3 \cdot 2^{k-2}$ ，5^k) = 1 ，故由性質(七)知 $10^k \mid F_{3\cdot 2^{k-2}\cdot 5^k}$ ，由(十)知末位"恰"有k個"0"之項必爲 $F_{3\cdot 2^{k-2}\cdot 5^k\cdot \ell}$，$\ell \neq 10t$，$\ell$、$t \in N$，($k \geq 3$)。

三、結論

Fibonacci 數列中，末位恰有 1 個"0"爲 $F_{15\cdot \ell}$

末位恰有 2 個"0"爲 $F_{150\cdot m}$

末位恰有 k 個"0"爲 $F_{3\cdot 2^{k-2}\cdot 5^k\cdot \ell}$

(以上 $k \geq 3$ ，$\ell \neq 10t$ ，$m \neq 5t$ ，ℓ、m、$t \in N$)

四、參考資料

奇妙的數列　李恭晴譯

汝旭圖書有限公司

評語

1. 具有犀利的觀察力，能發現問題。
2. 思考細密，思路清晰。
3. 作品非常精巧完整，表達清楚中肯。
4. 在學術研究上有潛能。