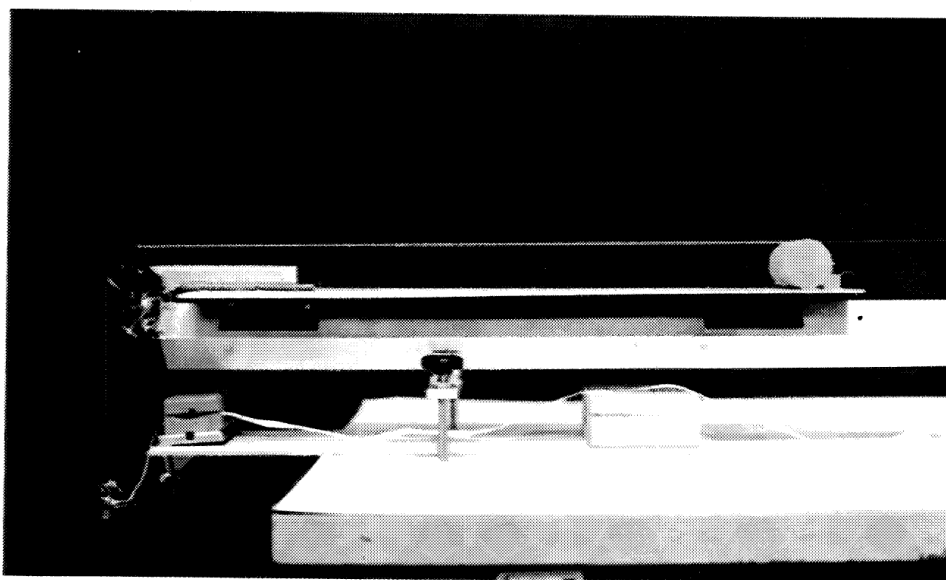


圓柱體作純滾動時的靜摩擦力的研究

高中組物理科第二名

省立嘉義女子高級中學

作者：潘品合、塗雅雯
陳桂榕、謝佩珊
指導教師：彭春南



一、研究動機

在做聯考題時發現有火車的啟動需要靠摩擦力的試題，在一般人的直覺中，摩擦力總會影響物體前進的速度，使其減慢，怎却反而幫助火車前進呢？這便激起我們研究的動機。

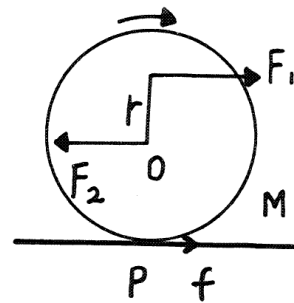
二、幾個假設的問題

- (一)圓柱體在作純滾動時有無受到滑動摩擦力？如果有，是靜摩擦力亦是動摩擦力？
- (二)沒有摩擦力，圓柱體能加速前進嗎？
- (三)摩擦力的方向與圓柱體前進的方向相同或相反？
- (四)摩擦力的大小和什麼有關？
- (五)腳踏車前輪所受的摩擦力方向和後輪所受摩擦力方向有無相同？

三、理論探討

(一)圓柱體作純滾動時，因它與地面接觸點P的瞬時速度為0，所以若圓柱體受到滑動摩擦力的話，應為靜摩擦力才對。

(二)如(圖1)在質量為M半徑為R之圓柱體上施力 F_1 和 F_2 ，使其在水平面上向右作純滾動時，則圓柱體所受到的靜摩擦力 f 可求得如下：



(圖1)

規定向右為x軸的正方向，且設靜摩擦力 f 的方向為右， A_c 為質心的加速度，根據質心運動定理可得：

$$F_1 + f - F_2 = MA_c \dots\dots\dots(1)$$

(三)以通過圓心的軸線為轉軸，規定垂直紙面向裏的方向為正， α 為輪的角加速度，由轉動定理得

$$F_1 r - f R = \frac{1}{2} MR^2 \alpha \dots\dots\dots(2)$$

在純滾動條件下，有

$$A_c = R\alpha \dots\dots\dots(3)$$

由(1)(2)(3)式即可得到：

$$\text{靜摩擦力 } f = \frac{2 \left(r - \frac{1}{2} R \right)}{3R} F_1 + \frac{1}{3} F_2 \dots\dots\dots(4)$$

$$\text{加速度 } A_c = \frac{2}{3M} \left(\frac{R+r}{R} F_1 - F_2 \right) \dots\dots\dots(5)$$

$$\text{角加速度 } \alpha = \frac{2}{3MR} \left(\frac{R+r}{R} F_1 - F_2 \right) \dots\dots\dots(6)$$

推論：

1.當 $F_1 = F_2 = 0$ 時，則 $f = 0$ ， $A_c = 0$ ， $\alpha = 0$

如：踩動自行車後即停止施力，自行車等速前進($A_c = 0$)，其前後輪均作等角速度轉動($\alpha = 0$)與地面的摩擦力為零。

2.當 $F_2 = 0$ ，且B在O點以上時，(4)(5)(6)分別變為：

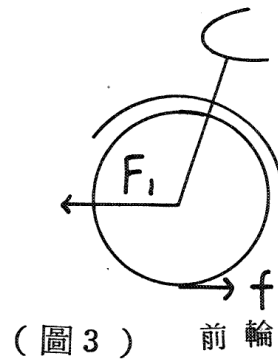
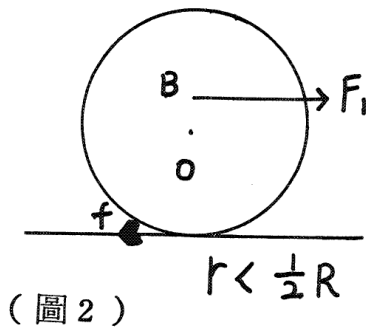
$$f = \frac{2 \left(r - \frac{1}{2}R \right)}{3R} F_1, \quad A_c = \frac{2}{3M} \cdot \frac{R+r}{R} F_1,$$

$$\alpha = \frac{2 \left(R+r \right)}{3MR^2} F_1$$

(1) 當 $r > \frac{1}{2}R$ 時， $f > 0$ 即靜摩擦力 f 與圓柱體前進的方向相同，且圓柱體加速前進。

(2) 當 $r = \frac{1}{2}R$ 時， $f = 0$ 即沒有摩擦力，圓柱體加速前進。

(3) 見(圖 2)，當 $r < \frac{1}{2}R$ 時， $f < 0$ 即靜摩擦力 f 與圓柱體前進的方向相反，但圓柱體仍加速前進(因 $F_1 > f$)。



3. 當 $F_2 = 0$ 且 $r = 0$ 時， $f = -\frac{1}{3}F_1$ ， $A_c = \frac{2}{3M}F_1$ ， $\alpha = \frac{2}{3MR}F_1$ ，

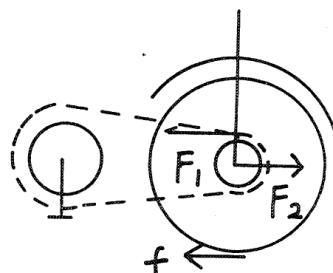
自行車前輪即屬於這種受力情況： $f < 0$ 表靜摩擦力的方向與輪前進的方向相反， F_1 則為前輪軸支架所施予前輪的力，見(圖 3)，前輪則加速前進。

4. 當 $F_1 = F_2$ 時， $f = \frac{2r}{3R}F_1$ ， $A_c = \frac{2r}{3MR}F_1 = \frac{F}{M}$ ，

$$\alpha = \frac{2r}{3MR^2}F_1 = \frac{f}{MR}$$

自行車後輪即屬於這種受力情況： $f > 0$ 表後輪所受摩擦力與輪前進方向相同，此時， F_1 為鍊條的施力， F_2 則為後輪軸支架的施力，以自行車為參考座標時，後輪軸上的轉動，小輪受此二力作用而沒有移動，故 $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ 但整個後輪所受合力為 $F_1 + f - F_2 = f =$ 靜摩擦力。所以後輪若

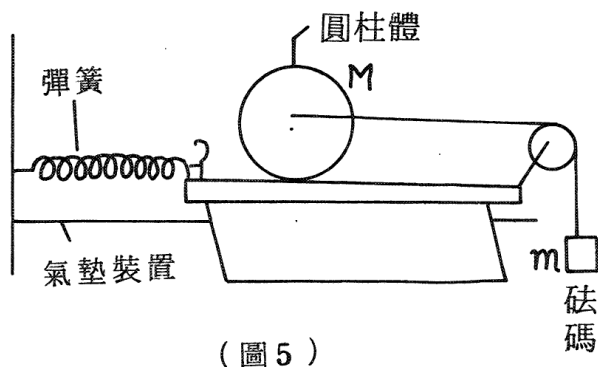
無向前的摩擦力 f ，則不會加速前進。



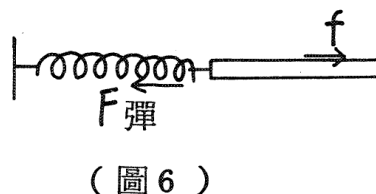
(圖 4) 後輪

四、實驗設計

(一)靜摩擦力 f 的直接測量：(見圖 5) 在氣墊軌道上置一木板，木板左端接連一彈簧，置圓柱體於木板上，以一細線纏繞圓柱體數週後，通過一定滑輪，再與一砝碼連接，圓柱體在木板上滾動時，若圓柱體底部有受到向左的靜摩擦力作用，由牛頓第三運動定律，則木板會受到向右的靜摩擦力作用，於是木板會向右移動(木板與氣墊軌道間無摩擦力)直至木板所受的彈力 $\vec{F}_{\text{彈}}$ 與靜摩擦力 \vec{f} 互相抵消為止，此時 $\vec{F}_{\text{彈}} = -\vec{f}$ ，木板即不再移動，見(圖 6)。
由彈簧之伸長量即可讀出 $F_{\text{彈}}$ 的大小，此亦即靜摩擦力的大小， $f = F_{\text{彈}}$ 。



(圖 5)



(圖 6)

(二)靜摩擦力的理論值 $f = \frac{2r - R}{3R} F_1$ 的測量：研究對象只限於「三推論 2」，

$F_2 = 0$ ， $f = \frac{2r - R}{3R} F_1$ 之情況。參考(圖 5)的裝置，根據砝碼的受力

情形可得

$$mg - F_1 = ma \quad \dots\dots\dots(7)$$

用打點計時器算出砝碼的加速度由(7)式得

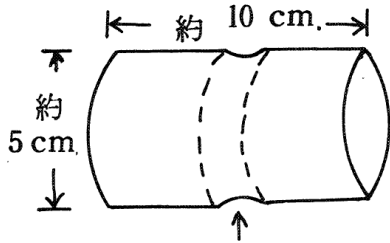
$$F_1 = m(g - a) \quad \dots\dots\dots(8)$$

所以靜摩擦力 f 的理論值為

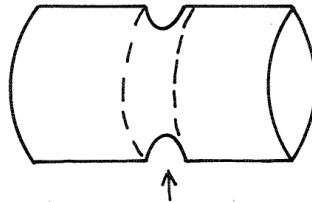
$$f = \frac{2r - R}{3R} F_1 = \frac{2r - R}{3R} m (g - a) \dots\dots\dots(9)$$

(三)三圓柱體的設計與原理

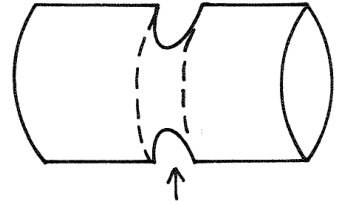
1.圓柱體的設計



(A) 凹槽有 0.15 cm 深



(B) 0.85 cm.



(C) 1.52 cm

2.三圓柱體的設計原理

(1)圓柱體 A : $R = 2.51 \text{ cm}$, $r = 2.35 \text{ cm}$, $r > \frac{1}{2}R$ 表推論 2 (1)之情形

(2)圓柱體 B : $R = 2.50 \text{ cm}$, $r = 1.65 \text{ cm}$, $r > \frac{1}{2}R$ 表推論 2 (1)之情形

(3)圓柱體 C : $R = 2.50 \text{ cm}$, $r = 0.98 \text{ cm}$, $r < \frac{1}{2}R$ 表推論 2 (3)之情形

五、實驗目的

藉前述靜摩擦力 f 的直接測量與拉力 F_1 的測量，來驗證「三理論探討」中的推論事項 1 與 2 的正確性，並藉此實驗結果圓滿解釋「三幾個假設問題」。

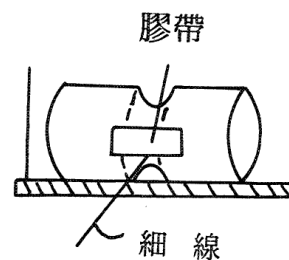
六、實驗器材

氣墊裝置、彈簧、滑輪、線、砝碼、木板 ($69 \text{ cm} \times 15 \text{ cm} \times 0.3 \text{ cm}$)、圓柱體 A . B . C、打點計時器、尺、水平儀。

七、實驗步驟

(一)測三圓柱體的最大靜摩擦

- 1.將膠帶固定在圓柱體上適當位置，且將細線在圓柱體槽溝上繞數圈，細線另一端連一彈簧秤，以水平力拉彈簧秤 (因膠帶的阻礙，故圓柱體不會轉



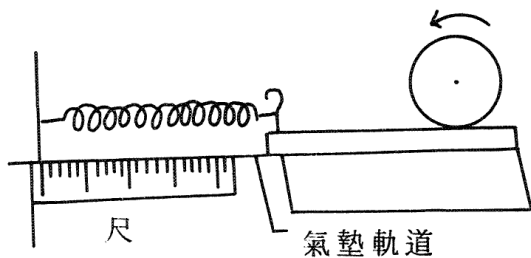
(圖 7)

動，只可能會移動)紀錄下使圓柱體由靜止而滑動所需的最小力，此即為圓柱體與木板間的最大靜摩擦力。

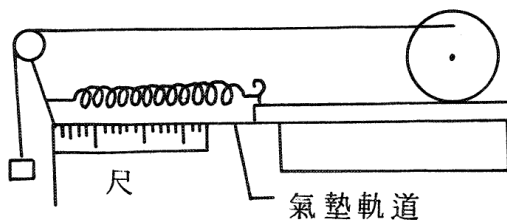
2.將砂紙貼在木板上，重覆 1.的步驟，可量得圓柱體與砂紙間的最大靜摩擦力。

(二)裝置如(圖 8)打開氣墊裝置，以手撥動圓柱體，使作純滾動，觀察彈簧伸長或壓縮，即可知圓柱體是否受到靜摩擦力作用。

(三)觀察三圓柱體受力滾動時之摩擦力方向。



(圖 8)



(圖 9)

1.裝置如圖

2.打開氣墊裝置，讓砝碼自由掉落。

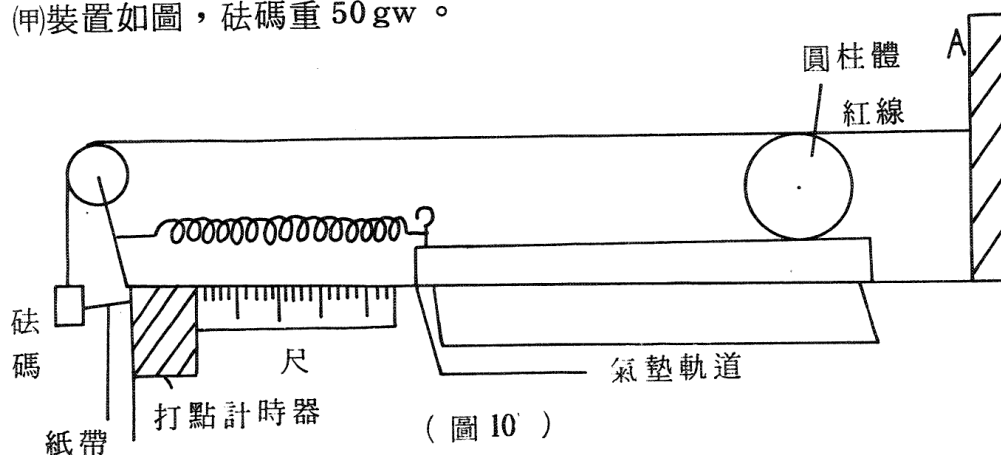
3.觀察彈簧被壓縮或伸長，可判斷摩擦力方向。

(四)測三圓柱體之靜摩擦

1.木板上沒有貼砂紙

(1)圓柱體 A

(甲)裝置如圖，砝碼重 50 gw。



(圖 10)

(乙)打開氣墊裝置甲看彈簧伸長量，乙將紙帶固定於砝碼上，並打開打點計時器，丙將紅線繞掉，甲、乙、丙同時進行。

(丙)由彈簧的伸長，再根據步驟(五)彈簧刻度之校正，可得靜摩擦力的直接

測量值；由紙帶可算得加速度，代入(11)式可得靜摩擦力的理論值。

(丁)砝碼改為 20 gw，重覆(甲)~(丙)之步驟。

(戊)圓柱體 A 換成圓柱體 B 砝碼改 100 gw，重覆(甲)~(丙)之步驟。

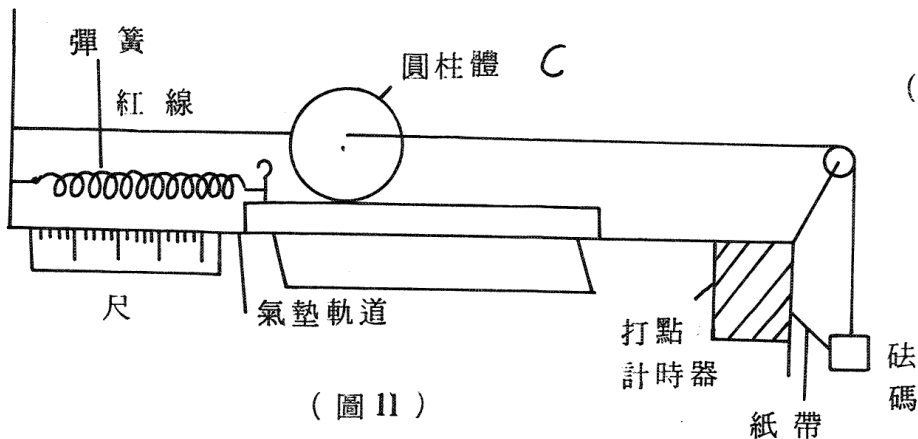
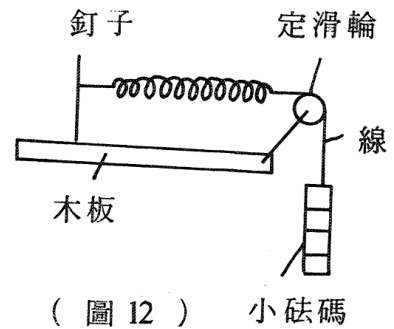
(己)砝碼改為 50 gw，重覆(乙)~(丙)之步驟。

(2)圓柱體 C

(甲)裝置如圖，砝碼重 100 gw。

(乙)同甲之步驟(乙)~(丙)。

(丙)砝碼改為 300 gw，重覆步驟(乙)~(丙)。



2. 將砂紙貼在木板上，重覆 1 中(1)(2)之步驟，以量取三圓柱體在砂紙上滾動的靜摩擦力。

(五)彈簧刻度之校正

1. 將彈簧置於木板上(使其摩擦狀況與(1)、(2)實驗狀況相同)如(圖 12)。

八、實驗結果

(一)三圓柱體與木板間的最大靜摩擦力(勺表沒有貼砂紙，文表有貼砂紙)。

(表 一)

圓柱體	A	B	C
勺	55	42	57
文	125	107	144

(二)彈簧沒有伸長亦沒有壓縮，表示靜摩擦力等於 0。

(三)三圓柱體受力滾動時之靜摩擦力方向。

(表二)

	彈簧的形變	靜摩擦力方向
圓柱體 A $r > \frac{1}{2}R$	伸 長	與圓柱體前進方向相同
圓柱體 B $r > \frac{1}{2}R$	伸 長	與圓柱體前進方向相同
圓柱體 C $r < \frac{1}{2}R$	壓 縮	與圓柱體前進方向相反

(四)三圓柱體受力滾動之靜摩擦力大小(勺表沒有貼砂紙，叉表有貼砂紙)

1.圓柱體 A ($r = 2.35 \text{ cm}$, $R = 2.51 \text{ cm}$)

(表三)

	砝碼質量(g)	靜摩擦力測量值	靜摩擦力理論值	百分誤差
勺	20	4.90 gw	4.52 gw	8 %
勺	50	6.05 gw	7.19 gw	16 %
叉	50	6.08 gw	7.50 gw	18 %

2.圓柱體 B ($r = 1.65 \text{ cm}$, $R = 2.50 \text{ cm}$)

(表四)

	砝碼質量(g)	靜摩擦力測量值	靜摩擦力理論值	百分誤差
勺	50	3.70 gw	3.29 gw	12 %
勺	100	5.65 gw	5.08 gw	11.2 %
叉	100	5.50 gw	4.67 gw	17.7 %

3.圓柱體 C ($r = 0.98 \text{ cm}$, $R = 2.50 \text{ cm}$)

(表五)

	砝碼質量(g)	靜摩擦力測量值	靜摩擦力理論值	百分誤差
勺	300	4.17 gw	4.01 gw	4.0 %
勺	100	3.15 gw	3.39 gw	7.0 %
叉	100	3.15 gw	3.28 gw	4.0 %

(五)彈簧刻度的校正：

(表 六)

伸長量 (cm)	0.3	0.6	0.9	1.0	1.3	1.6
重量 (gw)	3.15	4.17	5.50	5.65	6.05	6.53

九、討論

- (一)本實驗研究範圍主要包含：理論探討、實驗設計及公式驗證三部分。
- (二)使用氣墊，應注意氣墊是否水平；又打點計時器上的紙帶移動有少許摩擦力，可能會影響到加速度的量值。
- (三)因實驗中的靜摩擦力值很小，故需另外訂做靈敏度較大的彈簧。
- (四)特製的彈簧靈敏度較大，但因製造過程（技術）欠佳，故不呈線性關係，所以要作彈簧校訂刻度表。
- (五)圓柱體滾動時，所遭遇之靜摩擦力皆遠小於最大靜摩擦，所以皆為靜摩擦，且圓柱體不會有滑動情形產生，即都作純滾動。
- (六)由以下之分析，可進一步確信實驗中的所有摩擦力皆為靜摩擦力。
 - 1.圓柱體分別在木板上與砂紙上，受相同重量的砝碼拉動時，其所受的摩擦力皆相等。（見「八實驗結果」）
 - 2.圓柱體在木板上，受到不同重量的砝碼拉動時，其所受的摩擦力大小不同。
- (七)由圓柱體與砝碼之位移大小，亦可證明圓柱體作純滾動。

1.原理

在前述實驗中，圓柱體由靜止而被砝碼拉動後，量得圓柱體的位移為 d ，砝碼的位移為 S ，設圓柱體作純滾動，則

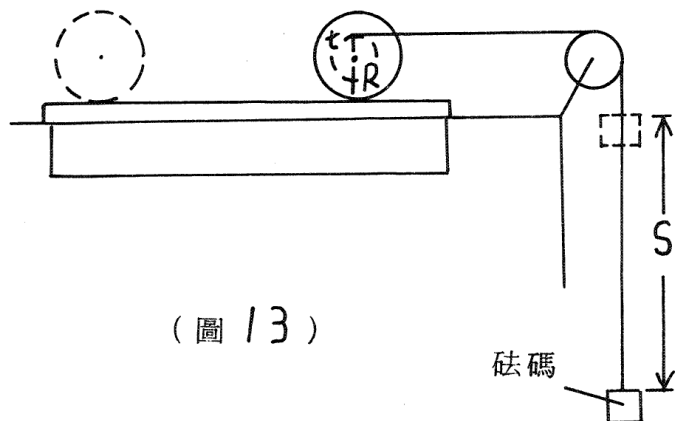
$$d = 2\pi RK \dots\dots(1)$$

$$S = 2\pi (R + r) K \dots\dots(2)$$

$$\frac{(2)-(1)}{(1)} \quad \frac{S - d}{d} = \frac{r}{R} \dots\dots(3)$$

今分別測 r 、 R 、 S 、 d 代入(3)式，若成立，則表圓柱體作純滾動。

2.實驗結果：



(圖 13)

(表 六)

	測量值 (gw)	相差百分率
圓柱體 A (砝碼 50 gw)	$\frac{s-d}{d} = 0.938$ $\frac{r}{R} = 0.929$	1.0 %
圓柱體 B (砝碼 100 gw)	$\frac{s-d}{d} = 0.647$ $\frac{r}{R} = 0.657$	1.5 %
圓柱體 C (砝碼 300 gw)	$\frac{s-d}{d} = 0.405$ $\frac{r}{R} = 0.395$	2.5 %

分析：由上表知，相差百分率甚小，故 $\frac{s-d}{d} = \frac{r}{R}$ 的關係成立，可知本實驗

中，圓柱體皆作純滾動。

(v) 本實驗所研究者，為圓柱體純滾動時的靜摩擦，而非滾動摩擦。

(vi) 因圓柱體與木板均類似剛體，故可忽略滾動摩擦。

十、結論

(一) 圓柱體不受外力作用作純滾動且等速前進時，摩擦力為 0。

(二) 圓柱體純滾動時，若受摩擦力作用，應為靜摩擦力才對。

(三) 火車或腳踏車後輪加速前進時，須依賴輪與地面間的靜摩擦力，此時摩擦力的方向與輪前進方向相同。

(四) 腳踏車加速前進時，前輪所受靜摩擦力方向與輪前進方向相反。

(五) 「三理論探討」中推論 2. 當 $F_2 = 0$ ， $f = \frac{2r-R}{3R} F_1$ 之公式，經實驗驗證

為正確。

(六) 圓柱體純滾動時的靜摩擦力是很複雜的，靜摩擦力的大小與方向，須視外力

之大小與位置而定，因 $f = \frac{2r-R}{3R} F_1 + \frac{1}{3} F_2$ ，即使同一個外力，因作用

點不同，靜摩擦力的大小與方向都可能不同。

十一、參考資料

(一) 高中物理學

吳友仁

東華書局

(二) 大學物理學解題方法

許榮發

豪華圖書有限公司

(三) 漫談摩擦

鄭振東

建宏出版社

(四) 應用力學

(五) Introduction to Theoretical
Mechanics

呂 謹 正中書局

Becker 東亞書局

評語

應用改裝空氣氣墊之基本裝置直接測量圓柱體作純滾動時的靜摩擦力之構思頗富創意。進而對該靜摩擦力之方向及其大小的影響因素分析、實證操作皆頗深入，能夠達成本作品的研究目的，唯就量化精確性言，實驗週延性的考慮可再加強。