

# 圓錐藏寶

## 高小組數學科第三名

台北市中山國民小學

作者：黃暄文、徐聖俠

鄭宇庭、蕭聖倫

指導教師：陳正芬

### 一、研究動機：

在五年級時，我們曾到過國立自然科學博物館內參觀，在地下樓『數與形』單元展示區中，有一壓克力罩下，擺了個圓錐，錐旁畫了一些奇形怪狀的圖案，當我們從圓錐鏡的頂端看下去時，圓錐鏡上竟出現了一匹白馬，大家都覺得很奇怪，想知道它是如何畫成的？

### 二、研究目地：

(一)找出圓錐鏡下奇怪圖案的畫法。

1. 找出鏡面傾斜角度與水平面上可畫圖位置間的關係。
2. 用什麼材料來做實驗圓錐最合適？
3. 找出圓錐鏡上圖案與水平面畫圖位置的關係。

(二)用實驗出的水平座標來畫圖。

1. 幾何圖形
2. 不規則圖形
3. 找出八種作圖方法

(三)利用鏡子反射原理及變形畫圖法，設計出有趣的遊戲。

遊戲名稱：圓錐藏寶

### 三、研究器材：

鏡片、鋼製圓錐、圓規、分規、直角三角板、直尺、定規、方眼紙。

### 四、研究經過：

一開始我們曾經找過許多教人畫圖的書，並沒有那一本教人畫這種奇特的畫！我們想這種利用圓錐鏡反射成圖的畫圖法和鏡子及光有關。於是我們著手尋找鏡子及光的資料，將這些資料整理在資料簿內，並得知和這個研究有關的重要概念：『與鏡面垂直的假想線稱為法線，由物體至鏡面的光線稱為入射線，入射線與法線所成的夾角稱為入射角。由鏡面反射出的光線稱為反射線。由反射線與法線所成的夾角稱為反射角。入射角與反射角相等。』

接著我們就照既定的步驟著手研究：

(一)找出圓錐鏡下奇怪圖案的畫法：

#### 1. 找出鏡片傾斜角度與水平面上可畫圖位置間的關係

我們先訂做了寬6公分高5~20公分的鏡片，用膠帶固定在桌上，想知道鏡片在不同的傾斜度和高度時，從鏡裡看到水平面的畫圖位置有多廣。

這個實驗全憑目測，我們初步得到的結論是：

(1)鏡片傾斜 $45^\circ$ 時，可看到很遠的地方。

(2)鏡片傾斜 $80^\circ \sim 85^\circ$ 時，只看到一點水平面。

(3)鏡片傾斜 $60^\circ$ 時可看到的水平面約與鏡片同長。

(4)因為眼睛有錯覺，每人目測到的結果不同，但差異不大，既然我們知道，光在平滑的表面上，入射角=反射角，那麼我們應該可以用數學的作圖方法，把不同高度的鏡片傾斜不同的角度時，其水平面可畫圖的位置表示出來。

我們實際作圖後，並實測得到如下的結果：

〔結論〕

- (1)當鏡片垂直於桌面時，從上方看完全看不到水平面上的東西。
- (2)當鏡片傾斜 $45^\circ$ 時，光經過鏡片折射，與水平面平行，所以根本看不到水平面；傾斜 $45^\circ$ 以下時只能看到高空。
- (3)鏡片傾斜角度 $60^\circ$ 時，折射光與鏡片，水平面圍成的 $\triangle \text{ㄅㄆㄇ}$ 為等腰三角形， $\text{ㄅㄆ} = \text{ㄅㄇ}$ ，也就是說鏡片長 = 水平面畫圖位置的長。
- (4)不同高的鏡片在同一傾斜角度，其水平面畫圖位置呈現某種關係。
- (5)鏡片高度愈高所看到的水平面可畫圖的範圍愈大；鏡片高度愈低水平面可畫圖的範圍愈小。
- (6)鏡片傾斜角度愈小（但不小於 $45^\circ$ ），所看到的水平面可畫圖的範圍愈大。鏡片傾斜角度愈大（但不大於 $90^\circ$ ）所看到的水平面可畫圖的範圍愈小。

2. 用什麼材料來做實驗圓錐最合適？

由前項記錄已經知道圓錐側面與圓錐底相交的角度若在 $55^\circ \sim 70^\circ$ 時，最適合來畫圖，那麼我們要用什麼材料來做圓錐鏡呢？用玻璃鏡片又不能做圓錐的側面，那麼該用什麼做呢？我們用了四種材料，有的用紙做，有的用鋁箔做，有的用手拉胚但都失敗了，紙太軟不耐用，而鋁箔又不夠清楚，手拉胚做的也不夠精準很容易損壞，最後才找出好方法，請鐵工廠用車床幫我們做了三個鋼製的圓錐。

3. 找出圓錐鏡上圖案與水平面畫圖位置的關係

我們原先訂做了底10cm高各是8，10，12cm的圓錐，可是拿回來一量，三個圓錐的底為11cm，高分別為8.5，10.6，12.6cm。

圓錐高度的測量法，先量出圓錐的半徑，也就是圖上的 $\text{ㄅㄆ}$ ，在 $\text{ㄆ}$ 點畫一條垂直線，以 $\text{ㄅ}$ 為圓心，圓錐側邊為半徑，畫一個弧，弧線與垂直線相交處，也就是圖上的 $\text{ㄇ}$ 點 $\text{ㄆㄆ}$ 之間的距離，就是圓錐的高。

我們看到的圓錐鏡上圖形的大小，就是圓錐的底面，我們將圓周分為32等分，圓的半徑則等分為八分，畫成一個座標。我們

稱這個座標為視覺座標，它是虛浮於空間的一個座標。視覺座標上的每一個點在水平面上都有一個對應點，根據作圖我們找出了這三個圓錐的畫圖座標。（詳細資料整理在資料簿內）

〔結論〕

- (1) 視覺座標上的每一點在畫圖座標也有一個對應點。
- (2) 一號錐較高，所以水平面畫圖位置較小，三號錐較低，所以水平面畫圖位置較大。

(二) 用實驗出的水平畫圖座標來畫幾何圖形。

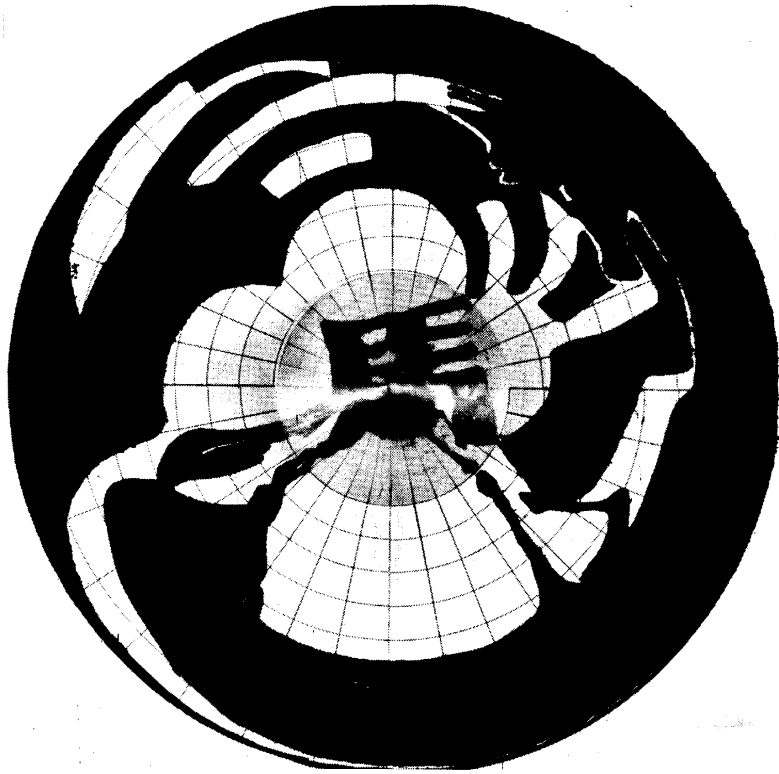
1. 我們首先將有規則的幾何圖形畫在視覺座標上，再利用作圖法，找出在畫圖座標上的對應點，並加以連接起來圖形變得滑稽極了，令人懷疑畫得是否正確，大家嘴裡念著阿彌陀佛，手拿著圓錐一照，哇！竟然成功了大家都興奮極了，又畫了其它一些也是怪里怪氣的圖形，但也成功了。

〔結論〕

- (1) 在視覺座標上本來是一條直線，但在畫圖座標上卻是曲線。
- (2) 視覺座標上的正方形，在畫圖座標上卻變成四朵花瓣的花。
- (3) 圓錐側邊和底面傾斜角為六十度時，視覺座標的半徑為畫圖座標半徑的三分之一。
- (4) 畫圖座標的面積是視覺座標的八倍。

## 2. 畫不規則圖形

嘗試過規則圖形的畫法後，大家還意猶未盡，還想畫些不規則形狀的圖，想想看它會變成什麼奇形怪狀。小叮噹成了我們的試驗品，我們先把它畫在視覺座標上，再利用作圖法找出在畫圖座標上的對應點，並加以連接起來，『哎呀！古今中外大概沒有比這更醜的小叮噹了。』大家小心翼翼的把圓錐放下去，成功了！成功了！終於成功了！大家似乎打了興奮劑，原本灰頭土臉的我們，眼睛露出無限光彩，又畫了幾副圖，下面就是我們的一部分作品：



〔結論〕

(1)視覺座標上轉變成畫圖座標時，圖案會被拉的長長的，並且小圓形會變成橢圓形，直線成彎曲的線，形狀與原圖有十萬八千里之差。

(2)在視覺座標上的圖案越靠近圖心，在畫圖座標上變化越大。

3. 找出八種作圖方法

我們整理幾何圖形時，發現徐聖俠作圖的方法和我們不一樣，但答案卻是正確的，於是我們接著來研究到底有幾種畫圖方法，我們研究出來的有：

(1)取左線，左線應畫左

↘. 取 $\overline{AB}$ 畫 $\overline{HD}$

H為圓心

↘. 取 $\overline{JF}$

□. J出

(2)取左線，右差應畫右

↘. 取 $\overline{AB}$ 畫 $\overline{HD}$

H為圓心

↘. 取 $\overline{FI}$

□. I進

(3)取右線，左差應畫右

↘. 取 $\overline{AB}$ 畫 $\overline{DG}$

G為圓心

↘. 取 $\overline{JF}$

□. I進

(4)取右線，右線應畫左

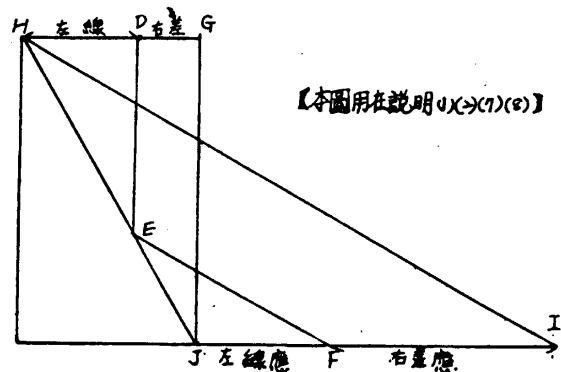
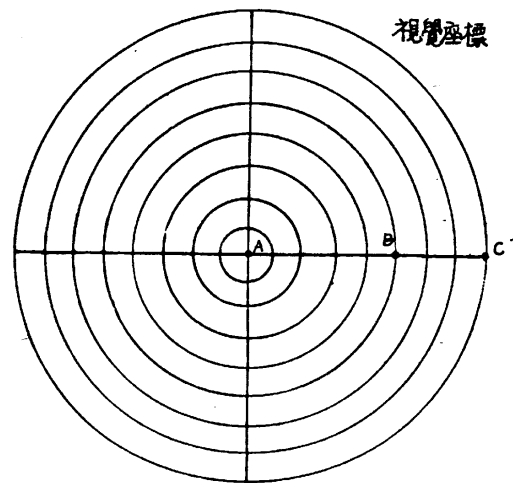
↘. 取 $\overline{AB}$ 畫 $\overline{DG}$

G為圓心

↘. 取 $\overline{FI}$

□. J出

(5)取左差，左差應畫右



勺.取 $\overline{BC}$ 畫 $\overline{HD}$

H為圓心

夕.取 $\overline{JF}$

□.I進

(6)取左差，右線應畫左

勺.取 $\overline{BC}$ 畫 $\overline{HD}$

H為圓心

夕.取 $\overline{FI}$

□.J出

(7)取右差，左線應畫左

勺.取 $\overline{BC}$ 畫 $\overline{DG}$

G為圓心

夕.取 $\overline{JI}$

□.J出

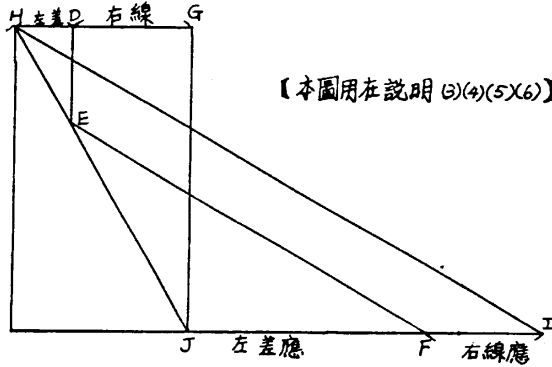
(8)取右差，右差應畫右

勺.取 $\overline{BC}$ 畫 $\overline{DG}$

G為圓心

夕.取 $\overline{FI}$

□.I進



[證明]

$$\because \overline{ZV} = \overline{AB}、\overline{ZV} = \overline{CD}$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{CD}$$

$$\therefore \overline{MG} = \overline{KL}、\angle 1 = \angle 2$$

$$\because \overline{BL} \perp \overline{AD}、\overline{CM} \perp \overline{AD}$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4$$

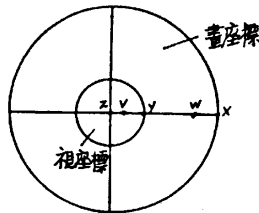
$$\therefore \triangle FGM = \triangle EAB$$

$$\therefore \overline{AE} = \overline{GF}$$

$$\therefore \angle 5 = \angle 6、\angle 6 = \angle 7$$

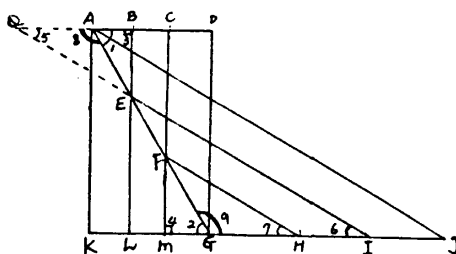
$$\therefore \angle 5 = \angle 7$$

$$\therefore \angle 8 = \angle 9$$



已知  $\overline{WX} = \overline{GH}$   
 $\overline{WY} = \overline{GI}$   
 $\overline{ZV} = \overline{AB}$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle AQE &= \triangle GFH \\ \therefore \overline{AQ} &= \overline{IJ} \\ \therefore \overline{AQ} &= \overline{GH} \\ \therefore \overline{IJ} &= \overline{GH} \\ \therefore \overline{WX} &= \overline{GH} \\ \therefore \overline{WX} &= \overline{IJ} \\ \therefore \overline{GI} &= \overline{HJ}, \overline{WY} = \overline{GI} \\ \therefore \overline{WY} &= \overline{HJ} \end{aligned}$$



(三)利用鏡子反射原理及變形畫圖法設計有趣的遊戲：

經由實驗，利用座標，我們找到了圓錐鏡旁奇怪圖形的繪圖方法，真是高興極了，以為這多月來的辛苦要結束了。

可是老師卻不那麼想，他覺得我們只跟了前人的脚步，並沒有突破，而要我們再動腦筋。有一段時間我們腦子一片空白，有一天，同組的唯一女生照穿衣鏡獲得靈感，事情才有了進展。

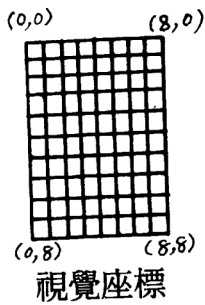
“山不轉，路轉，路不轉，人轉”前面實驗鏡片傾斜角度時，人就從正上方往下看，如果改變看的位置，再利用鏡子的傾斜，不是又可創出很多不同的畫法嗎？

於是我們將鏡片朝水平面逐次傾斜，人從鏡片正前方看，不同的傾斜角度，可照到之水平面距離，就不相同，我們以作圖的方式將這些變化記錄整理在資料簿內，並利用我們實驗所獲得鏡子的有關知識，再加上圓錐鏡的趣味繪圖法，設計了一系列有趣的遊戲。我們把這遊戲，訂名為“圓錐藏寶”。

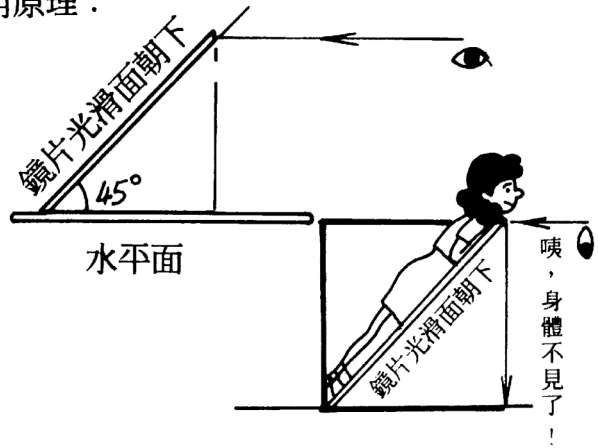
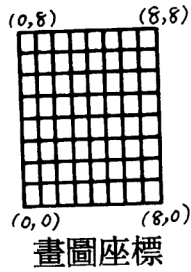
內容簡介：

1. 寶盒藏嬌：利用鏡子傾斜的變化，進入寶盒內的嬌娃，身體不見了，變形了。
2. 圓錐迷宮：利用圓錐鏡曲折圖形魔術，讓你玩迷宮。
3. 圓錐藏寶圖：我們將藏寶圖分成十六片，並從我們的研究裡出了十六個題目，答對一題給一塊藏寶圖，拼成後就過關了。





### 1. 寶盒藏嬌應用原理：



寶盒藏嬌內圖形之變化，及視覺座標，畫圖座標之對應資料整理在資料簿內。

## 五、總結：

- 經由實驗，我們找出了八種作圖方法，依作圖的特性訂名為：
 

|             |             |
|-------------|-------------|
| (1)取左線左線應畫右 | (5)取左差左差應畫右 |
| (2)取左線右差應畫右 | (6)取左差右線應畫左 |
| (3)取右線左差應畫右 | (7)取右差左線應畫左 |
| (4)取右線右線應畫左 | (8)取右差右差應畫右 |
- 利用上述作圖法畫出一系列和座標、方位有關的作品：(1)十二生肖(2)孫悟空和豬八戒(3)中華之光
- 利用實驗所得到的原理原則設計三個有趣的遊戲。
- 我們把前面所收集的資料、實驗及繪圖資料，全部整理於八本資料簿內。

## 評語

- 問題來自美勞活動。
- 對此現象的數學內涵有明確的闡釋。
- 活動週延，豐富。