$1/60=\frac{1}{甲}+\frac{1}{乙}$ 有多少解答

高小組數學科第二名

高雄市凱旋國民小學

作　　者：趙心瑩、劉懿慧
莊珮吟

指導教師：林麗惠、張進安

一、研究動機：

寒假作業中，有一個題目：

已知1/ 4＝（1/ 甲）＋（1/ 乙），其中甲是比乙小的整數，求甲和乙。

我的答案是1/ 4＝（1/ 5）＋（1/ 20），也就是甲＝5，乙＝20，心瑩的答案卻是甲＝6，乙＝12。驗算起來，兩個人都沒有錯。於是我們一起去請教老師。

來的。原題目是1/ 3＝(1/ A)＋(1/ B)，A和B是不等的整數。查答案，只有：A＝4，B＝12。也就是1/ 3＝(1/ 4)＋(1/ 12)，而沒有其他答案了。我們都覺得，這個題目和原數的分母有很大的關係。就在老師的指導下，進行更深入的研究。

二、研究目的：（確定題目）

我們把這個問題先做了許多改變，再用各種方法找出答案，才確定我們要研究的主題是：若甲是個自然數，把1/ 甲拆成（1/ 乙）＋（1/ 丙）的形式，其中乙＜丙，共有多少組解答。是不是有簡單，可靠又完整的方法可求得答案。（因為（1/ 乙）＋（1/ 丙）＝（1

／丙）＋（1/ 乙），所以本研究規定前項大於後項，以免混淆。）

三、研究方法：

分析、驗算、歸納：

㈠分析問題，確定乙、丙的範圍。

㈡分工合作，由小至大，一一試驗。

㈢在不重複，不遺漏的原則下，分析各組解答的乙，與題目中分母的相互關係。

㈣在既有的經驗下，大膽假設，仔細求證，尋找最簡單，最可靠最完整的方法，求得結論。

四、研究過程與結果：

㈠初步分析：

1.因為分子相同時，分母較小的，分數的值較大，所以，當1／甲＝（1/ 乙）＋（1/ 丙）時，乙必定比甲大。

又因為1/ 甲＝［1/（甲×乙）］＋［1/（甲×乙）］，而且乙小於丙，所以乙必定小於甲×2。

因此，乙的範圍，在甲＋1到甲×2－1之間。

2.如果乙確定了，則：

1/ 丙＝（1/ 甲）－（1/ 乙）＝［乙/（甲×乙）］－［甲/（甲×乙）］＝（乙－甲）/（甲×乙）

只要乙－甲是甲×乙的因數，則：

（甲×乙）÷（乙－甲）＝丙

㈡分組由小到大一一試驗：（參考原計算草稿）

1/ 2＝（1/ 3）＋（1/ 6）　1/ 3＝（1/ 4）＋（1/ 12）

1/ 4＝（1/ 5）＋（1/ 20）＝（1/ 6）＋（1/ 12）

1/ 5＝（1/ 6）＋（1/ 30）　1/ 6＝（1/ 7）＋（1/ 42）＝（1/ 8）＋（1/ 24）＝（1/ 9）＋（1/ 18）＝（1/ 10）＋（1／15）

1／7＝(1／8)+(1／56)　　1／8＝(1／9)+(1／72)＝(1／10)+(1／40)＝(1／12)+(1／24)

1／9＝(1／10)+(1／90)＝(1／12)+(1／36)

1／10＝(1／11)+(1／110)＝(1／12)+(1／60)＝(1／14)+(1／35)＝(1／15)+(1／30)　　1／11＝(1／12)+(1／132)

1／12＝(1／13)+(1／156)＝(1／14)+(1／84)＝(1／15)+(1／60)＝(1／16)+(1／48)＝(1／18)+(1／36)＝(1／20)+(1／30)＝(1／21)+(1／28)

(1／13)＝(1／14)+(1／182)

1／14＝(1／15)+(1／210)＝(1／16)+(1／112)＝(1／18)+(1／63)＝(1／21)+(1／42)

1／15＝(1／16)+(1／240)＝(1／18)+(1／90)＝(1／20)+(1／60)＝(1／24)+(1／40)

1／16＝(1／17)+(1／282)＝(1／18)+(1／144)＝(1／20)+(1／80)＝(1／24)+(1／48)　　1／17＝(1／18)+(1／306)

1/ 18＝(1/ 19)+(1/ 342)＝(1/ 20)+(1/ 180)＝(1/ 21)+(1/ 126)＝(1/22)+(1／99)＝(1／24)+(1／72)＝(1／27)+(1／54)＝(1／30)+(1／45)

1／19＝(1／20)+(1／380)

1／20＝(1／21)+(1／420)＝(1／22)+(1／220)＝(1／24)+(1／120)＝(1/25)+(1／100)＝(1／28)+(1／70)＝(1／30)+(1／60)＝(1／36)+(1／45)

1／21＝(1／22)+(1／462)＝(1／24)+(1／168)＝(1／28)+(1／84)＝(1／30)+(1／70)

1／22＝(1／23)+(1／506)＝(1／24)+(1／264)＝(1／26)+(1／143)＝(1/33)+(1／66)　　1／23＝(1／24)+(1／552)

1／24＝(1／25)+(1／600)＝(1／26)+(1／312)＝(1／27)+(1／216)＝(1/28)+(1／168)＝(1／30)+(1／120)＝(1／32)+(1／72)＝(1／33)+(1／88)＝(1／36)+(1／72)＝(1／40)+(1／60)＝(1／42)+(1／56)

1／25＝(1／26)+(1／650)＝(1／30)+(1／150)

1／26＝(1／27)+(1／702)＝(1／28)+(1／364)＝(1／30)+(1／195)＝(1/39)+(1／78)

1／27＝(1／28)+(1／756)＝(1／30)+(1／270)＝(1／36)+(1／108)

1／28＝(1／29)＋(1／812)＝(1／30)＋(1／420)＝(1／32)＋(1／128)＝(1／35)＋(1／140)＝(1／36)＋(1／126)＝(1／42)＋(1／84)＝(1／44)＋(1／77)

1／29＝(1／30)＋(1／870)

1／30＝(1／31)＋(1／930)＝(1／32)＋(1／480)＝(1／33)＋(1／330)＝(1／34)＋(1／255)＝(1／35)＋(1／210)＝(1／36)＋(1／180)＝(1／39)＋(1／130)＝(1／40)＋(1／120)＝(1／42)＋(1／105)＝(1／45)＋(1／90)＝(1／48)＋(1／80)＝(1／50)＋(1／75)＝(1／55)＋(1／66)

其結果：

除了分母是1以外，每一分母至少都有一組解，但解的組數不一樣多，最多的是1/ 30，共有13組解。

(三)分析解與題目中分母的關係：

1.因為1/ 丙＝（1/ 甲）－（1/ 乙）＝（乙－甲）/ （甲×乙），只要乙－甲＝1，丙＝甲×乙，一定有解，即乙＝甲＋1，丙＝甲×（甲＋1）。

2.解的組數與分母的關係：

分母	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
組解	1	1	2	1	4	1	3	2	4	1	7	1	4	4	4	1	7	1

分母	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
組解	7	4	4	1	10	2	4	3	7	1	13

由上表可知：

只有一組解的，分母分別是2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,恰好是30以內的質數。

由此歸納結果：

①如果甲是質數，1/ 甲＝（1/ 乙）＋（1/ 丙）只有一組解。其中乙＝甲＋1，丙＝甲×（甲＋1）。

記得五年級開始學因數時，老師說過：

「一個整數除了本身以外的因數，都叫做真因數」。根

據這樣，質數只有一個真因數，所以有一組解。我們就大膽的下這樣的假設：

假設一：甲的真因數有幾個，1/ 甲＝（1/ 乙）＋（1/ 丙）的解就有幾個

驗證：這個假設除了適合質數以外，也適合於某些數，例如：4,8,9,16,25,27,但是對大部份的數來說，解的個數，都比真因子的個數來得多。但是對於4,8,9,16,25,27這些非質數。因為：

$4=2\times2=2^2$	而1／4有2組解
$8=2\times2\times2=2^3$	而1／8有3組解
$9=3\times3=3^2$	而1／9有2組解
$16=2\times2\times2\times2=2^4$	而1／16有4組解
$25=5\times5=5^5$	而1／25有2組解
$27=3\times3\times3=3^3$	而1／27有3組解

我們可以得到更進一步的結果：

②如果甲是某一質數的幾次方，1／甲就有幾組解。

㈣一個研究方法的突破

我們從第一個不滿足假設一（甲的真因數有幾個，1/ 甲＝（1/ 乙）＋（1/ 丙）的解就有幾組）的“6”來仔細分析。

6的真因數有1，2，3，而

1/ 6=（1/ 7）+（1/ 42）＝（1/ 8）＋（1/ 24）＝（1/ 9）＋（1/ 18）＝（1/ 10）＋（1/ 15）

似乎看不出有什麼相關，只好再退回原來的1/ 甲＝（1/ 乙）＋（1/ 丙），而乙的範圍是甲＜乙＜甲×2，也就是：

甲＋1≦乙≦甲×2－1

從已有的資料來看乙＝甲＋1，是一定有的一組解，而1恰好是任意整數的真因數，所以我們把乙的範圍改為甲＋1，甲＋2，甲＋3，……甲＋（甲－1），來研究，發現1/ 6＝（1/ 7）＋（1/ 42）＝（1/ 6+1）+(1／42)=（1/ 8）＋（1/ 24）＝（1/6+2）＋（1/ 24）＝（1/ 9）＋（1/ 18）＝（1/ 6+

3）+（1/ 18）=（1/ 10）+（1/ 15）=（1/　6+4）+（1/ 15）

於是我們又下了第二個假設

假設二：如果丁是甲的真因數，則乙=甲+丁必是1/ 甲=（1/ 乙）+（1/ 丙）的一組解。

驗證：因為1/ 甲=（1/ 甲+丁）+（1/ 丙）

所以1/ 丙=（1/ 甲）-（1/ 甲+丁）=（甲+丁）/［甲×（甲+丁）］-甲/［（甲+丁）×甲］=丁/［甲×（甲+丁）］因為丁是甲的因數，所以分子分母必可時約去丁，（設甲=丁×戊）則：

1/ 丙=丁/［丁×戊×（甲+丁）］=1/［戊×（甲+丁）］即丙=戊×（甲×丁）成為一組解。

因為這可以證實的。老師說過：能證明的才是結論。所以我們得到第一個結論：

結論一：如果丁是甲的真因數，則乙=甲+丁必是1／甲=1／乙+1／丙的一組解。

這個結論，可以涵蓋上述的歸納①和歸納②，算是更進一步了。但是對6而言，現在只剩下1/ 6=（1/ 10）+（1/ 15）=（1/　6+4）+（1/ 15）中的4，還得不到好的解釋。老師說：

結論一中，丁是甲的真因數，只是一個充分條件，不是必要條件，也就是說，我們還沒有將解答一網打盡，所以我們就針對這些不被結論一所包含的解答，再進行比對和分析：

分母	分母的真因子	非真因子的解（以丁而言）
6	1,2,3,	4
10	1,2,5,	4,
12	1,2,3,4,6	8,9,
14	1,2,7,	4,
15	1,3,5,	9,

18	1, 2, 3, 6, 9,	4, 12,
20	1, 2, 4, 5, 10,	8, 16
21	1, 3, 7,	9,
22	1, 2, 11,	4,
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12	9, 16, 18
26	1, 2, 13,	4,
28	1, 2, 4, 7, 14	8, 16,
30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15	4, 9, 12, 18, 20, 25

這些非真因子的解，看來都不是質數，而是真因子自乘或互乘的積，例如分母是6時，4＝2×2，我們先做檢驗：

1/ 6＝(1/6＋4) ＋(1/ 丙)

1/ 丙＝(1/ 6)－(1/6＋4) ＝4/ ［6×（6＋4）］＝(2×2)/［6×（6＋4）］＝1/ 15

果然能約成1／丙的型式，於是我們下了最重要的一個假設，因為如果這個假設成立，似乎所有問題都解決了。

假設三：如果丁和戊是甲的真因數，則可以知道

乙＝甲＋丁×戊必是1／甲＝1／乙＋1／丙的一組解。

驗證：因為1/ 甲＝(1/（甲＋丁×戊）)＋(1/ 丙)

所以1/ 丙＝(1/ 甲)－(1/（甲＋丁×戊）)＝(丁×戊)/［甲×（甲＋丁×戊）］

因為丁是甲的真因數，則甲＝丁×己

因為戊是甲的真因數，則甲＝戊×庚

因此1/ 丙＝(丁×戊)/［丁×己×（戊×庚＋丁×戊）］＝(丁×戊)/［丁×己×戊×（庚＋丁）］＝1/［己×（庚＋丁）］因為這裡的丁和戊是分開約分的。所以丁可以等於戊，因此，我們可以得到一個結論。

結論二：如果丁和戊是甲的真因數，丁可以等於戊，則乙＝甲＋丁×戊，必是1／(甲＝1)／(乙＋1)／丙的一組解。

因為我們要求的乙，必須小於甲×2，所以丁×戊必須小於甲，否則得出的丙將小於乙，則是1／乙＋1／丙＝1／丙＋1／乙的交換而已。

我們用結論一和結論二來檢驗甲≦120，以內的所有問題，都可以完全符合。

於是討論出下面的結論：

結論三：若丁是甲的真因數平方，或任意兩個真因數的乘積，則：（1/甲＋丁）＋［丁/甲×（甲＋丁）］是1/甲＝(1/乙)+(1/丙)的一組解，對於這個結論，老師仍說這只是充分條件，還要倒過來證明。如果[1/(甲＋丁)]+[丁/甲×（甲＋丁）]是1/甲＝(1/乙)+(1/丙)的一組解，則丁一定是甲的真因數或任意兩個真因數自乘或互乘仍小於甲的積。這個問題實在太難了，我們不知道從那裡著手，最後還是老師指導我們分成二部份來研究。

1.如果丁含有與甲互質的因數。

2.如果丁含有三個以上甲的真因數（包括戊×戊×戊，戊×戊×己，戊×己×庚，三種型式）且丁＜甲。

驗證１：如果丁含有與甲互質的因數（設丁＝庚×己，庚與甲互質）。由1/甲＝（1/甲+丁）＋［丁/甲×（甲+丁）］，我們只要證明丁/［甲×（甲＋丁）］不能約成1/丙型式，即丁不是甲×（甲＋丁）的因數，就可以了。

因為丁/［甲×（甲＋丁）］＝（庚×己）/［甲×（甲＋庚×己）］＝（庚×己）/（甲×甲＋甲×庚×己）則分母中甲×庚×己必為庚×己的倍數。而因甲與庚互質，則甲×甲也必與庚互質。所以（庚×己）/（甲×甲＋甲×庚×己）無法約成1/丙的型式。所以如果丁含有與甲互質的因數，則（1/甲＋丁）＋［丁/甲×（甲+丁）］必不是1/甲＝(1/乙)+(1/丙)的一組解。

驗證２：①如果乙＝戊×戊×己，且乙＜甲則戊×己為甲的真因數，視為戊×（戊×己）為二個真因數互乘積。

②如果乙＝戊×己×庚，且乙＜甲則戊×己或己×庚，或戊×庚均為甲的真因數，可視為二個真因數互乘積

③如果乙＝戊×戊×戊，且戊×戊不為甲的真因數，（如甲＝26，乙＝8，戊＝2）則乙/［甲×（甲＋乙）］＝(戊×戊×戊)／[甲×（甲＋戊×戊×戊）]＝(戊×戊×戊)／（甲×甲＋甲×戊×戊×戊）分母中甲×戊×戊×戊為戊×戊×戊之倍數，但甲×甲中，至多含有戊×戊的因子，故無法約成1/丙型式。

研究到這裡，總算大功告成，可以得到最後的結論。

五、結論

1／甲＝(1／乙)＋(1／丙)，乙＜丙的整數解，若丁是甲的真因數，或任意兩個真因數自乘或互乘仍小於甲的積，則乙＝甲＋丁，必是一組解。反過來說，若乙＝甲＋丁是1／甲＝(1／乙)＋(1／丙)的一組解，丁必是甲的真因數或任意兩個真因數自乘或互乘仍小於甲的積。

例題：求1／60＝(1／乙)＋(1／丙)的所有解。

解：60的真因數有：1 2 3 4 5 6 10 12 15 20 30

真因數自乘小於60的有：9 16 25 36（扣除重複的）

真因數互乘小於60的有：8 18 24 40 45 48 50

共有22個

1/60＝(1/60＋1)＋(1/3660)＝(1/60＋2)＋(1/1860)＝(1/60＋3)＋(1/1260)＝(1/60＋4)＋(1/960)＝(1/60＋5)＋(1/780)＝(1/60＋6)＋(1/660)＝(1/60＋8)＋(1/510)＝(1/60＋9)＋(1/460)＝(1/60＋10)＋(1/420)＝(1/60＋12)＋(1/360)＝(1/60＋15)＋(1/300)＝(1/60＋16)＋(1/285)＝(1/60＋18)＋(1/260)＝(1/60＋20)＋(1/240)＝(1/60＋24)＋(1/210)＝(1/60＋25)＋(1/204)＝(1/60＋30)＋(1/180)＝(1/60＋36)＋(1/160)＝(1/60＋40)＋1/150＝(1/60＋45)＋(1/140)＝(1/60＋48)＋(1/135)＝(1/60＋50)＋(1/132)

六、參考資料：

數學圈第23期

評語

1.問題來自一次解答的不唯一，相當自然。
2.解答的探求，從實例（2～100）中發現可以歸納的事實，雖然稍微困難，但學生可以瞭解應用。
3.有研究精神。
4.有教學價值。