

方塊奧秘大

高小組數學科第一名

台北縣興南國民小學

作者：譚國強、焦國恩
古孟軒、王家鴻
指導教師：張政義、林天國

一、研究動機

還沒放寒假前，常聽到同學說到「魔術方塊」的速度、難度使我非常好奇，便到電動場所一探究竟，看了之後便更下定決心，研究魔術方塊的奧秘。

二、研究目的

解出俄羅斯方塊奧秘，然後擴大到數學層面，最後了解方塊在三度空間內的變化，並向電腦挑戰。

三、研究設備器材

1. 電視 2. 電視遊樂器 3. 魔術方塊卡匣 4. 直尺 5. 筆 6. 方格紙

四、研究過程或方法

(一) 什麼是魔術方塊，它有什麼特別的地方呢？

到學校附近的電玩場調查，並了解魔術方塊。

(二) 我們能把魔術方塊填滿嗎？



1. 我們觀察方塊的變化，並計算他們的種類。
2. (1) 我們用電視遊樂器及魔術方塊卡匣在電視上研究。
(2) 我們用自製的魔術方塊紙板及在紙上畫出 $10 \times 20 = 200$ 格的底面圖形（底座）來試著填滿。

(三) 方塊的格式能使用三角形嗎？其他的形狀呢？

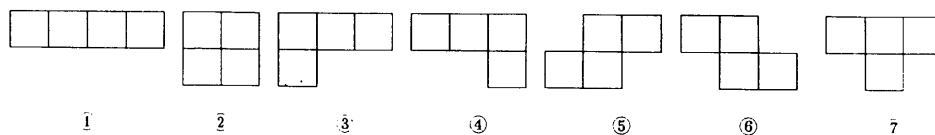
1. 用不同形狀的方塊試著填滿。
2. 不同的形狀有 ㄩ 直角等腰三角形 ㄨ 長方形 ㄩ 平行四邊形 ㄩ 等形 ㄨ 梯形 ㄨ 正五邊形 ㄨ 正六邊形 ㄨ 正八邊形 ㄩ 圓形 ㄨ 橢圓形。

3. 畫出層疊的情形，並和正方形加以比較。

(四) 子塊和子塊相互間的關係怎樣呢？

由研究中，我們發現單一子塊固定不旋轉時，只有“”及“”能填滿方格，所以我們認為要填滿方格必定和長方形、正方形等完整的圖形有關，而且和“4”的倍數有關，因此我們又做了下面的研究。

(1) 我們將研究2的圖形編號相互配合來觀察，找出可以成為矩形的圖形。



(2) 我們分相同及不同的圖形來配合。

(五) 方塊和底座格式相互間的關係怎樣呢？

1. (1) 我們以 $10 \times 20 = 200$ 格的底座格式來研究。
(2) 由第一行（直）開始，每次增加一行，直到第十行用十九種子塊圖形來填滿研究。
2. (1) 我們仍以 $10 \times 20 = 200$ 格的底座格式來研究。
(2) 由第一排（橫）開始，每次增加一排，直到第二排，用十九種子塊圖形來填滿研究。

(六) 矩形的方塊格式與變化有關嗎？

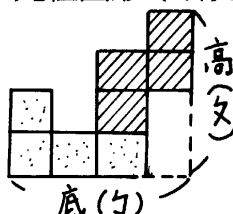
1. 分解方塊子塊與方塊底座格式來觀察。
2. (1)用2個至10個方格，以邊一邊的組成方式組成各種方塊子塊，並試行填滿底座。
(2)組合時以7種基本圖形為參考圖形。

塊數	2	3	5—10
組成圖形				圖略 (見記錄)

3. 以魔術方塊的七個基本圖形組成大的基本圖形來研究。
4. 我們用其他規則及不規則的多邊形來驗證大、小相似多邊形面積平方數的關係。

(七)我們的絕招！

1. 找出缺口的形成，並加以研究。
2. (1)我們用魔術方塊的十九種圖形（研究2）中的任意二種方塊進行組合。



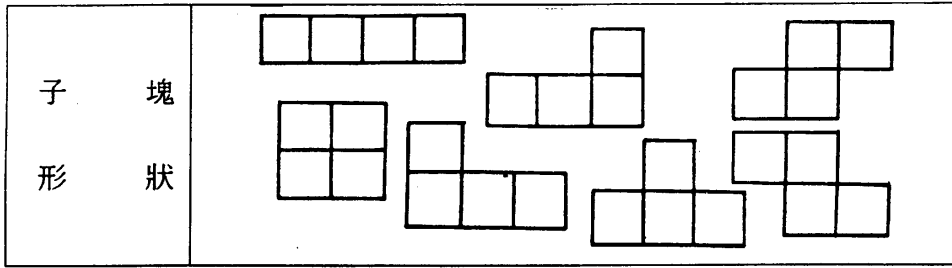
- (2)我們以兩子塊組合後的矩形範圍內，測知其底(η)、高(ξ)。如上圖
- (3)繪圖比較組合後的優劣情形。

五、實驗結果

(一)研究過程(一)的實驗結果：

1. 我們發現魔術方塊有三種：(1)俄羅斯方塊(2)日本方塊(3)超級魔術方塊。

2. 七種子塊如下：

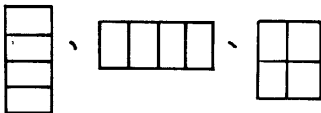


(二)研究過程(二)的實驗結果：

1. (1)子塊都由4個正方小格組成，有七種基本圖形。

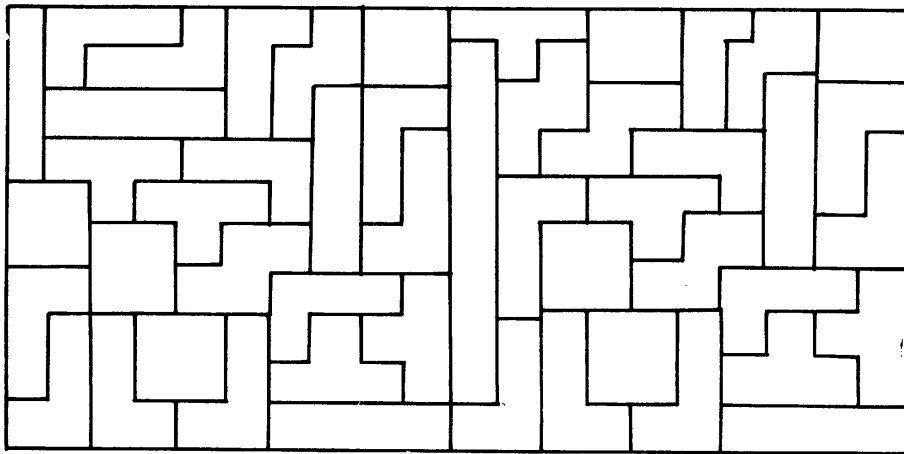
(2)子塊都分別有旋轉 90° 、 180° 、 270° 、 360° 的變化，包括基本圖形共有十九種的變化。

2. (1)我們發現用十九種的子塊混合運用，能填滿的情形很多。

(2)其中以  三種來使用最簡易，但變

化性最小。

(3)填滿的方塊圖形、形成各種變化的網路。



(三)研究過程(三)的實驗結果：

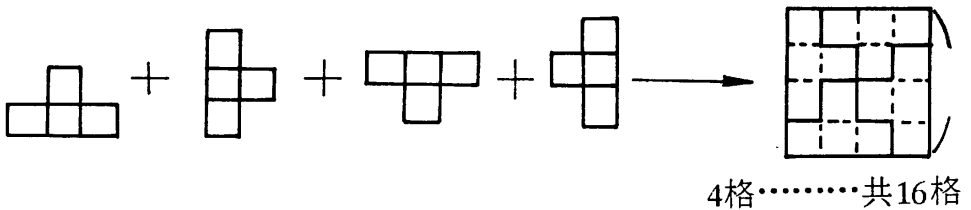
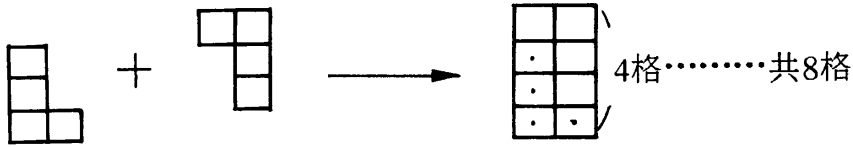
形 狀										
填 可 不 可	○	○	×	×	×	×	×	×	×	×
空 隙 形 狀	無	無								

1. 只有等腰直角三角形及長方形能填滿方格。
2. 其餘的形狀都無法填滿，並產生有規律性的空隙。
3. 其中正八邊形產生了正方形□的空隙，最引起我們注意，並了解角度的變化。

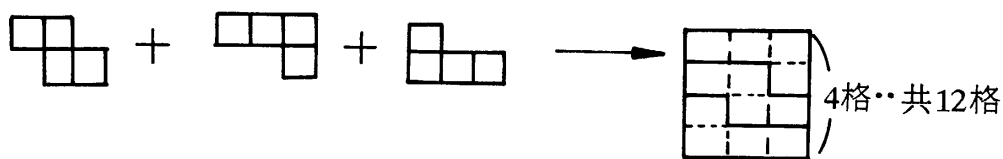
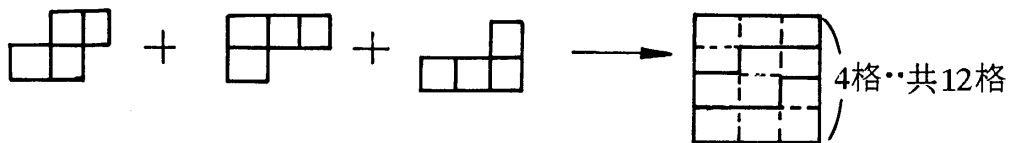
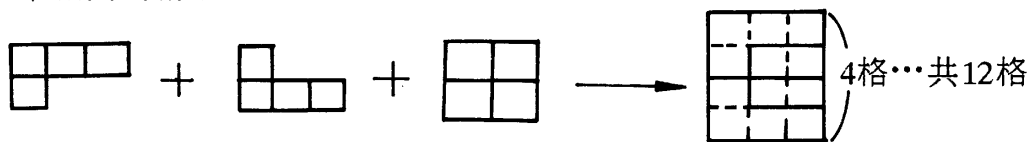
(四)研究過程(四)的實驗結果：

- (1)相同的除⑤⑥外，①②③④⑦都可組成矩形。
- (2)③④須有二塊，⑦須四塊組合，且都與4的倍數有關。

相同的情形



不相同的情形












(五)研究過程(五)的實驗結果：








1.(1)第一行至第十行，都能填滿。

(2)填滿所使用的方塊有限制。

ㄅ一行：

ㄆ二行：   

ㄇ三行~四行：    

ㄏ五行~十行：      

2.(1)我們發現單數排都無法填滿，且都缺少2格。

(2)雙數排都能填滿。

(3)各排方格用“4”來除都餘2，正好是單數排缺少的格數。

(六)研究過程(六)的實驗結果：

1.(1)子塊

ㄅ.方塊子塊皆由4個正方小格“□”組成，表面積均為“4”。

ㄆ.都用邊一邊的組成方式組成而無邊一點或點一點的方式組成。

(2)底座

- ㄎ. 亦均由小方格組成，組成方式亦為邊一邊。
- ㄌ. 可分成表面積為100的大方格2個，每個為 10^2 。

2. 可否填滿與方塊格數有關，與形狀無關，2、5、8、10格可填滿。

分析→在分解底座時，我們發現由1個方格至4個方格，(□→田)，4個方格至9個方格(田→田田) … 以至於100個方格，在表面積上有規則性的變化，因此我們循此探尋方塊子塊規律性的踪跡。

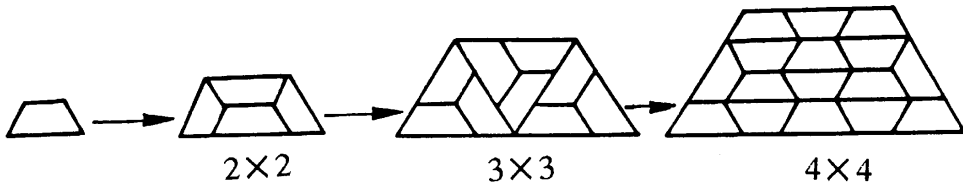
結果分類	2	3	5	6	7	8	9	10
底座格數	200	200	200	200	200	200	200	200
除	$200 \div 2$	$200 \div 3$	$200 \div 5$	$200 \div 6$	$200 \div 7$	$2000 \div 8$	$200 \div 9$	$200 \div 10$
商	100	66	40	33	28	25	22	20
餘	0	2	0	2	4	0	2	0
填滿可"✓" 不可"×"	✓	×	✓	×	×	✓	×	✓

3. 我們發現，一個大多邊形如果它的邊長為同形之小多邊形的2、3、4、5…倍，則其面積為小多邊形的4、9、16、25…倍，有平方的關係。所以，用小的多邊形來造大多邊形，其數目一定為一平方數。



$$\begin{array}{l}
 \text{邊長} < \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} & \text{邊長} < \begin{array}{l} 4 \\ 6 \end{array} & \begin{array}{l} 4 \div 2 = 2 \\ 6 \div 3 = 2 \\ 16 \div 4 = 4 \end{array} \\
 \text{表面積} 4 & \text{表面積} 16 & 4 = 2 \times 2 \text{ (平方數)}
 \end{array}$$

4. 其結果和上面相同，有“平方數”的關係（不一定是 2×2 ，可能是 3×3 或 4×4 或 5×5 ，……）



(七)研究過程(七)的實驗結果：

1. 開機80次，觀察七種方法出現的情形。

方塊							
合計	111	126	106	116	119	105	117

(1) 從觀察當中，覺得方塊的落下並沒有有一定的規則。

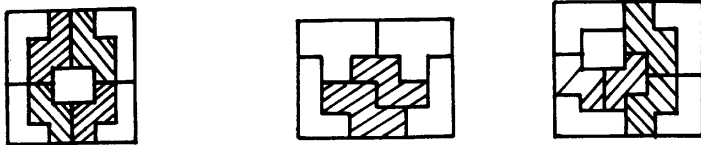
(2) 從圖表得知，方塊出現的機率大致相同。

(3) 在俄羅斯方塊的挑戰經驗中，以及研究過程(六)之(4)的結果知道，在七種方塊中的

這五種皆可用數個同樣的方塊拼成正方形或矩形，因此可以控制成無缺口。

(4) 但是在七種方塊中的另外兩種

不管如何拼湊，都無法成正方形或矩形，因此要用特殊方法的組合，使其缺口減到最低，如圖例：

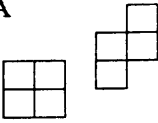
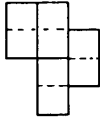
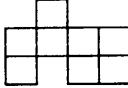
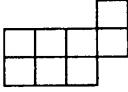
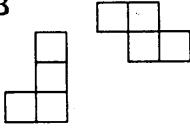
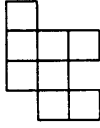
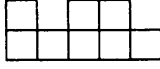



2. 我們發現，組合的子塊符合下列三特性，則組合的情況較佳。


(1) 底(ㄅ) \times 高(ㄆ) 的面積愈小愈好，如B. 丙優於B. 甲。

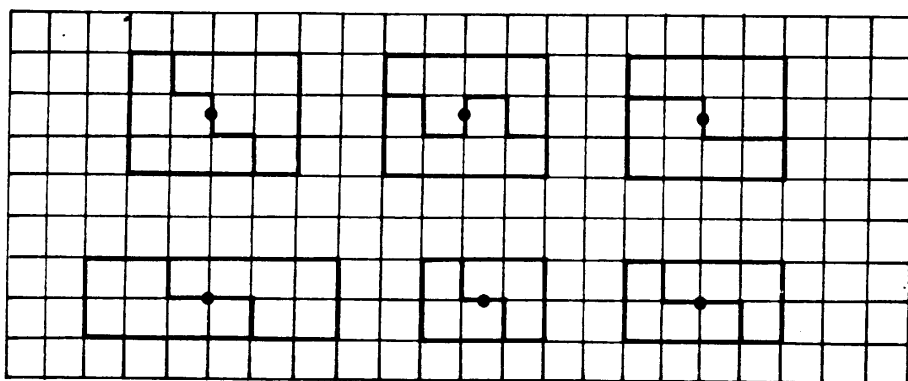
(2) 底(ㄅ) 實線部份愈長愈好，如丙. 乙優於甲。

(3) 底(ㄅ) 實線部份的線長，則連貫比不連貫的好。如A. 丙優於甲、乙。

組合 優劣 子塊形狀	甲	乙	丙
	劣"×"	中等"△"	優"○"
A 			
B 			

六、討論

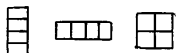
- (一)隨著科技的進步，電視遊樂器成為人們日常休閒活動的項目之中。雖然市場上電動玩具缺點很多，如：1.視力的傷害2.學業荒廢3.影響生活秩序4.浪費金錢5.習得不當行為和術語6.學習暴力。但是也有優點的一面，時間上、體力上、精神上控制得當，反而可以在日常生活中訓練反應，得到許多樂趣啟發腦力。
- (二)在本實驗中遺憾的是時間，速度的變因無法控制。像這種益智型的電動玩具值得推廣，使我們能在遊戲中學習。
- (三)在六上數學課程中，有關面積的計算。其形狀的邊長增加 n 倍時，其面積公式算法是 $n \times n$ 倍。在本實驗中，將課本經驗延伸，可以算出不規則的面積，即由小的多邊形面積，推算出相似大的多邊形面積，如房屋之預鑄、瓷磚、貼舖等。
- (四)在研究中我們發現分割矩形，求一個單位多邊形的好方法，就是將矩形上下左右等矩作“十”字分割，將十字中心點標示出來， 並依所需要做一個穿過中心點的階梯式凹刻的連線。



(五) 又因為我們可以隨時從矩形中做出正方形，所以可以經由找出
的單位多邊形做出正方形。

(六) 另外我們又發現圖也可適用“小多邊形和大多邊形”“面積”
增加成“平方數”的關係，然所不同的是所增加的是“半徑”
而不是邊長。

七、結論

魔術方塊可分俄羅斯方塊、日本方塊、超級方塊三種，且玩法也
不同、面積也不一樣。每次填滿方塊只有  比較容易填滿
空格，並且等腰三角形和長方形也可填滿。我們發現可否填滿空格和
格數有關，但和形狀無關。我們還證明了方塊互相配合，所產生的空
格比單一或兩個、三個相同方塊配合的空格還小；更可利用方塊組合
的原理，將課本探討的邊長與面積的倍數關係，從規則形狀延伸到不
規則的面積。

八、參考資料

(一) 電視遊樂器雜誌

(二) 智力測驗

(三) 六上數學課本

(四) 形與數 郭震唐

(五) 新一代兒童益智叢書 林得華

(六) 中華兒童百科全書 第八冊

評語

1. 問題從兒童經驗—俄羅斯方塊電動玩具—取出。
2. 探索非常完整。
3. 由操作和實驗來導出結論，符合小學數學的學習過程。
4. 探索的內容有創意。
5. 研究精神良好。
6. 有教學的價值。