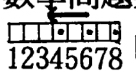
揭開謎底

初小組數學料第三名

嘉義縣成功國民小學　　作　　者：蔡坤佑、蔡維股
張志豪、張月嘒
指導教師：李春瑛、吳美姿

一、研究動機：

二十九屆科展，我們得了很好的成績後，學校送我們很多書，有幾本是數學遊戲的書，我很感興趣，也常常拿出來研究，其中「趣味數學問題集」第二八八條「如何贏」是讓我又怕又愛的題目：「在圖

的八個方格中，於4，6，8中放入三個棋子，甲、乙兩人輪流將棋子往左移，如果需要的話可以跳過一個或兩個棋子，但不得連跳，將最後一個棋子放入1格就贏了。甲總是贏得比賽，你是否能找出如何移動？」我和許多同學下過，但一直找不到必定贏的方法，而書後又沒有解答，只好去請老師幫忙，在老師的指導和同學的共同研究下，有了下面的結果。

二、研習目的

1. 能從簡單到複雜的研習中，找出這遊戲得勝的條件和方法，歸納出規律性。
2. 能從遊戲中，研究出完成整個遊戲要移動多少次？並求出計算公式。
3. 能從遊戲中培養細心和耐心的求學態度。

三、研習問題

1.只有一個棋子時，雙方得勝的情形如何？
2.有二個棋子時，雙方得勝的情形如何？
3.有三個棋子時，雙方得勝的情形如何？
4.完成整個遊戲要移動多少次才行？

四、研習過程

老師告訴我們三顆棋子同時在棋盤上移動，所形成的移動方式太複雜了，不如把問題簡化，從一個棋子開始研究起。

問題一：在只有一個棋子時，雙方得勝的情形怎樣？

〔過程一〕

我們把棋子從2格到8格一一加以實地操作後得到下表：

棋子位置	2	3	4	5	6	7	8
移動次數	1	2	3	4	5	6	7
得勝者	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲
備註	(一)甲先手移動棋子。 (二)進行方式請參考紀錄資料。						

〔討論〕：從上表，我們發現：

(一)棋子在偶數位時（2，4，6，8）先手甲得勝。
棋子在奇數位時（3，5，7，）後手乙得勝。

(二)移動奇數次時（1，3，5，7）先手（甲）得勝。
移動偶數次時（2，4，6，8）後手（乙）得勝。

問題二：當二個棋子時，雙方得勝的情形怎樣？

〔過程二〕

我們把一個棋子固定在第2格，另一個棋子放在第3格到第8格，經過一一的操作結果如下：

棋子位置	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8
移動方法	甲3↷1	甲4→3 乙3↷1	甲5→4 乙4→3 甲3↷1	甲6→5 乙5→4 甲4→3 乙3↷1	甲7→6 乙6→5 甲5→4 乙4→3 甲3↷1	甲8→7 乙7→6 甲6→5 乙5→4 甲4→3 乙3↷1
跳過次數	1	1	1	1	1	1
移動次數	1	2	3	4	5	6
得勝者	甲	乙	甲	乙	甲	乙
備註	→表示移動 ↷ 表示跳過					

〔發現〕：

㈠擺在第2格的第一顆棋子都沒移動，不然就違反了規定。

㈡最後一次都是從第3格跳到第1格（3↷1）。

㈢第二顆棋子擺在奇數位時，先手（甲）得勝。

第二顆棋子擺在偶數位時，後手（乙）得勝。

㈣移動了奇數次時，先手（甲）得勝。

移動了偶數次時。後手（乙）得勝。

〔過程三〕：

一個棋子在第3格另一個棋子則放在第4格到第8格，勝負的情形如何？經過了實際操作，結果得到下表：

棋子位置	3,4		3,5		3,6		3,7		3,8	
棋子移動方法	甲3→2 乙4→3 甲3↷1	×甲4↷2 乙3↷1	甲3→2 乙5→4 甲4→3 乙3↷1	甲5→4 ×乙4↷2 甲3↷1	甲3→2 乙6→5 甲5→4 乙4→3 甲3↷1	甲6→5 乙5→4 ×甲4↷2 乙3↷1	甲3→2 乙7→6 甲6→5 乙5→4 甲4→3 乙3↷1	甲7→6 乙6→5 甲5→4 ×乙4↷2 甲3↷1	甲3→2 乙8→7 甲7→6 乙6→5 甲5→4 乙4→3 甲3↷1	甲8→7 乙7→6 甲6→5 乙5→4 ×甲4↷2 乙3↷1
跳過棋子數	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
移動次數	3	2	4	3	5	4	6	5	7	6
得勝者	甲	乙	乙	甲	甲	乙	乙	甲	甲	乙
備註	一、×為反轉手，(使對方反敗為勝)。 二、每種棋形，只舉兩種移種方法，其餘請參看附件。									

〔發現〕

(一)最後一次移動方式也是由3跳到1（$3\curvearrowright 1$）。

(二)第二顆棋子在偶數位時，甲只要先把第一顆棋子由3→2必勝，甲如果先移動第二顆棋子只要沒下出反轉手（$4\curvearrowright 2$）則甲勝。

(三)第二顆棋子在奇數位時，如果後手（乙）沒有下出反轉手（$4\curvearrowright 2$）則乙勝。

(四)反轉手總是以跳的方式在$4\curvearrowright 2$出現。

(五)移動奇數次時，先手（甲）得勝。移動偶數次時，後手（乙）得勝。這種情形和過程一、二相同。

〔過程四〕：其餘有關二個棋子的勝負情形怎樣？

(一)棋形是（4，□）時

棋子位置	4,5		☆	4,6			4,7		☆	4,8		
跳的棋步	甲$3\curvearrowright 1$	×甲$5\curvearrowright 3$ 乙$3\curvearrowright 1$	×甲$5\curvearrowright 3$ ×乙$4\curvearrowright 2$ 甲$3\curvearrowright 1$	乙$3\curvearrowright 1$	×乙$4\curvearrowright 2$ 甲$3\curvearrowright 1$	×乙$5\curvearrowright 3$ ×甲$4\curvearrowright 2$ 乙$3\curvearrowright 1$	甲$3\curvearrowright 1$	×甲$5\curvearrowright 3$ 乙$3\curvearrowright 1$	×甲$5\curvearrowright 3$ ×乙$4\curvearrowright 2$ 甲$3\curvearrowright 1$	乙$3\curvearrowright 1$	×乙$4\curvearrowright 2$ ×甲$3\curvearrowright 1$	×乙$5\curvearrowright 3$ ×甲$4\curvearrowright 2$ 乙$3\curvearrowright 1$
跳過次數	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
移動次數	5	4	3	6	5	4	7	6	5	8	7	6
得勝者	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙
備註	一.☆表示先手握致勝手。 二.只寫出跳過的棋步，其餘省略。 三.除了$3\curvearrowright 1$以外，其餘跳的棋步都是反轉手。											

(二)棋形是（5，□），（6，□）和（7，8）省略

〔發現〕

(一)最後一次移動仍是$3\curvearrowright 1$。

(二)兩顆棋子在（奇，偶）位或（偶奇）位數，先手（甲）掌握第一次跳的權利，如果兩顆棋子在（奇，奇）或（偶，偶）位時，則後手（乙）掌握第一次跳的權利。

(三)棋子位在（奇，偶）位或（偶，奇）位時，先手若沒下錯應可勝利，反之棋子在（奇，奇）或（偶，偶）位時，後手若沒下錯應可勝利。

(四)除了$3\curvearrowright 1$外，其餘跳的棋步都是錯的，都會使對方反敗為

勝。

㈤移動奇數次時，甲得勝。移動偶數次時，乙得勝。

〔討論〕

兩顆棋子所在位置的不同，經過我們一一操作，列表探討後，很快的就能把握致勝的要點：

㈠在未動手前，棋子所放的位置就已經決定勝負了。

㈡兩顆棋子位在（奇，偶）或（偶，奇）時，先手儘量先把第一顆棋子移到2格，把第一次跳的權利留到$3 \curvearrowright 1$，則穩贏。

㈢兩顆棋子在（奇，奇）或（偶，偶）時，是後手（乙）有利。先手（甲）如果想贏只有先移動第二顆棋子，設法讓兩顆棋子能靠在一起，如果後手（乙）不小心下了反轉手，甲才有贏的機會，〔例如：棋形是（4，6）甲先下6→5，成為（4，5）後手（乙）如下了反轉手（$5 \curvearrowright 3$），形成（3，4）時變成先手（甲）有利〕，這時先手不可再跳，而應照㈡所述移動3→2，保留下次跳$3 \curvearrowright 1$的機會。

㈣跳的次數奇數次時，勝負情形沒有變更。

跳的次數偶數次時，勝負情形反轉。

㈤除了$3 \curvearrowright 1$以外，所有可跳的機會都是錯誤的，都不要去跳。

問題三：有三顆棋子時，雙方得勝的情形怎樣？

〔過程五〕：我們把一個棋子固定在2，第二個棋子由3到7，第三個棋子由4到8，分別組成不同棋形來探討。得到下面結果：

〔甲〕（2，3，□）

棋子位置	☆ 2,3,4	2,3,5	☆ 2,3,6	2,3,7	☆ 2,3,8
移動方法	甲4②1	甲5→4 乙4②1	甲6→5 乙5→4 甲4②1	甲7→6 乙6→5 甲5→4 乙4①1	甲8→7 乙7→6 甲6→5 乙5→4 甲4②1
跳過次數	1	1	1	1	1
移動次數	1	2	3	4	5
得勝者	甲	乙	甲	乙	甲
備　　註	(一)☆者表示先手必勝。 (二)4②1 一次跳過2 個棋子。				

〔乙〕（2，4，□）（2，5，□）（2，6，□）（2，7，8）省略

〔過程六〕

一顆棋子固定在3，第二顆棋子由4～7，第三顆棋子由5～8的情形。〔移動過程省略〕

〔討論〕：作完三個棋子的研究後，我們得到：

(一)最後一次移動方式都是4②1，一次跳過兩個棋子。

(二)三個棋子連在一起時，先手甲都可得勝。

(三)跳過一個棋子時，勝負情形會反轉，如棋形是（3，4，5）時，位置數和是「偶數」對先手甲不利，但甲下4⌒2，形成（2，3，5）位置數和仍是偶數，對接手的(乙)變成不利。

(四)跳過二個棋子時，除了（3，4，5）時5②2勝負情形不變外，其餘跳過二個棋子時，勝負情形也都會反轉，如（4，5，6）時，對甲有利，甲如下6②4則形成（3，4，5）對接手的(乙)會形成有利。

(五)棋子位數和是「奇數」時，先手甲固然得勝，即使在棋子位數和是「偶數」，第二個棋子在「偶數位」一、二兩棋子在「奇數位」時，先手甲仍可找到必勝下法。

(六)三顆棋子都在「偶數位」或三顆棋子位置和是「偶數」，

而第二顆棋子是「奇數位」時，後手乙必勝。

〔問題四〕

做完了上面如何求勝的研究後，我們想，是不是能找出到底要走幾步，才能完成整個遊戲。我們把前面得到的數據加以整理研究如下：（以下省略）

五、結論：

做完了上面的研究，我們對這個遊戲有了下列的心得：

㈠開賽時的棋形就決定了勝負的可能：

1. 只有一個棋子時，棋子在偶數位時，先手甲得勝，棋子在奇數位時，後手乙得勝。
2. 有二個棋子時，兩個棋子的位置數和是「奇數」時，先手甲得勝，兩個棋子的位置數和是「偶數」時，後手乙得勝。
3. 三個棋子時：

⑴棋子位置數和是「奇數」時，先手只要不下錯，就可得勝。

⑵棋子位置數和是「偶數」時：

①第二個棋子在「奇數」位時，後手會勝利。

②第二個棋子在「偶數」位時。

㈤一、三兩個棋子都在「奇數」位時，先手甲勝利。

㈥一、三兩個棋子都在「偶數」位時，後手乙勝利。

⑶三個棋子緊連在一起時，先手都可得勝。

㈡在競賽過程中：

1. 在只有兩個棋子時，除了$3 \curvearrowright 1$以下，所有跳的棋步都是錯誤手千萬不可下。
2. 在三個棋子時，當棋形對自己有利時，盡量先移動，前面的棋子，或避免給對方有跳的機會，棋形對自己不利時，盡量先移動後面的棋子，製造跳的有利機會，好扭轉局勢。

㈢在完成整個遊戲所需的移動次數上，與①棋子的位置②跳過的

棋子數及③棋子數有關，可以用公式計算得到：
棋子所在的位置和一跳過的棋子數—由1到棋子數的累加和二完成整個遊戲的移動次數。

六、參考資料

㈠趣味數學問題集　凡異出版社
㈡歷屆科學展覽優勝作品專輯　台灣科學教育館

評語

本件作品應屬上好之作，可惜是遊戲規則未能解釋清楚，而且最後之結論亦不甚完全，但仍屬不錯之作，若能再予努力則定當不錯。