

我變…神奇魔術蛇

初小組數學科第二名

高雄市瑞祥國民小學

作者：藍聖閔、鄭宇純
莊慧君、王華鈺
指導教師：萬國興、鄭文川

一、研究動機：

平時，聖閔最喜歡玩魔術蛇與魔術方塊，利用旋轉摺翻的功夫就能轉出不同形狀的形體來。後來，班上都流行一陣魔術蛇，但宇純不小心把魔術蛇摔壞了，想買一個，又要花錢，這時，聖閔却想到底要用什麼材料來做一個既便宜又方便的魔術蛇？哦！對了「紙」最便宜，且又輕便，經過大家討論之後，便分頭去搜集書籍與資料，後來，我們遇到很多問題，也請教老師，就在老師的指導，做了一連串的研究活動。

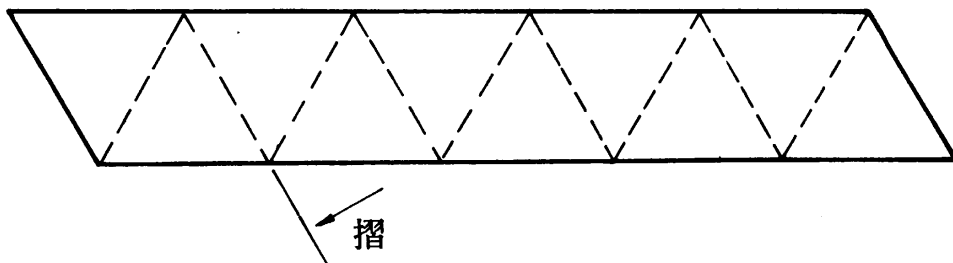
二、研究目的：

- (一)從遊戲中學習數學，認識圖形，可增加學習的樂趣。
- (二)操作長條紙，摺出不同的六邊形魔術蛇，摺翻旋轉，可轉出不同的面，並可找出循環路線。
- (三)操作長條紙，摺出正方形的魔術蛇，使出摺翻旋轉方法，可轉出不同的面。
- (四)比較六邊形魔術蛇與正方形魔術蛇的不同與共通性，並瞭解紙的層數與面數的關係。

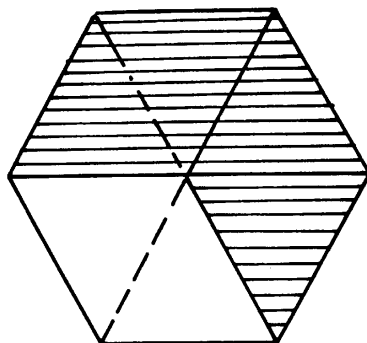
三、研究過程：

〔活動一〕怎樣摺出長條紙的摺線，和最簡單的六邊形魔術蛇？

〔操作〕(1)以一張長條紙，按照向上摺、向下摺的順序，先摺出10個正三角形，如下圖。



(2)等距離摺三次，即完成最簡單的六邊形魔術蛇。

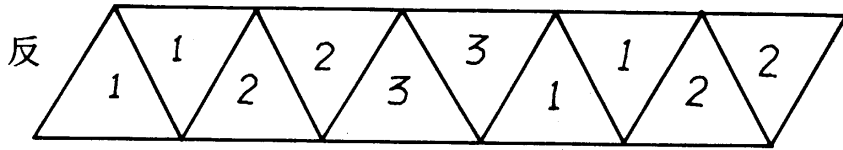
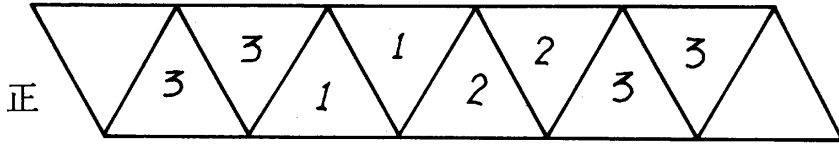


簡單的三面六邊形

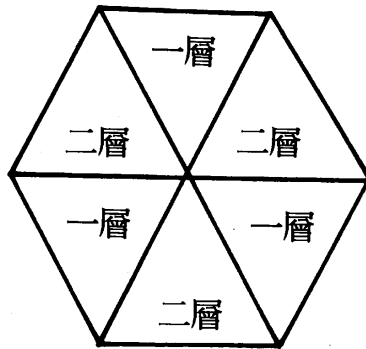
〔摺法〕(1)上面(正面)先標上數字“1”，下面(反面)標上“2”，使出摺翻功夫，可轉出另外一個隱藏的面，即標上“3”。

(2)按照操作翻轉的方法，即可出現1→2→3→1→2→3的循環次序。

(3)把六邊形魔術蛇拆開，即如下圖。



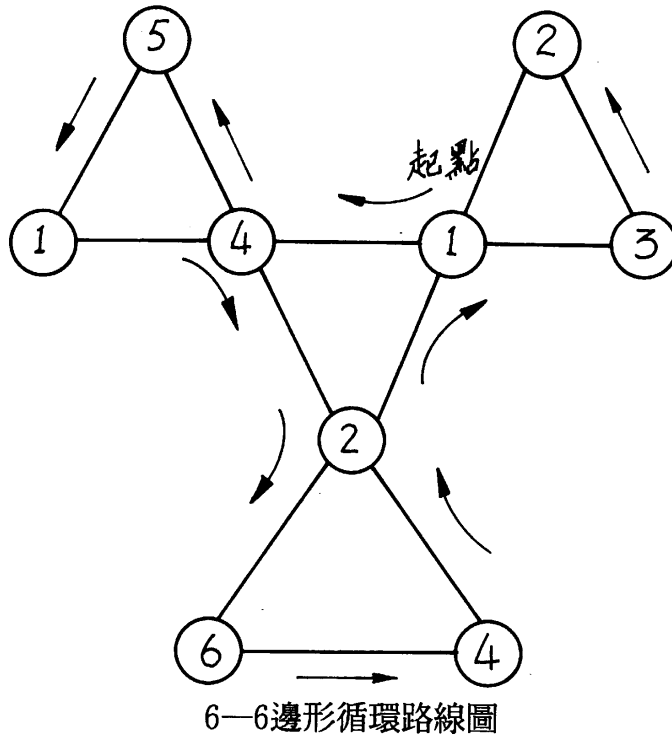
- 〔發現〕(1)摺法有三種即斜右摺、斜左摺、對半摺。
 (2)共摺出三個面，即1，2，3面。面的種類是1對2，3對1，2對3。
 (3)由六個正三角形組成，每個三角形都由二層或一層組成。如下圖。
 (4)因為共可摺出三個面，又是六邊形，所以下圖稱做3—6邊形。



- 〔活動二〕增加長條紙，是否可以使六邊形魔術蛇摺出更多的面，並畫出翻轉路線圖？
- 〔操作〕(1)以一張長條紙，按照向上摺、向下摺的順序，摺出19個正三角形。
 (2)把19個三角形排列的長條紙，翻轉重疊，縮成排列成10個三角形的長條紙。
 (3)再使出摺翻功夫，如前面所述的方法，就可摺出一個新的六邊形魔術蛇。
- 〔摺法〕(1)按照三種摺翻方法，找出空白的面，再標上數字，却發

現有6個面。即面1、2、3、4、5、6。

- [發現] (1) 三角形層數是2和4層，經過摺翻旋轉，可摺出1和5層。
 (2) 摺出相對面的種類是1對2，1對3，1對4，1對5，2對4，2對6，2對3，4對6。
 (3) 三角形層數無法摺出3和3層。
 (4) 畫出循環路線圖，如下圖。
 (5) 相鄰兩三角形層數的和等於面數。即 $2+4=1+5=6$ ，即六面六邊形。



[活動三] 怎樣做出九面的六邊形魔術蛇？

[操作] 以長條紙摺出28個正三角形，再參照前述 $1+5$ 層=6面的摺法，拆開和觀察5層的結構，摺出 5 層+ 4 層=9面的六邊形魔術蛇。

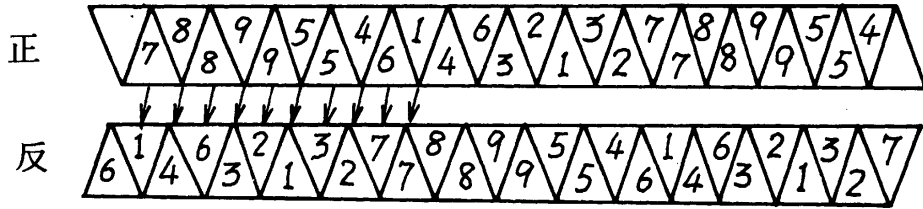
[摺法] 操作三種方法，即斜右摺、斜左摺、對半摺，加以鎖定，就可全部地摺出來了。

[發現] (1) 面的種類共有15種相對的面。

(2) 出現三角形的層數是4和5層，經過摺翻後，可轉出2和7

或1和8層，但是却無法摺出3和6層。

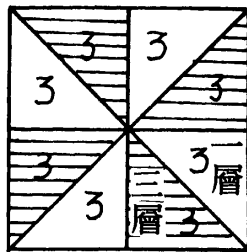
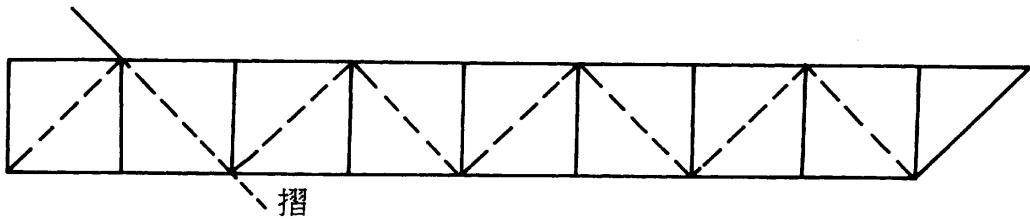
(3)把9—6邊形全部拆開，數字的數列如下圖：



(4)只要在長條紙兩面的三角形，就能摺出相對的面。如7面對1面。

〔活動四〕怎樣摺出正方形魔術蛇？是否可摺出其他的圖形和其他的面？

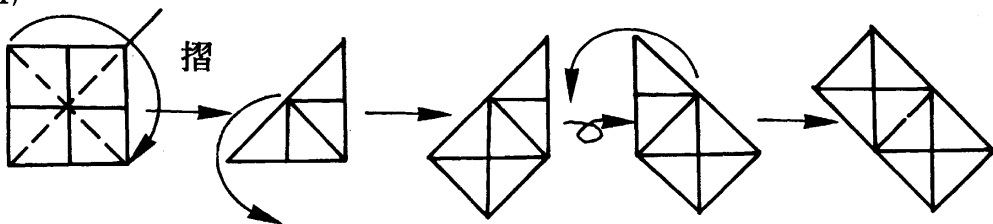
〔操作〕先摺出下面的長條紙摺線，使出摺翻，祇要17塊等腰直角三角形，即可摺出正方形魔術蛇。如下圖並標上數字。

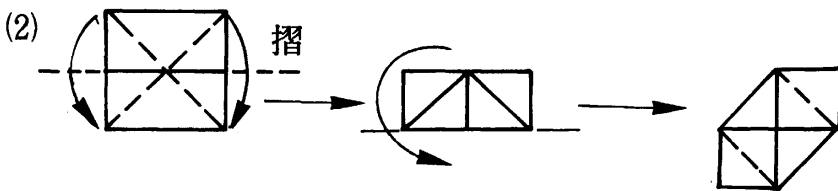


四面四邊形

〔摺法〕使出摺翻，可摺出二種圖形。

(1)





(3)使出摺翻的招式，可摺出四個面。即面1、2、3、4。

(4)摺出的圖形種類比較多，變化大。

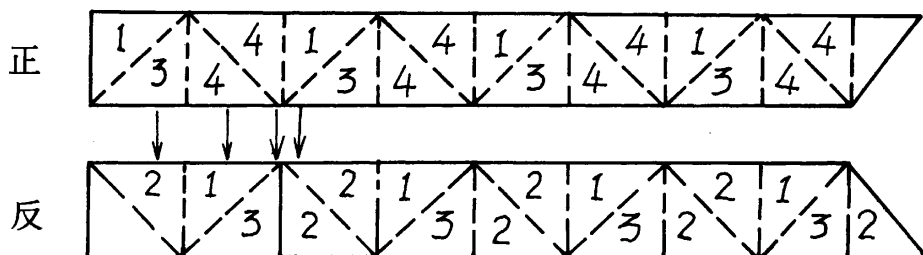
[發現] (1)摺出相對面的種類有4種。即3對2，1對2，3對4，1對4。

(2)三角形層數是1和3層。無法摺出2和2層。

(3)使出摺翻招式，可完成路線循環圖。即1上反4下反2背半3上反4下反2背半1。

(4)把四邊形拆開，如下圖所示。

(5)只要同時在長條紙兩面的三角形，就能摺出相對的面。



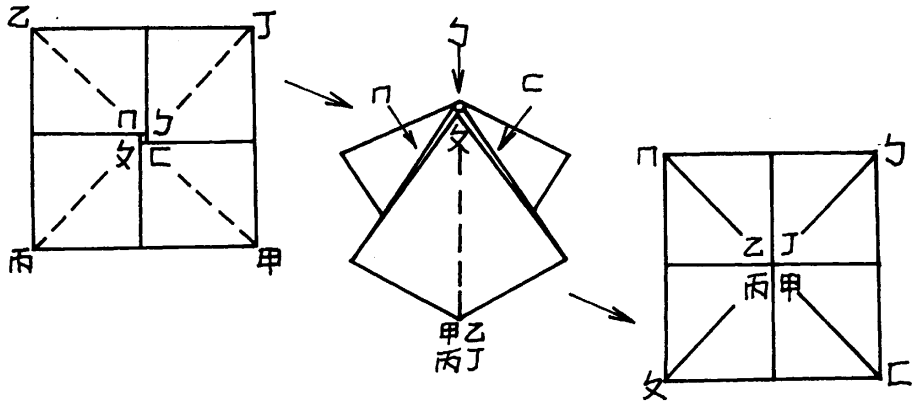
[活動五] 增加長條紙，是否可使正方形魔術蛇摺出更多的面？有那些常用的招式？

[操作] 操作長條紙，按照前面方法，摺出33個直角三角形，再使用摺翻招式，可摺出八個面，即八面四邊形。

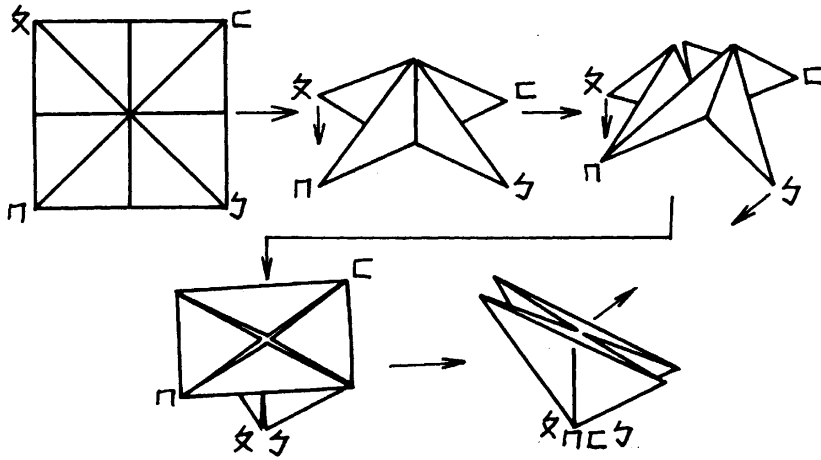
[摺法] 常使用的方法有「八招」。

(1)向上反旋轉。

(2)背面對半。如下圖。



- (3) 倒立旋轉。如照片。
- (4) 正面對半（向外對半），如照片。
- (5) 花開富貴。如下圖。



- (6) 向內對半。
- (7) 向下反旋轉。
- (8) 鎖定法。

- [發現] (1) 摺出相對的面，種類有10種。
- (2) 三角形層數是3和5層，經過摺翻旋轉，可變出1和7層。但是却無法摺出2和6層或4和4層。
- (3) 有一個隱藏的面，很難摺出來。但使出摺法八招，却可摺出來。
- (4) 我們嚐試完成12—4邊形及12—6邊形，但因紙層太厚，不易翻轉且紙張易破，所以要找循環路線路，很難完成。

〔活動六〕比較六邊形魔術蛇與正方形魔術蛇的相同性與相異性？

〔發現〕同學相互討論，並把結果和感想發表出來。（如討論及結論）

四、討論：

(一)我們把研究六邊形魔術蛇的結果，列出一個統計表。

○：可完成

魔術蛇形狀名稱	正三角形數	摺出相對的面種類	面的個數	三角形層數	循環路線圖	摺法
3—6	10	3	3	2+1層	○	3
6—6	19	9	6	2+4,5+1	○	3
9—6	28	15	9	2+7,1+8 5+4	○	3
12—6	37	21	12	10+2,4+8 5+7,1+11	層數太厚， 翻轉不易	3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
ㄅ—6	ㄨ	ㄇ	ㄅ			3

(1)ㄅ是面數，ㄨ是正三角形數，所有六邊形魔術蛇都多加1塊三角形，是為了固定迴紋針，以便摺翻。

$$\text{因此 } 10=1\times 9+1$$

$$19=2\times 9+1$$

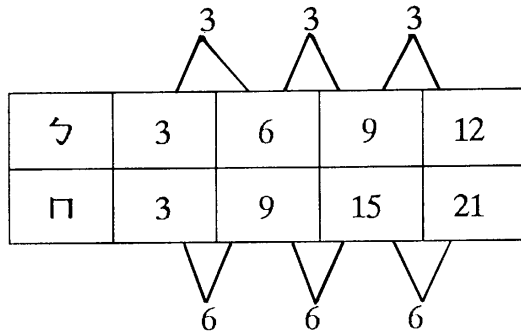
$$28=3\times 9+1$$

$$37=4\times 9+1$$

$$\text{所以 } ㄨ=(\text{ㄅ}\div 3)\times 9+1=\text{ㄅ}\times 3+1$$

$$\text{ㄅ}=(\text{ㄨ}-1)\div 9\times 3=(\text{ㄨ}-1)\div 3$$

(2)我們推測摺出相對的面種類(ㄇ)與面數(ㄅ)有一定的規律性，由於推理不足，經過老師指導後，得到公式： $\text{ㄇ}=2\times \text{ㄅ}-3$ 。



(二)我們把研究正方形魔術蛇的結果，列出一個統計表。

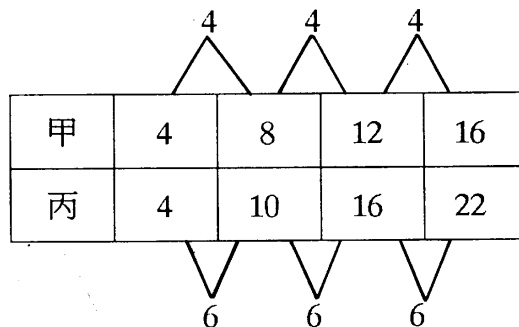
○：可完成

魔術蛇形狀名	等腰直角三角形數	摺出相對的面種類	面數	三角形層數	循環路線圖	摺法
4—4	17	4	4	1+3層	○	7
8—4	33	10	8	3+5,7+1層	○	8種以上
12—4	49	16	12	5+7,9+3 11+1層	摺法太多，沒有一定的路線	8種以上
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
甲—4	乙	丙	甲			

(1)甲是面數，乙是等腰直角三角形數，正方形魔術蛇都是多加1塊三角形數以便固定和摺翻。所以 $乙 = 甲 \times 4 + 1$

$$甲 = (乙 - 1) \div 4$$

(2)我們推測摺出相對的面種類(丙)與面數(甲)，有一定的關係，由於推理不足，經過老師指導後，得到公式 $丙 = (3 / 2) \times 甲 - 2$



五、結論：

(一)比較六邊形與正方形魔術蛇的相同性和相異性：

(1)相同點

- ㄅ. 都可變化摺翻出不同的面，並採用鎖定的方法，找出隱藏在裏面的神秘面。
- ㄆ. 只要同時在長條紙兩面（正反面）的三角形，就能摺出相對的面。
- ㄇ. 相鄰兩個三角形的層數「和」等於面數，例如九一六邊形的三角形層數是5層+4層=9層面。
- ㄏ. 兩者都要多加1塊三角形，以便固定迴紋針，就可摺翻。
- ㄏ. 兩者都可找出循環路線圖。

(2)相異點

<p>六邊形 魔術蛇</p>	<p>(ㄅ)摺法三種，比較容易摺出不同的面，摺法比較單調。 (ㄆ)摺出的面數有3、6、9面，是3的倍數。 (ㄇ)由六塊正三角形組成。 (ㄏ)公式不同，即長條紙上三角形的總數是面數(ㄅ)$\times 3 + 1$。 (ㄏ)小三角形層數經過摺翻，無法摺出3和3層或3和6層，即是3的倍數。 (ㄏ)摺翻循環路線比較容易找出來，因為摺法較簡單。</p>
<p>正方形 魔術蛇</p>	<p>(ㄅ)摺法有八種以上，能摺出變化的圖形，較具挑戰性。 (ㄆ)摺出的面數有4、8、12面，是4的倍數。 (ㄇ)由八塊等腰直角三角形組成。 (ㄏ)公式不同，即所有三角形數是面數(甲)$\times 4 + 1$。 (ㄏ)小三角形層數經過摺翻，無法摺出2和2層，2和6層，4和4層，即是2的倍數。 (ㄏ)摺翻循環路線比較難找出，因為摺法較繁雜。</p>

- (二)由於推理能力不足，經過老師指導之後，我們得到公式六邊形魔術蛇相對的面種類 $(\square) = 2 \times \text{面數}(\triangle) - 3$ ，正方形魔術蛇相對的面種類 $(\square) = 3/2 \times \text{面數}(\triangle) - 2$ 。

六、展望及感想：

- (一)經過一連串的摺紙遊戲之後，讓我們覺得「魔術蛇」實在太神奇了，也激起我們對數學產生一股強烈的興趣。
- (二)我們嚐試做12—6及12—4邊形魔術蛇的循環路線圖，但是因為紙太厚了，不易摺翻旋轉，而且迴紋針容易掉落。
- (三)每當魔術蛇摺成亂七八糟的時候，最傷腦筋，有時費盡心力，絞盡腦汁，仍無法摺回原來的形狀，不過，也蠻具有挑戰性的。
- (四)本件作品的研究，不同於上屆科展作品百「摺」不撓，是我們繼續發揮了集體合作研究的精神，敬請多多指教。

七、參考資料：

- (一)怎樣教兒童摺紙 李千野編著 武陵出版社 72.5. P.1~P.40。
- (二)數學迷惘 李清庭譯 復漢出版社印行 60.8. P.1~P.11。
- (三)數學課本第八冊、第七冊三角形與四邊形。
- (四)兒童摺紙 輔新書局出版 75.年出版。

評語

本件作品相當有趣而且變化無窮，更難得的是代表之同學對其作品非常成熟。