

撒豆成兵

初小組數學科第一名

台北縣秀朗國民小學

作者：簡靖軒、陳佑生

莊富鈞、莊詠程

指導教師：張美英、蔡斌祥

一、研究動機

暑假回鄉下，曾見爺爺買米時，向老板說“多少斤米”，而老板却不用秤子，拿出一個圓筒形的容器裝滿後，再用趕麵棍將容器口撫平，算一個單位，量出爺爺所需的米量，當時我很好奇，問爺爺“他為何不用秤？這樣量準嗎？”爺爺說“那是量米的斗，一斗大約是11台斤，以前的人都是這樣量米的，準得很呢！”我不信，於是開學後向老師請教，為了滿足我的好奇，老師指導我和同學做了以下的操作。

二、研究目的

從顆粒中，探討重量、面積、容積的關係

三、研究器材

①綠豆5斤②紅豆5斤③西谷米5斤④珍珠板10塊⑤雙面卡紙10張
⑥天平⑦1公合、一公升的容器⑧各種不同形狀的容器。

四、事前準備

- (1)將綠豆、紅豆、西谷米中的雜質及大小懸殊太大的挑除。
- (2)用珍珠板及雙面卡紙做出：(甲) (1×1) 、 (2×2) 、 $(3\times 3)\dots(10\times 10)$ 的面積量器。(乙)、顆粒數數板。(丙)、不規則圖形量器。(丁)、 $(2\times 2\times 2)$ 、 $(3\times 3\times 3)$ 、 $(4\times 4\times 4)$ 、 $(5\times 5\times 5)$ 、 $(6\times 6\times 6)$ 的容器。

五、研究過程

問題一：從物質的顆粒能預測重量嗎？

操作(一)：(1)以挑過的綠豆、紅豆及西谷米用天平秤出一克的重量。

(2)數出綠豆、紅豆及西谷米一克的顆數記錄、反覆10次求平均植。(見表一)

發現(一)：(1)單位：顆

(表一)

次數 分類 顆數	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	平均
綠豆	13	12	13	14	13	13	14	14	12	14	13.2
紅豆	8	7	6	7	7	8	7	7	7	8	7.2
西谷米	34	34	35	35	36	35	34	34	33	33	34.3

(2)ㄱ.綠豆每克的顆數約13顆。

ㄴ.紅豆每克的顆數約7顆

ㄷ.西谷米每克的顆數約34顆。

操作(二)：(1)依操作(一)各分別秤出2克~10克的綠豆、紅豆及西谷米，也一樣反覆操作10次，求平均值。

發現(二)：綠豆、紅豆、西谷米2克~10克之平均值

顆 分 類	克	2	3	4	5	6	7	8	9	10
綠 豆		26	38.7	52.2	64.9	77.8	90.7	103.9	117.2	129.7
紅 豆		14.2	21.1	27.8	35.2	42.2	49.4	56	62.8	70.1
西 谷 米		67.6	102.1	136.1	171	204.4	237.8	272	306.4	340.3

歸納(-)：由發現(-)(二)可知：(以下各倍數四捨五入至整數位)

(1)綠豆

重 量	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
顆 數	13.2	26	38.7	52.2	64.9	77.8	90.7	103.9	117.2	129.7
計 算	(1)26 ÷ 13.2 → 2			(4)64.9 ÷ 13.2 → 5			(7)103.9 ÷ 13.2 → 8			
	(2)38.7 ÷ 13.2 → 3			(5)77.8 ÷ 13.2 → 6			(8)117.2 ÷ 13.2 → 9			
	(3)52.2 ÷ 13.2 → 4			(6)90.7 ÷ 13.2 → 7			(9)129.7 ÷ 13.2 → 10			
倍 數	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十

(2)紅豆

重 量	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
顆 數	7.2	14.2	21.1	27.8	35.2	42.2	49.4	56	62.8	70.1
計 算	(1)14.2 ÷ 7.2 → 2			(4)35.2 ÷ 7.2 → 5			(7)56 ÷ 7.2 → 8			
	(2)21.1 ÷ 7.2 → 3			(5)42.2 ÷ 7.2 → 6			(8)62.8 ÷ 7.2 → 9			
	(3)27.8 ÷ 7.2 → 4			(6)49.4 ÷ 7.2 → 7			(9)70.1 ÷ 7.2 → 10			
倍 數	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十

(3)西谷米

重 量	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
顆 數	34.3	67.6	102.1	136.1	171	204.4	237.8	272	306.4	340.3
計 算	(1)67.6 ÷ 34.3 → 2			(4)171 ÷ 34.3 → 5			(7)272 ÷ 34.3 → 8			
	(2)102.1 ÷ 34.3 → 3			(5)204.4 ÷ 34.3 → 6			(8)306.4 ÷ 34.3 → 9			
	(3)136.1 ÷ 34.3 → 4			(6)237.8 ÷ 34.3 → 7			(9)340.3 ÷ 34.3 → 10			
倍 數	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十

分析(-)：不論綠豆、紅豆或西谷米，都能從其顆粒數中預測它的重量，即：

(1)綠豆□顆的重量約：(□ ÷ 13)

(2)紅豆□顆的重量約： $(\square \div 7)$

(3)西谷米□顆的重量約： $(\square \div 34)$

求證：綠豆20克、紅豆25克、西谷米15克，約有多少顆？

證明：依分析(一)其顆粒應為：綠豆260顆、紅豆175顆、西谷米150顆

驗算：我們數綠豆260顆、紅豆175顆、西谷米150顆，分別放在天平上秤出各重量。

結果：(1)

項目 重量 分類	項目					
	一	二	三	平均	原重	誤差
綠 豆	19.5	18.4	21	19.6	20	0.4
紅 豆	26	25.7	25.1	25.6	25	0.6
西 谷 米	14.5	15.6	14.8	14.97	15	0.03

(2)誤差不超出1克，由顆粒的大小：紅豆>綠豆>西谷米，而誤差大小也成正比例：

紅豆>綠豆>西谷米

(由於紅豆顆粒大、誤差大，而顆粒小、誤差小的西谷米又容易破碎，因此以下的試驗操作均採用綠豆)

問題二：顆粒的重量和面積有何關係？

操作(二)：(1)用珍珠板及雙面卡紙做出面積(1×1)的模型。

(2)取綠豆平鋪於模型內，算出綠豆的顆數並秤出重量，反覆10次，求其平均值。

發現(二)：(1)

次數	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	平均
顆數	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
重量	0.4	0.4	0.4	0.3	0.4	0.4	0.3	0.4	0.4	0.4	0.38

(2)1平方公分的綠豆，約有5顆，重約0.4公克。

操作(四)：(1)依操作(三)做出(2×2)、(3×3)、(4×4)、(5×5)、(6×6)、(7×7)、(8×8)、(9×9)、(10×10)之模型

(2)秤出各平板上綠豆的重量並數顆數、做5次求平均

發現(四)：各平板上綠豆的重量、顆數平均如下：

面積	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
重量	1.62	3.6	6.3	9.82	14.22	19.58	25.54	32.46	39.8
顆數	20.2	45.8	80.6	125.2	178.4	241.4	318	404	498

歸納(二)：由發現(三)、(四)可知：(以下四捨五入至整數位)

面積	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
重量	0.4	1.62	3.6	6.3	9.82	14.22	19.58	25.54	32.46	39.8
顆數	5	20.2	45.8	80.6	125.2	178.4	241.4	318	400.4	498
計 算	(1) $1.62 \div 0.4 \rightarrow 4$ (4) $9.82 \div 0.4 \rightarrow 25$ (7) $25.54 \div 0.4 \rightarrow 64$									
	$20.2 \div 5 \rightarrow 4$ $125.2 \div 5 \rightarrow 25$ $318 \div 5 \rightarrow 64$									
	(2) $3.6 \div 0.4 \rightarrow 9$ (5) $14.22 \div 0.4 \rightarrow 36$ (8) $32.46 \div 0.4 \rightarrow 81$									
倍數	$45.8 \div 5 \rightarrow 9$ $178.4 \div 5 \rightarrow 36$ $400.4 \div 5 \rightarrow 81$									
	(3) $6.3 \div 0.4 \rightarrow 16$ (6) $19.58 \div 0.4 \rightarrow 49$ (9) $39.8 \div 0.4 \rightarrow 100$									
$80.6 \div 5 \rightarrow 16$ $241.4 \div 5 \rightarrow 49$ $498 \div 5 \rightarrow 100$										
倍數	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

分析(二)：當面積增加為原來之4倍、9倍、16倍……時，綠豆的重量及顆數也一樣增加為原來的4倍、9倍、16倍……。

操作(五)：(1)用圓規在珍珠板上做一個半徑2公分的圓。

(2)在圓內鋪滿綠豆並秤出其重量及顆數。

發現(五)：(1)綠豆重量為5克，顆數為62顆，其面積：

$$(\text{ㄅ}) 5 \div 0.4 = 12.5 \text{ (平方公分)}$$

$$(\text{ㄆ}) 62 \div 5 = 12.4 \text{ (平方公分)}$$

(2)此圓的實際面積： $2 \times 2 \times 3.14 = 12.56$ (平方公分)

其誤差：

$$(\text{ ㄅ }) 12.56 - 12.5 = 0.06$$

$$(\text{ ㄆ }) 12.56 - 12.4 = 0.16$$

(3)由綠豆每克的重量、顆數推算出的圓面積誤差很小，很相近。

問題三：顆粒的重量和容積有何關係？

操作(六)：(1)取綠豆注入1公合、5公合、10公合之容器內裝滿，用米達尺將容器口多餘的綠豆篩平。

(2)秤出各容器內綠豆的重量，做5次並求平均。

發現(六)：各容器綠豆之重量

克 公合 \ 次數	一	二	三	四	五	平均
1	77.1	77.9	78	77.6	76.8	77.5
5	389	385	390	387	391.5	388.5
10	774	780	782	775	779	778

歸納(三)：(1)5公合 \div 1公合=5(倍)

重量：388.5 \div 77.5 \Rightarrow 5(倍)

(2)10公合 \div 5公合=2(倍)

重量：778 \div 388.5 \Rightarrow 2(倍)

(3)10公合 \div 1公合=10(倍)

重量：778 \div 77.5 \Rightarrow 10(倍)

分析(三)：

\because 10公合=1公升=1000立方公分

\therefore 778克 \div 1000=0.78克，即1立方公分的綠豆=0.78克

操作(七)：(1)用珍珠板、雙面卡紙分別做出： $(2 \times 2 \times 2)$ 、 $(3 \times 3 \times 3)$ 、 $(4 \times 4 \times 4)$ 、 $(5 \times 5 \times 5)$ 、 $(6 \times 6 \times 6)$ 之正方體模型。

(2)各模型中裝滿綠豆，(多餘的用尺篩平)，並秤出重量。

發現(七)：單位：克（重量）， cm^3 （體積）

體積	$2 \times 2 \times 2$	$3 \times 3 \times 3$	$4 \times 4 \times 4$	$5 \times 5 \times 5$	$6 \times 6 \times 6$
重量	6.5	21.45	50.2	98.2	169.6

歸納(四)：單位：克（重量）

體積	8 cm^3	27 cm^3	64 cm^3	125 cm^3	216 cm^3
倍數	8	27	64	125	216
應有重量	0.78×8 = 6.24	0.78×27 = 21.06	0.78×64 = 49.92	0.78×125 = 97.5	0.78×216 = 168.48
實際重量	6.5	21.45	50.2	98.2	169.6
誤差	0.26	0.39	0.28	0.7	1.12

分析(四)：(1)誤差在0.26~1.12之間，很微小。

(2)可以綠豆的重量推算出容積，明白容器的容量大小。

問題四：綠豆顆粒，重量，面積及容積間的關係，能否應用在不規則上？

操作(八)：(1)用珍珠板設計出各種不規則的平面圖：（圖略）

(2)將各不規則平面上鋪滿綠豆，並秤出綠豆的重量。

(3)以 1 cm^3 的綠豆重0.4克去換算出各不規則圖形的面積。

發現(八)：

圖形	酒瓶	飛機	椅子	花瓶	小飛俠	糖果	青蛙	袋子	小刀	香蕉
重量	6.3	6.8	4.3	5.3	4	4.6	7.4	4.5	3.7	3.5
面積	15.8	17	10.8	13.3	10	11.5	18.5	11.3	9.3	8.8

操作(九)：(1)將操作(八)之不規則圖形印畫在方格紙上。（每格 1 cm^2 ）

(2)由課本所學：“完整格 $\times 1$ + 不完整格 $\times \frac{1}{2}$ ”的方式，算出各圖形面積。

發現(九)：

圖形	酒瓶	飛機	花瓶	小飛俠	糖果	青蛙	袋子	椅子	小刀	香蕉
面積	18.5	19	15	11	12.5	20	14	12	10.5	11

歸納(五)：將發現(八)和發現(九)二表歸納。

分析(五)：(1)誤差很微小，在 $1\text{cm}^3 \sim 2.7\text{cm}^3$ 之間。

(2)以綠豆的顆數可推算出重量，再由重量又可換算出不規則的面積。

操作(十)：(1)收集各種不規則容積如下(圖略)，並編號：

①小化粧瓶②漏斗③大化粧瓶④玩偶⑤酒精燈蓋⑥帽子⑦三角杯⑧小羊⑨小化粧瓶蓋⑩大化粧瓶蓋⑪酒精燈

(2)將各容器裝滿綠豆、並用長尺篩平，以 1cm^3 的綠豆重0.78克換算出各容器的容積。

發現(十)：

編號	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪
重量	6.1	43.2	8.95	16.98	13.2	19.6	132.2	4.1	4.1	1.7	51.7
面積	7.8	55.4	11.5	21.8	16.9	25.1	169.5	5.3	5.3	2.2	66.3

操作(十一)：(1)將操作(十)之不規則容器裝滿水，用量杯量出水的容量。

(2)以 $1\text{c.c.} = 1$ 立方公分換算出各容器的容積。

發現(十一)：

編號	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪
容積	7	55	11	21	18	22.5	170	5	5	3	69

歸納(六)：將發現(十)和發現(十一)二表歸納。

分析(六)：(1)誤差在 $0.3\text{cm}^3 \sim 2.7\text{cm}^3$ 之間，很微小。

(2)以綠豆顆數推算出的重量，可換算出不規則的容積。

六、討論

1. 由發現(一)得知，不論綠豆、紅豆或西谷米，每一克的顆數都有一定數量：綠豆約13顆，紅豆約7顆、西谷米約34顆。
2. 由發現(二)可知，顆數越多重量越重，它們之間成一定的比例，老師說：這就叫做正比例。
3. 由發現(三)求出：1 cm^2 的綠豆約有5顆，重量大約0.4克。
4. 從發現(四)很明顯地：當面積增加為原來的4倍、9倍…100倍時，綠豆的顆數、重量也一樣增加為原來的4倍、9倍…100倍。
5. 量出一定圓面積的重量及顆數而推算出的面積、和實際很相近。
6. 一公合的綠豆大約77.5克，五公合、十公合約為5倍、10倍。
7. 從數學課本所學：10公合=1公升=1000立方公分，而10公合的綠豆重778克，所以，1立方公分=778 \div 1000=0.78（克）
8. 以每立方公分0.78克推算出的每個正方體的重量，和實際所稱出的重量，誤差在0.26克~1.12克之間，這在操作中是難免的，由此，我們可以明確地確定：由重量可以推算容量，了解容器的大小。
9. 操作(八)由綠豆的重量推算出的不規則圖形面積，經由每方格1平方公分的方格紙上的實際操作中，我們發現畫在方格紙上算面積也有誤差存在，因此，綠豆面積和方格面積之間的誤差，雖然在1 cm^2 ~2.7 cm^2 之間，是正常的，也算微小的，所以由綠豆的重量可正確推算出不規則圖形的面積。
10. 用水量出不規則容器的容量是最正確的，而用綠豆量出的容量，因綠豆之間有些微的空隙，所以和水容量之間有0.3 cm^3 ~2.7 cm^3 的誤差，也是正常的，因此由綠豆的重量可換算出不規則容器的容量。
11. 用綠豆的顆數可量出一定的重量，再由重量又可推算出面積容積。

七、我們的心得

1. 綠豆、紅豆、西谷米在我們鄰近的雜貨店中即可買到，以它來做實驗，又方便又有趣。
2. 這次的實驗中，西谷米較小又均勻，原想以它為主要材料，但因易碎而造成顆數的不定；而紅豆顆粒太大，誤差也大；綠豆雖經兩、三個星期會因水份消失而減輕重量，我們仍以兩星期換一次的方式，而採取大小適中的綠豆。
3. 因綠豆大小篩檢，無法做到完全一致，再加上天平的精確度也會影響，因此實驗中不論對重量，面積或容量的操作，均稍有誤差。
4. 由綠豆的重量可算出各種不規則圖形的面積及不規則容器的容量，真令我們興奮。
5. 由綠豆的實際操作中：由顆數到重量、到面積、到容積，就像一家人一樣親密，自己動腦、動手做實驗真有趣；像此次的實驗，真可說是“撒豆成兵”，今後我們要繼續做更多更有趣的實驗。

參考資料

1. 台北縣第27屆縣科展資料 台北縣北港國小
3. 國民小學數學課本第五、九、十冊 國立編譯館

評語

本件作品能利用稱米之原理推算出不同形狀之面積及體積是利用先算出單位面積（體積）之重量，進而比較出來，實屬難得，尤其是同學亦能接受不同稱重（數個數）之方法應可確認同學們在此件作品所花之時間，與對此件作品瞭解之程度。