多邊形分割重組的方法

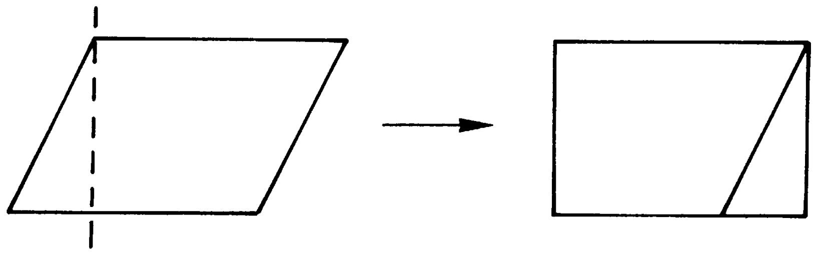
國中組數學科第二名

桃園縣立仁美國民中學

作　　者：李治國、吳天閔
王昌榮
指導教師：林合毅

一、研究動機

解釋平行四邊形面積時，常垂直切下一角補在另一邊形成長方形來說明，如圖：



引起我們興趣的是它的切補手法，可以不增減材料而改變形狀。於是我們以四邊形為起點，開始了對圖形分割重組的研究。

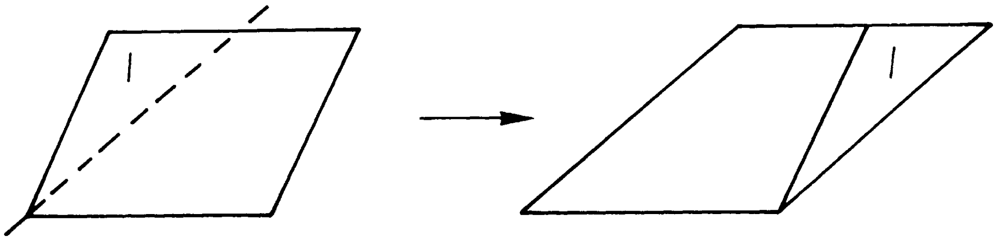
二、符號定義

A→B：表示將A分割再重組成B，顯然，箭號前後的圖形面積相等。　又，本文中所提到的切、切割、及分割，都是指直線分割一圖形。

三、研究過程

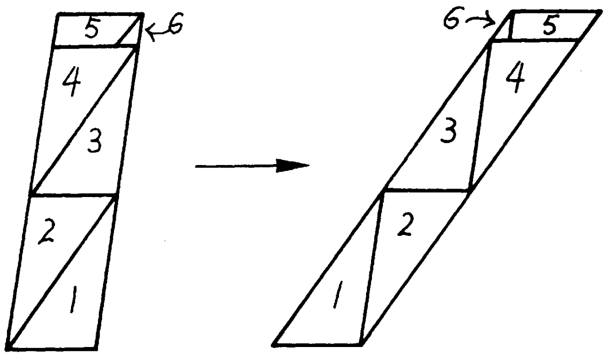
㈠四邊形

1.平行四邊形→等高平行四邊形，方法如圖示：



討論：⑴動機中的例子是此方法重組成內角90度的特例。

⑵有些情況無法只切一刀而完成重組，舉例如下圖：

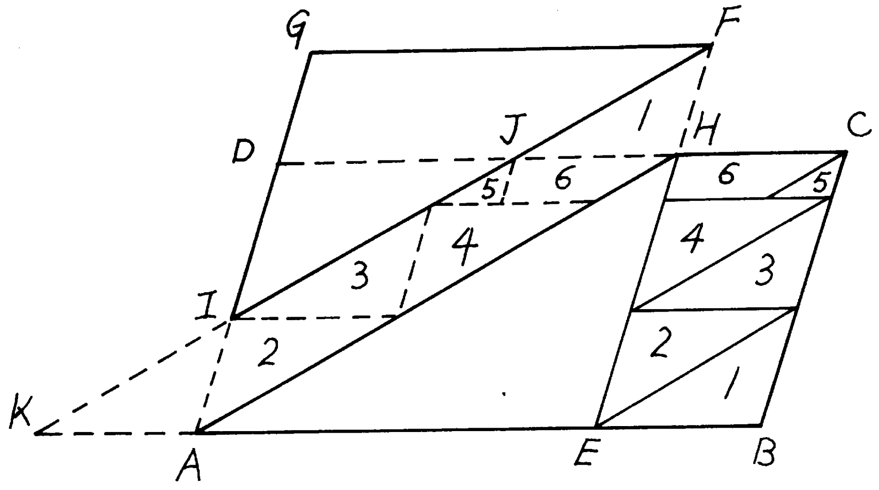


2.平行四邊形→等內角不等高平行四邊形，方法如ABCD→AEFG所示：

⑴切下△ADH移至△IGF位置。

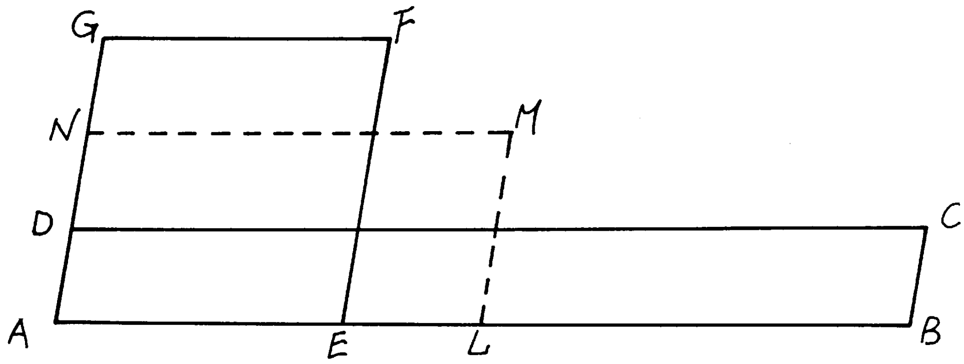
⑵設$\overleftrightarrow{IF}$與$\overleftrightarrow{AE}$交於K，則△AIK≅△HFJ。

⑶作EBCH→KAHJ後，再將△AIK移至△HFJ位置。



討論：(1)長方形→另一不等邊長的長方形，是上述方法內角90度的特例。

(2)若ABCD之高不及AEFG高之半，我們可平行兩腰先平分ABCD重組成兩倍高的ALMN，再做ALMN→AEFG，如下圖：



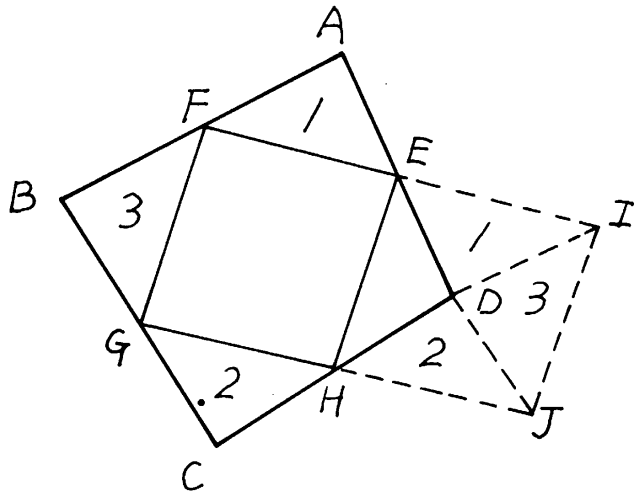
3.若兩等面積平行四邊形不等高也不等內角，我們可以用1.的方法將第一個平行四邊形重組使與第二個平行四邊形等內角，再用2.的方法處理使與第二個平行四邊形也等高。
像這樣聯合A→B及B→C來完成A→C的動作，我們稱它為切割重組的遞移性。

4.不規則四邊形→平行四邊形，如圖ABCD→FGJI：
(1)連接ABCD各邊中點得平行四邊形EFGH。
(2)在$\overrightarrow{FE}$及$\overrightarrow{GH}$上分別取I、J兩點，使$\overline{FE}=\overline{EI}$，$\overline{GH}=\overline{HJ}$。

(3)則FGJI為平行四邊形。

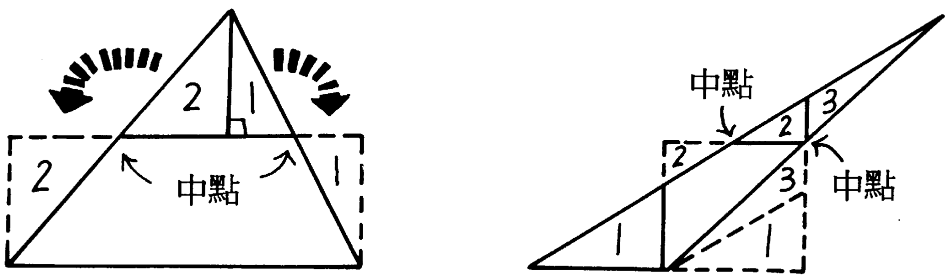
(4)分別切下△AFE、△GCH及△BGF補在△DIE、△JDH及△DJI處。

5.根據上面4.中ABCD→FGJI的草圖，我們可以完成FGJI→ABCD的重組。 即，A→B可行，則B→A可行，我們稱它為切割重組的對稱性。



(二)三角形

1.三角形→長方形，方法如圖所示：

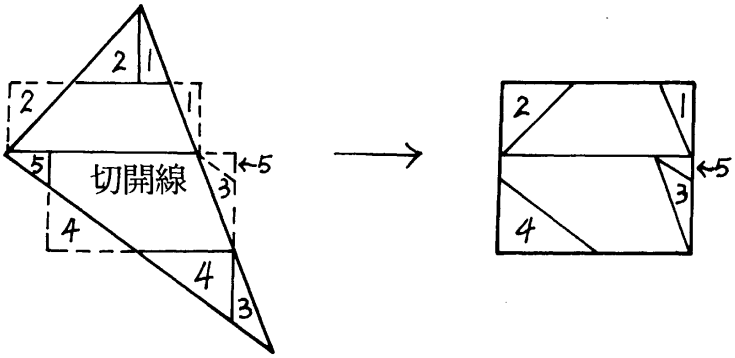


討論：(1)重組後之長方形，寬等於原三角形底長。

(2)有些情況，需要較多次的分割才能完成，如上右圖。

2.過三角形一頂點切開三角形，將此三角形分割成同底的兩個三角形，我們可分別將這兩個三角形以切開線為底，重組成

等寬的長方形，然後，再組合成一個長方形，其寬度等於原切開線長。應用這方法，我們可在做三角形→長方形時，更自由地選擇長方形的寬度，相關性質如下：



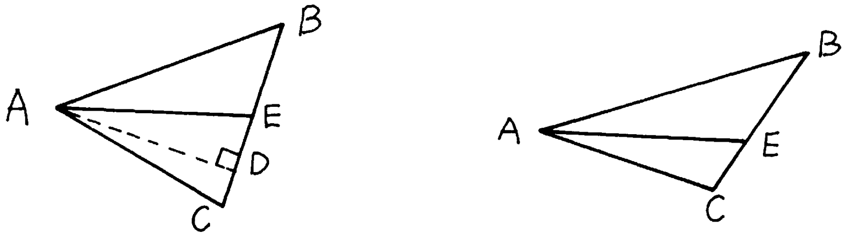
(1)寬度選擇範圍介於原三角形最長邊與最短高之間。

證明：ㄅ.長方形寬度等於選擇切開線長。

ㄆ.如下面左圖，若$\overline{AB}>\overline{AC}$, ∠C為銳角，$\overline{AD}$為$\overline{BC}$上之高，則$\overline{AD}\leqq$切開線$\overline{AE}\leqq\overline{AB}$。

ㄇ.如下面右圖，若$\overline{AB}>\overline{AC}$, ∠C為純角，則$\overline{AC}\leqq$切開線$\overline{AE}\leqq\overline{AB}$。

ㄈ.綜合過頂點A、B、C之切開線長，我們得切開線長之範圍在最長邊與最短高之間。



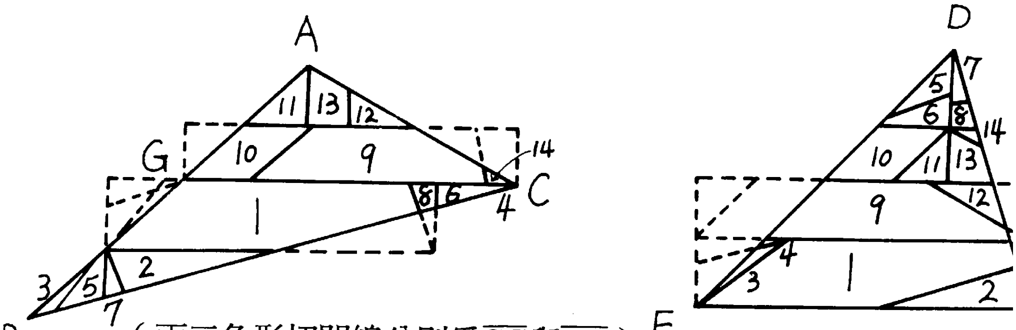
(2)兩等積三角形中，必可找到對應等長切開線。

證明：兩三角形共有六個邊，具有六邊中最長邊的三角形，同時具有最短的對應高，因此，它的切開線長範圍包函另一個三角形，得證。

(3)若指定形成長方形之寬度不在原三角形選擇範內，可先將三角形重組成具指定寬兩倍（或四倍、或1/ 2、或1/ 4……

）的長方形，再平分此長方形重組即可。

3.三角形→另一三角形，作法舉例如圖△ABC→△DEF：



（兩三角形切開線分別爲$\overline{CG}$與$\overline{EF}$）

㈢多邊形

累積了四邊形及三角形上的研究，我們得到了一個驚人也嚇自己的成果，即：任給兩個等面積的多邊形，可以有限次直線分割其中一多邊形，再重組成與第二個多邊形完全相同的圖形。

1.證明：

⑴一個多邊形可以經有限次分割成有限個三角形。

⑵依㈡2.結論知，每一個三角形都可分割重組成等寬長方形。

⑶我們可以將這些等寬的小長方形組合成一個大長方形。

⑷第二個多邊形也可循同樣方法分割重組成完全相同的大長方形。

⑸依㈠5.切割重組對稱性知，我們可將此大長方形分割重組成第二個多邊形。

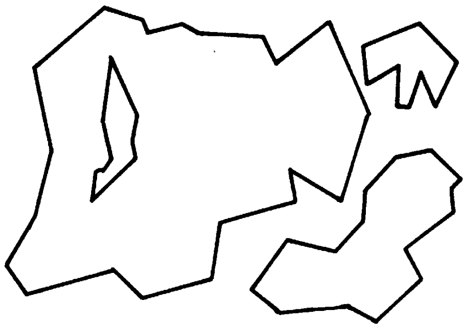
⑹依㈠3.切割重組遞移性知，我們可以將第一個多邊形分割重組成與第二個多邊形完全相同的圖形。

2.討論：

⑴此處的多邊形指其邊緣由直線構成的圖形，可以有凹處，內部可以有洞，也可分為不相連的數小塊，如右圖：

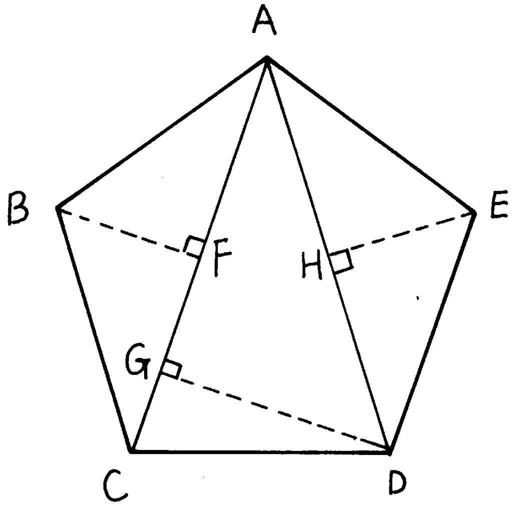
⑵儘管可在有限刀內完成多邊形間的重組，但實際用此方法分割圖形時，過程仍嫌煩雜。因此，我們說此方法的存在

意義重於其實用價值。



四、研究發展

(一)正五邊形ABCDE→正方形的方法：

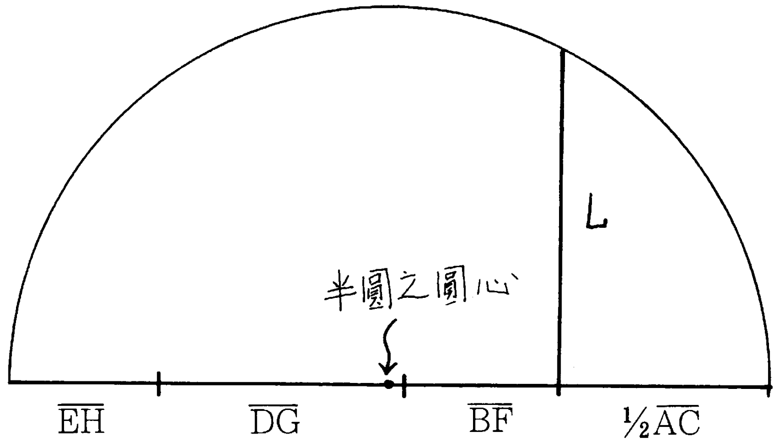


1.連接$\overline{AC}$、$\overline{AD}$，則△ABC、△ACD、△ADE具有同長之邊（$\overline{AC}$、$\overline{AD}$）

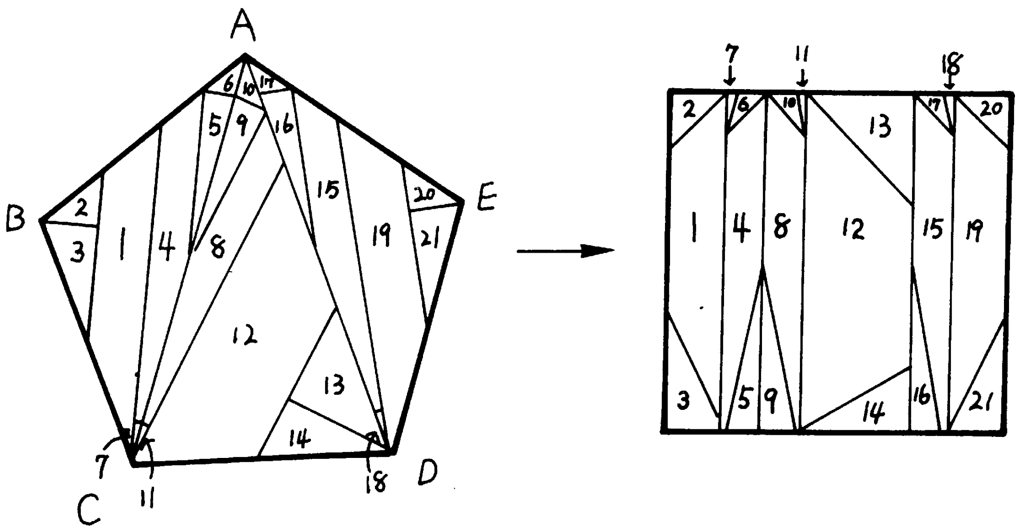
2.各三角形對應於$\overline{AC}$、$\overline{AD}$分別作高$\overline{BF}$、$\overline{DG}$、$\overline{EH}$。

3.設重組後正方形邊長L，則正方形面積等於ABCDE之面積，即$L^2 = 1/2 \times \overline{AC} \times (\overline{BF}+\overline{DG}+\overline{EH})$我們可由$1/2\overline{AC}$及（$\overline{BF}+\overline{DG}+\overline{EH}$）以尺規作圖法求L長，如下圖：

4.以L決定△ABC、△ACD、△ADE重組切開線長，各三角形重組成寬L之長方形，再組合即成正方形



5.畫出完成圖如下：



(二)我們在多面體上的努力：

1.平面之後，我們進一步預測：任給兩個等體積的多面體，可以有限次平面分割其中一塊，再重組成與第二塊完全相同的多面體。

2.證明計劃：

(1)多面體可分割成有限個四面體。

(2)四面體可分割重組成平行六面體。

(3)平行六面體可分割重組成長方體。

(4)長方體可分割重組成指定邊長的另一長方體。

(5)切割重組對稱性成立。

(6)切割重組遞移性成立。

若以上六點均成立，我們就可仿平面上的方法，證明多面體上的預測是正確的。

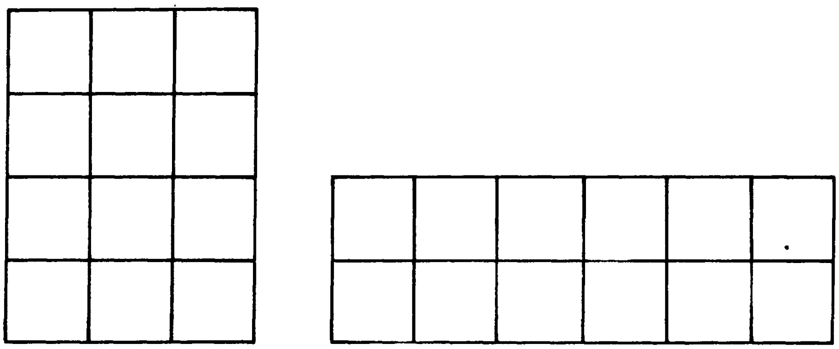
3.研究結果：

(3)、(4)被證明成立，(1)(5)(6)直觀感覺成立，但(2)四面體→平行六面體的證明遇到困難，企圖作否定證明亦感到無從入手。

4.後來由老師提供的歷史資料得知，已有人提出了多面體預測之反例。（見參考資料6.）

(三)我們曾經想要以我們的研究成果去處理智慧盤、七巧板及有條件的重組問題（見參考資料7.），但徒勞無功。

以下圖重組為例：



只要沿線將左邊圖形分割成小正方形，就能重組成右邊的圖形，但我們實在看不出這樣的方法與我們的研究有何關係，更何況其它更難的問題。我們的分割重組方法不容許對分割次數及形狀作約束。

五、總結

(一)研究成果總結

1.任給兩個等面積的多邊形，可以有限次直線分割一多邊形，再重組成與第二個多邊形完全相同的圖形。
2.我們提供的方法，是透過長方形來聯結形狀可能完全不相干的兩圖形。

㈡研究歷程總結

1.從無知到四邊形解法，到三角形時代，再到有勇氣向偉大定理挑戰，每一次的進步都令人振奮，但太多的突破卻也讓我們懷疑，研究成果之後可能還有一大片未被發現的天空。
2.想要將研究成果寫下時，才發現表達也非易事，例如，對於很直觀的切割重組遞移性，不知怎樣說才算證明。

六、參考資料

1.國中數學選修上册。
2.高中基礎數學第一册。
3.平面幾何（九章‧孫文光）
4.幾何學辭典（九章‧笹部貞市郎）
5.寓數學於遊戲（九章‧趙文敏）
6.數學史下册（九章‧林炎全、洪萬生、楊康景松譯）
7.趣味數學300題（凡異）、數學遊戲大觀Ⅱ（前程）、數學萬花筒（凡異）、金頭腦魔卡拼盤。

評語

本件作品的分割方式很好，而且與一般的分割方式不同，實有創新之思想。