二進位法在生活上的應用

國中組數學科第一名

台北縣立海山國民中學　　作　　者：郭嘉惠、楊琬宜
指導教師：姚銘義、莊振榮

一、研究動機

在一本「難題遊戲」裏，找到一種叫做NIM的遊戲，其中有些必勝的規則，讓我們產生很大的興趣，並引發我們研究其理論基礎，於是我們請教數學老師，老師給我們一本數學傳播季刊，並說明NIM遊戲規則及必勝方法的理論是利用二進位法的簡單理論稍加應用而已，我們覺得很神奇，這麼簡單的理論竟能發揮這麼大的功用，於是我們想必然還有其他的功用，平常愛好象棋的我，就開始想將這個理論應用在象棋的殘局上，因此我們就研究出一點小小的心得，提供參考。

二、研究目的

將數學理論推廣與日常生活相結合，以增加我們研究數學的興趣。

三、研究設備器材：

象棋、棋盤。

四、研究過程

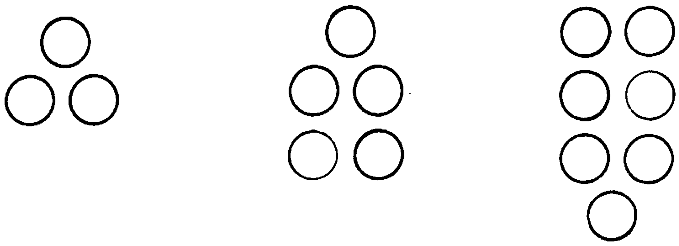
首先讓我們來介紹NIM遊戲，所謂NIM遊戲，就是使用硬幣，火柴棒、圍棋等東西，分成幾堆，兩人依照規則輪流取規定中的數目，取得最後一個的為負（或為勝）的遊戲，遊戲規則如下：

1.兩人輪流取，不可以超前。

2.拿取的支數（指火柴棒），從一堆之中一次取得幾支均無所謂，全部取掉使該堆除去也沒有關係，但是不可以在一堆取過之後，再去取其他第二堆的東西。

3.勝負的決定是：留下最後的一個，使對手去取，即可得勝，反之，留下一個時，輪到自己的話即是輸。

例：　一、　二、　三、



1.甲取走第二堆的一個→3　4　7
2.乙取走第一堆的二個→1　4　7
3.甲取走第三堆的二個→1　4　5
4.乙取走第二堆的二個→1　2　5
5.甲取走第三堆的二個→1　2　3
6.乙取走第三堆的一個→1　2　2
7.甲取走第一堆的一個→0　2　2
8.乙取走第二堆的一個→0　1　2
9.甲取走第三堆的二個→0　1　0　甲勝！

美國前哈佛大學副教授包頓將原來的3、5、7分別以二進位法表之：

$$
\begin{array}{rl}
3 = & 1\,1_2 \\
5 = & 1\,0\,1_2 \\
7 = & 1\,1\,1_2 \\
\hline
 & 2\,2\,3
\end{array}
$$

將各個位數相加，但不進位，若每一位數的和都是偶數就叫做安全殘局，若有一位或數位是奇數，則叫做不安全殘局，以上例即為不安全殘局，當甲自第二堆取走一個之後，變化如下：

$$\begin{array}{rrrr}
3 = & & 1 & 1_2 \\
4 = & 1 & 0 & 0_2 \\
7 = & 1 & 1 & 1_2 \\
\hline
 & 2 & 2 & 2
\end{array}$$

全部都是偶數，因此成為安全殘局，奠定後面勝利的基礎。

再舉一例如下：

$$\begin{array}{rrrrrr}
14= & & 1 & 1 & 1 & 0_2 \\
15= & & 1 & 1 & 1 & 1_2 \\
18= & 1 & 0 & 0 & 1 & 0_2 \\
22= & 1 & 0 & 1 & 1 & 0_2 \\
\hline
 & 2 & 2 & 3 & 4 & 1
\end{array}$$

上例有二位奇數為不安全殘局，因此先取者如能將之化為安全殘局，即可奠定勝利的基礎，我們只要在這些和為奇數的位數中，找出最左邊的一位，本例中當然是第三位，在第三位中找到某一列，使其二進位表示法在此剛好是1，本例中，可以找14或15或22都可以，然後將此列的二進位表示法中，凡是和為奇數的都改變其數值，即原來若為0者，則變為1，反之原來若為1者，則變為0，本例若改變14這一列，則變化如下：

原來：

$$\begin{array}{rrrrrr}
14= & & 1 & 1 & 1 & 0_2 \\
15= & & 1 & 1 & 1 & 1_2 \\
18= & 1 & 0 & 0 & 1 & 0_2 \\
22= & 1 & 0 & 1 & 1 & 0_2 \\
\hline
 & 2 & 2 & 3 & 4 & 1
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & 0 & 1 & 1_2 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1_2 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0_2 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0_2 \\
\hline
2 & 2 & 2 & 4 & 2
\end{array}$$

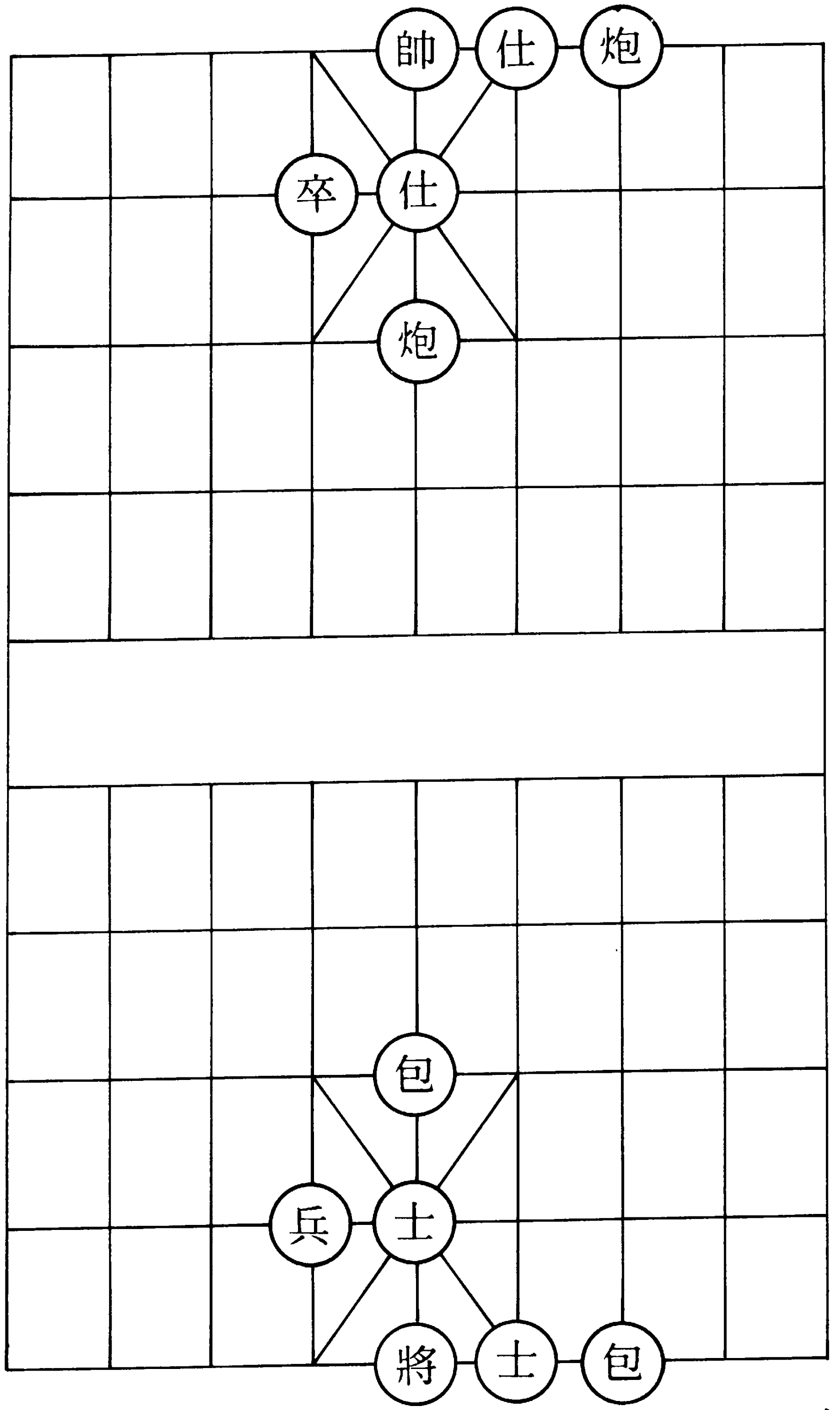
亦即將$1\ 1\ 1\ 0_2$改變為$1\ 0\ 1\ 1_2=11$，即將第一堆拿走3個即可成為安全殘局。

以上是有關於NIM遊戲，及其必勝法則的理論與實例，接下來我們將此理論應用在日常生活象棋中，在下列的殘局中，先走的若能

控制好步數即可獲勝，因此視同有二堆的NIM遊戲。

殘局如下：

一　二　三　四　五　六　七　八　九



一　二　三　四　五　六　七　八　九

殘局(一)

設紅方先走，必勝法如下：

1. 炮七進4
2. 包七進3
3. 炮五進3
4. 包五進1
5. 炮七進1
6. 包五退1
7. 炮五進1
8. 包七退1
9. 炮七進1
10. 包七退1
11. 炮七進1
12. 包七退1
13. 炮七進1

紅方勝！

此例相當於二堆：4，8

原局：

$$
\begin{array}{rcrcr}
4 & = & 1\,0\,0_2 & \rightarrow & 1\,0\,0_2 \\
8 & = & 1\,0\,0\,0_2 & & 1\,0\,0_2 \\
\hline
 & & 1\,1\,0\,0 & & 2\,0\,0
\end{array}
$$

因此紅方炮七進4即可奠定勝利的基礎。

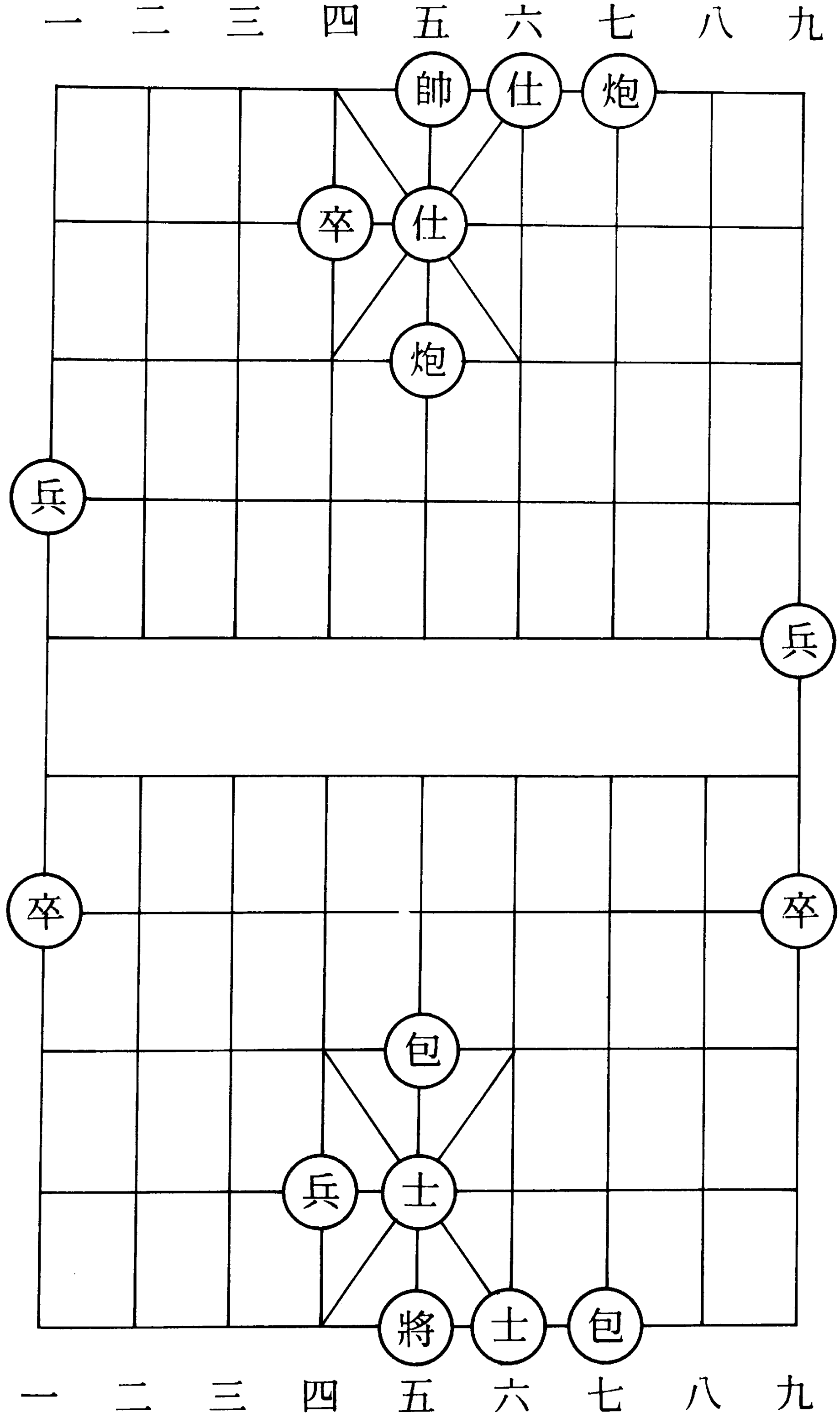
再看下列的殘局：

如殘局㈡

此例相當於三堆　1，4，8

$$
\begin{array}{rcrcr}
1 & = & 0\,0\,0\,1_2 & & 0\,0\,0\,1_2 \\
4 & = & 0\,1\,0\,0_2 & \rightarrow & 0\,1\,0\,0_2 \\
8 & = & 1\,0\,0\,0_2 & & 0\,1\,0\,1_2 \\
\hline
 & & 1\,1\,0\,1 & & 2\,0\,2
\end{array}
$$

因此只要炮先七進3，即可奠定勝利的基礎。



殘局(二)

此外，尚可在第三行中，兵、卒的位置上，增加兵和卒，而成為四堆的情況，但兵和卒不可增加在第五或第七行，否則炮可跳開，便無法適用此理論了。

五、研究結果

利用二進位法的理論以及對稱的觀念，可將此理念引進日常生活中象棋的殘局上。

六、討論

㈠殘局二中，第一行的兵和卒雖然相距2個空位，但只能視同1個空位，而第九行中的兵和卒，雖然尚有1個空位，但要視同沒有空位，因只要再上前，就會被對方吃掉而導致失敗。

㈡此種殘局最多可擴充到五堆，即1，1，1，4，8的情況，其中1即指兵和卒所在的行，而4和8則為炮所在的行。

㈢在本文NIM遊戲中，是取最後一個的為負，而象棋殘局中，則為取最後一個者為勝，其中只有在最後的取法稍有差別，而整個理念都可適用。

七、結論

NIM遊戲中所用到的二進位法的理論及對稱觀念，我們可將其推廣在象棋的殘局上，利用這種理念即可使其致勝。

八、參考資料

數學傳播季刊第三卷第二期。

評語

本件作品是將平常的一種遊戲利用數學方式導出必勝法則，尤其可貴的是能將此種法則改用在下象棋之入局上，相當難得。