

# 不可思議的軌跡之研究

## 國中組物理科第二名

台北縣私立光仁高級中學

作者：黃道恆、連 群

指導教師：黃德亮

### 一、研究動機

由於參觀臺中自然科學博物館中的砂擺和去年“擺動與振動交替變換”作品榮獲全國優勝的影響，而讓我們對不同情況下物體擺動的軌跡產生極濃厚的興趣，因此我們希望能繼續對它們作更深一層的探討和瞭解作為第二期研究計劃。

### 二、研究目的

1. 探討擺錘質量對Y型擺的軌跡重返週期的關係。
2. 探討擺錘質量對Y型擺軌跡圖形的關係。
3. 探討擺繩夾角與Y型擺軌跡重返週期的關係。
4. 探討擺繩夾角與Y型擺軌跡圖形的關係。
5. 探討擺長比例與Y型擺軌跡重返週期的關係。
6. 探討擺長比例與Y型擺軌跡圖形的關係。

### 三、研究設備器材

線 天平 支架 碼錶 光電計時器 照相機 錄放影機 尺  
攝影機 量角器

## 四、研究步驟

1. 控制擺長的比例和擺線的夾角，而改變擺錘的質量，測出擺動週期和軌跡重返週期，同時也記錄和拍攝下擺動的軌跡，以探討擺錘質量和軌跡圖形，軌跡重返週期的關係。

2. 控制擺錘的質量和擺長比例，而改變擺線的夾角，測出擺動週期和軌跡重返週期，同時也記錄和拍攝下擺動的軌跡，以探討擺線夾角和軌跡圖形，軌跡重返週期的關係。

3. 控制擺錘的質量和擺線的夾角，而改變擺長的比例，測出擺動週期和軌跡重返週期，同時也記錄和拍攝下擺動的軌跡，以探討擺長比例和軌跡圖形，軌跡重返週期的關係。

4. 尋找出影響軌跡重返週期及擺動軌跡的因素，並分析出其關係。

5. 隨意抽樣以驗證關係是否成立。

## 五、研究結果

1. 由步驟(1)測得擺錘質量和擺動週期，軌跡重返週期的數據以及拍攝的軌跡圖片分別如下：（因受版面限制省略）

(a) 擺錘質量和週期數據：

(b) 擺錘質量和軌跡重返週期數據：(c) 由步驟(1)拍攝擺動軌跡：

2. 由步驟(2)測得擺線夾角和擺動週期，軌跡重返週期的數據以及拍攝的軌跡圖片如下：

(a) 擺線夾角和擺動週期數據：略

(b) 擺線夾角和軌跡重返週期數據：略


(c) 由步驟(2)拍攝下擺動軌跡：（因受版面限制省略）

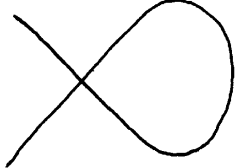
3. 由步驟(3)測得擺長比例和擺動週期，軌跡重返週期的數據以及拍攝的軌跡圖片分別如下：

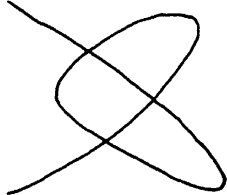
A. 固定Y型擺全長 $L_1$ ，改變下段長 $L_2$ ：

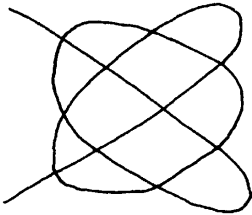
(a)擺長比例和擺動週期數據：（因受版面限制省略）

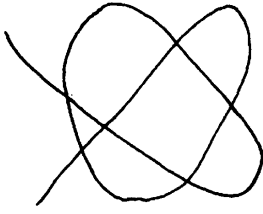
(b)擺長比例和軌跡返週期數據：

組別		L1:L2		擺錘質量	角度（度）	L1(cm)	L2(cm)
A2-L21		4:1		100 (g)	60	100	25
	次數	時間	週期（秒/次）	擺動軌跡			
1	2	40.80	20.40				
2	2	40.70	20.35				
3	2	40.72	20.36				
4	2	40.82	20.41				
5	2	40.74	20.37				
週期平均值(秒/次)			20.38				

組別		L1 : L2		擺錘質量	角度（度）	L1(cm)	L2(cm)
A2-L22		9 : 4		100 (g)	60	100	44.5
	次數	時間	週期（秒/次）	擺動軌跡			
1	2	38.30	19.15				
2	2	38.00	19.00				
3	2	38.26	19.13				
4	2	38.06	19.03				
5	2	37.94	18.97				
週期平均值(秒/次)			19.06				

組別	L1:L2	擺錘質量	角度(度)	L1(cm)	L2(cm)
A2-L23	16:9	100(g)	60	100	56.3
	次數	時間	週期(秒/次)	擺動軌跡	
1	2	34.46	17.23		
2	2	34.00	17.00		
3	2	34.00	17.00		
4	2	34.20	17.10		
5	2	34.49	17.25		
週期平均值(秒/次)			17.10		

組別	L1:L2	擺錘質量	角度(度)	L1(cm)	L2(cm)
A2-L25	36:25	100(g)	60	100	69.5
	次數	時間	週期(秒/次)	擺動軌跡	
1	2	16.00	8.00		
2	2	15.94	7.97		
3	2	16.12	8.06		
4	2	15.92	7.96		
5	2	15.98	7.99		
週期平均值(秒/次)			7.80		

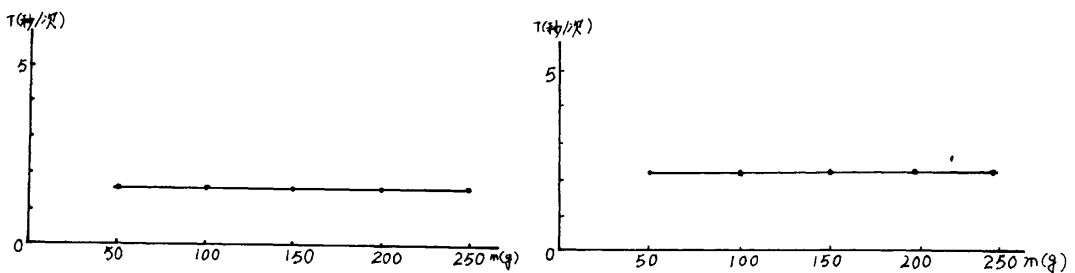
組別	L1:L2	擺錘質量	角度(度)	L1(cm)	L2(cm)
A2-L24	25:16	100(g)	60	100	64
	次數	時間	週期(秒/次)	擺動軌跡	
1	2	21.28	10.64		
2	2	21.44	10.72		
3	2	21.24	10.62		
4	2	21.60	10.80		
5	2	21.36	10.68		
週期平均值(秒/次)			10.69		

- (c)由步驟(3)拍攝下擺動軌跡：略
- B. 固定Y型擺下段L2，改變全長L1：
- (a)擺長比例和擺動週期數據：
- (b)擺長比例和軌跡重返週期數據：
- (c)拍攝的軌跡圖形：
- (因受版面限制省略)
- C. 改變Y型擺全長L1及下段L2：
- (a)擺長比例和擺動週期數據：
- (b)擺長比例和軌跡重返週期數據：
- (c)由步驟(3)拍攝下擺動軌跡：
- (因受版面限制省略)

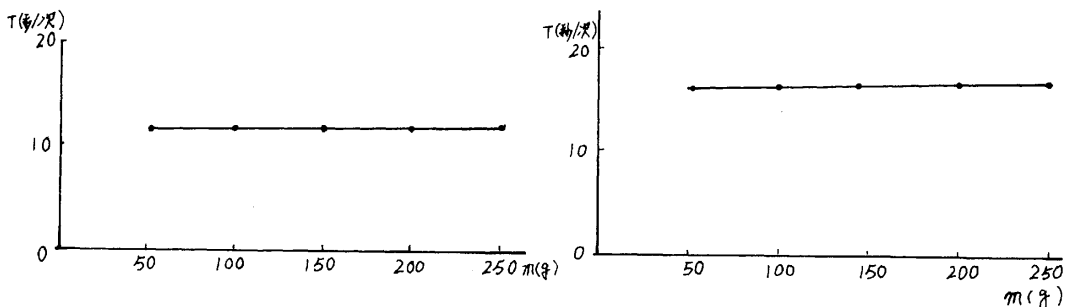
## 六、研究討論

1. 當擺長比例和擺線夾角控制不變的情況下：

- (a)採結果1(a)數據畫出擺動週期與擺錘質量的關係圖如下：  
由此可知擺錘質量與擺動週期無關。

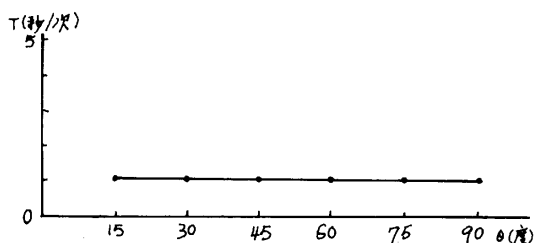
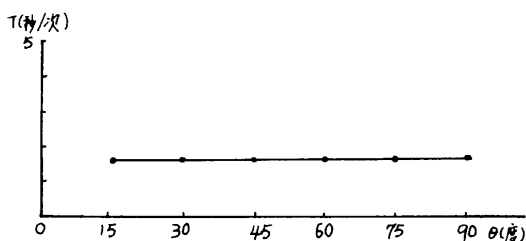


(b)採結果1(b)數據畫出軌跡重返週期與擺錘質量的關係圖如下



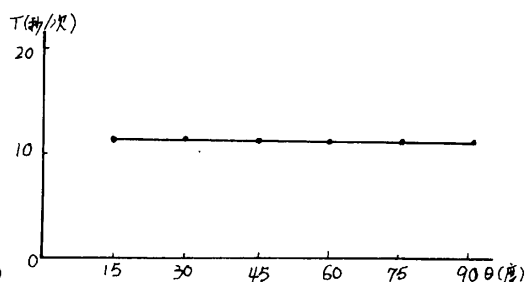
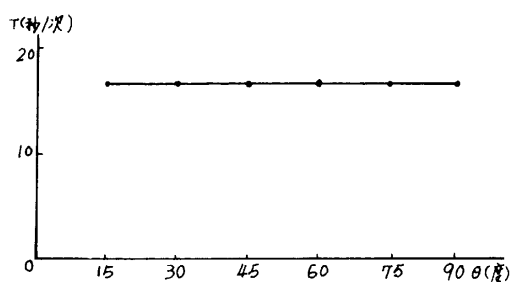
(c)由結果1(c)所拍攝下的擺動軌跡，發覺擺錘質量改變並不影響擺動的軌跡。

2. 在擺錘質量和擺長比例控制不變的情況下：



(a)採結果2(a)數據畫出擺動週期與擺線夾角的關係圖如上：由圖表可知擺線夾角與擺線週期無關。

(b)採結果2(b)數據畫出軌跡重返週期與擺線夾角的關係圖如下：由圖表可知擺線夾角與軌跡重返週期無關。



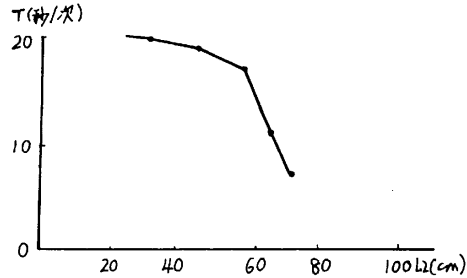
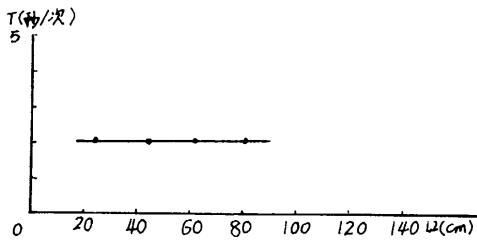
(c)由結果2(c)所拍攝下的擺動軌跡分析，發覺擺線夾角的改變，並不影響擺動的軌跡。

3. 在擺錘質量和擺線夾角控制不變的情況下：

A. 固定Y型擺全長 $L_1$ ，改變下段長 $L_2$ ：

(a)利用結果3A(a)，畫出擺動週期與擺長比例的關係圖（但因 $L_1$ 不變，即是畫擺動週期與 $L_2$ 的關係圖）如(a)：由圖表可知擺長全長 $L_1$ 固定，下段長 $L_2$ 改變時，並不影響擺動週期。

(b)採結果3A(b)畫出軌跡重返週期與擺長比例的關係圖如(b)：（同(a)之理由，擺長比例可以 $L_2$ 代替）由圖表可知擺長全長 $L_1$ 固定，下段長 $L_2$ 減短時（即 $L_1/L_2$ 比值變大）軌跡重返週期變大

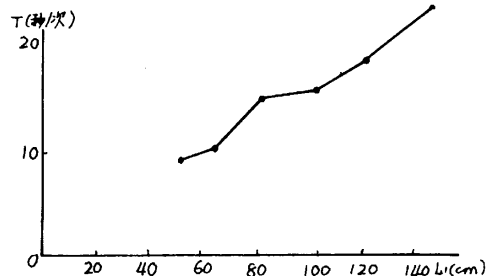
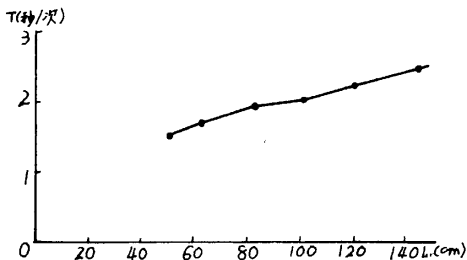


(c)由結果3A(c)所拍攝下的擺動軌跡，發覺擺長比例的改變會影響擺動軌跡，當擺長比例愈小，擺動軌跡也愈形複雜，如圖所示。

### B. 固定Y型擺下段L2，改變全長L1：

(a)利用結果3B(a)，畫出擺動週期與擺長比例的關係圖（但因L2不變，即是畫擺動週期與L1的關係圖）如(a)：由圖表可知全長L1愈長而L2固定時，擺動週期愈大。

(b)採結果3B(b)畫出軌跡重返週期與擺長比例關係如(b)：（同(a)之理由，擺長比例可用L1代替）由圖表可知當L2固定，全長L1愈長，軌跡重返週期愈大。



(c)由結果3B(c)所拍攝的擺動週期，發覺擺長全長的改變並不會影響擺動的軌跡，而是全長L1與下段長度L2的比值才會影響擺動軌跡，即L1與L2比值愈大擺動軌跡也愈形複雜。

### C. 改變Y型擺全長L1及下段L2：

(a)利用3C(a)，3A(a)的結果分析得知：擺長比例與擺動週期無關，但擺長全長會影響擺動週期，擺長愈長，擺動週期愈大

- (b)利用3C(b)的結果分析得知：全長 $L_1$ 與下段長度 $L_2$ 的比值愈大，軌跡重返週期愈大。
- (c)利用3C(c)的結果分析得知：全長 $L_1$ 與下段長度 $L_2$ 的比值愈大，軌跡愈形複雜。
4. 當上半段擺長縮短時，其擺動軌跡將接近單線的結果（由3C的各圖形分析和比較可知）
  5.  $L_1$ 為整個系統的擺長，其所形成的週期為 $T_1$ 因為上段V字形部分只朝一定的方向移動，所以形成在圖形上的鉛直移動力。 $L_2$ 為整個系統的擺長，其所形成週期為 $T_2$ ，因為下段之單擺可朝任何方向擺動，所以形成在圖上的水平移動力。由於這兩個力的交互作用，所以擺錘必沿合力方向移動。又因為這個擺動受了兩個週期 $T_1$ ， $T_2$ 影響，所以合力方向會使軌跡彎曲折返，對整體而言， $T_1$ 和 $T_2$ 結合成一個 $T$ 週期，所以擺錘會依原路徑往返數次而無任何失誤。（可由拍攝的照片上看出）
  6. 由軌跡重返週期的數據分析可知，雖然每次的路徑不同，但來回一次的時間卻與擺動相近。
  7. 由於我們調整結點的位置，而得到不同的 $L_1$ 和 $L_2$ 值，因 $L_1$ 和 $L_2$ 的比值不同，所以 $T_1$ 和 $T_2$ 的比值自然不一樣，而所畫出的圖形當然不同。因此我們可以由圖形判斷週期比。
  8. 由於以上數據分析可知，只要擺長的比例不變，擺錘無論從什麼角度擺動，或擺動的高低不同，軌跡圖形的內容都會相同，差異的只不過是“長短寬窄”不同而已。

## 七、研究結論

1. 由所獲的結果和討論分析對形成假說的考驗如下：
  - a.（擺錘質量對Y型擺的軌跡重返週期沒有影響）是正確的。
  - b.（軌跡的圖形會隨著擺錘質量愈大而愈形複雜）是不正確的而它的軌跡圖形不受到擺錘質量所影響。
  - c.（擺錘夾角對Y型擺的軌跡重返週期沒有影響）是正確的



- - d. (軌跡圖形會隨著擺繩夾角愈大，愈形複雜)是不正確的，而它的軌跡圖形不會受到擺繩夾角所影響。
  - e. (擺長的比例愈大，Y型擺軌跡重返週期也愈大)是正確的。
  - f. (軌跡形狀會隨著擺長比例增大而愈形複雜)是正確的。
2. a. Y型擺的擺錘質量和擺繩的夾角對擺動週期，軌跡重返週期及軌跡圖形都無關。
- b. Y型擺的擺長會影響擺動週期和軌跡重返週期，即擺長愈長擺動週期和軌跡重返週期也愈大，但所擺出的軌跡卻不一定都不相同，只要擺長比例 ( $L_1:L_2$ ) 一定，所產生的軌跡圖形仍然相同。例如： $L_1=40\text{cm}$ ， $L_2=10\text{cm}$ 和 $L_1=80\text{cm}$ ， $L_2=20\text{cm}$ 比例都為4:1，所以其軌跡圖形相同。
- c. 當擺長全長不變時，全長 $L_1$ 與下段長度 $L_2$ 的比值愈大，其軌跡重返週期愈大，軌跡也愈形簡單。
- d. 只要擺長比例不變，擺錘擺出的角度或擺動高低的不同，對軌跡圖形的內容是毫無影響，但只是改變圖形的長短寬窄而已。
- e. 由於一定的擺長比例就有一定的軌跡，因此我們可以由軌跡推斷其擺長比例或週期。

## 八、參考資料

高級中學物理 國立編譯館 高中物理 吳友仁 東華書局  
 攝影光質研究與表現技巧 廖敏華 五洲出版社  
 (第十七章 光軌攝影) 國中理化 國立編譯館  
 科學中心展示說明書 國立自然科學博物館

## 評語

本作品以數種方式顯示Y形擺振動的軌跡，並歸納發現軌跡轉折的特性與擺線長度間的關係，頗富創意。