

判斷雙星方法的研究

高中組地球科學科第三名

臺南一中

作 者：陳盈谷、楊義清
鄭君宏
指導教師：黃芳男

一、研究動機

平日天文觀測或攝影時，經常發現照片上有很多靠近的星球，必須多方查閱文獻後，才能知道他們是否為雙星系統，深覺麻煩與困擾。因此引發我們想要以較為簡便的方法，判斷其是否為雙星，甚至更進一步想要知道兩顆獨立的星球，是否有可能因接近而吸引形成雙星。

二、研究目的

找出能以質量、速度和距離判斷雙星的條件，並設計能繪出其運行軌道的簡便電腦程式，以供做為研判週期較長雙星的工具。

三、研究方法

1. 將自己觀測的資料和文獻查出的資料，歸納出雙星系統的現象。
2. 利用歸納出的現象，定出星球所具各種力學能的假設——束縛能 \leq 動能 $<$ 脫離能，找出星球質量，速度和距離的變化範圍，以做為研判的依據。

3. 利用〔數學在天文學中之運用〕一書中，所提到的“天體運行的線速度（活力公式）”找出星球質量，速度和距離的變化範圍，以做為研判的依據。
4. 利用萬有引力公式和動量公式寫出兩顆星運行軌道的電腦程式，並將符合上述變化範圍的數值輸入，以驗證上述變化範圍的正確性。
5. 以上述2和3的變化範圍，利用電腦程式繪出的軌道圖形，做為判定某兩顆星是否為雙星的依據。

四、研究器材

16位元電腦 列表機

五、研究結果

1. 雙星定義：兩顆繞共同質心的恆星
2. 經查閱有關雙星長期觀測的文獻資料及分析自己觀測拍攝的照片後，發覺：
 - (1)形成雙星系統的兩星因萬有引力，而以共同質心為中心，互相繞轉，在重力場中一直維持平衡狀態。
 - (2)若將觀測者置於雙星中之一個上，則另一星球的軌跡呈現封閉性的圓錐曲線。
 - (3)假設雙星質量為 m_1 、 m_2 ，繞轉速度為 \vec{V}_1 、 \vec{V}_2 ，質心速度為 \vec{V}_{CM} ，根據 $\frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{m_1 + m_2} = \vec{V}_{CM}$ 若 $\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\Delta\vec{V}_2|}{|\Delta\vec{V}_1|}$ ，則質心不移動，否則質心會產生等速運動。
 - (4)以古典力學對雙星系統做分析：
 $r_1 = m_2 r / (m_1 + m_2)$, $r_2 = m_1 r / (m_1 + m_2)$; 故 $r_1 / r_2 = m_2 / m_1$ 。
 又 $m_1 \frac{(\Delta\vec{V}_1)^2}{r_1} = \frac{Gm_1m_2}{r}$ ，則 $(\Delta\vec{V}_1)^2 = \frac{Gm_2^2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{r}$ ，

所以 $(\Delta \vec{V}_1)^2 \propto \frac{1}{r}$ 。同理 $(\Delta \vec{V}_2)^2 = \frac{Gm_1^2}{m_1+m_2} - \frac{1}{r}$

, 則 $(\Delta \vec{V}_2)^2 \propto \frac{1}{r}$ [假設雙星距離為 r , r_1 、 r_2 分別為兩星到質心的距離, $\Delta \vec{V}_1$, $\Delta \vec{V}_2$ 分別為兩星相對於質心的速度]

而且 $\frac{|\Delta \vec{V}_1|}{|\Delta \vec{V}_2|} = m_2 / m_1$

3. 如圖1及圖3中, 較大者為Star 1, 較小者為Star 2。以Star 1不動, 則Star 2必繞Star 1而行。以雙星的能量狀況而言:

總能=位能+線動能+角動能

線動能: $\frac{1}{2} m \vec{V}^2$, 角動能: $\frac{1}{2} I W^2$

以Star 1不動, 則Star 2的質量為約化質量 $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, 速度為兩星的相對速度 $\Delta \vec{V}$ 。

上限: 角動能為零, 總能為負值。

下限: 圓形軌道束縛能不大於角動能

則 $\frac{1}{2} \frac{Gm_1 m_2}{r} \leq \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\Delta \vec{V})^2 < \frac{Gm_1 m_2}{r}$, 故 $G \leq \frac{r (\Delta \vec{V})^2}{m_1 + m_2} < 2G$

4. 利用從〔數學在天文學中之運用〕書中所得之公式, 我們亦設Star 1不動, 所以Star 2的軌跡要符合公式:

$(\Delta \vec{V})^2 = G (m_1 + m_2) (2/r - 1/a)$ [a 表 Star 2 軌跡中的長半軸]

當 $a = r$ 時, 軌跡為圓形 $1/a = 1/r$

$a \rightarrow \infty$ 時, 軌跡為橢圓形 $1/a \rightarrow 0$

則以軌跡呈封閉的圓錐曲線, 必然

$G (m_1 + m_2) (2/r - 1/r) \leq (\Delta \vec{V})^2 < G (m_1 + m_2) \cdot \left(\frac{2}{r} - 0\right)$ 故 $G \leq r (\Delta \vec{V})^2 / m_1 + m_2 < 2G$

5. 電腦程式

(1) 根據萬有引力公式 $F = Gm_1 m_2 / r^2$, 及動量公式 $F \cdot \Delta t = m \cdot$

($\Delta \vec{V}$)，則Star 1的運動($\Delta \vec{V}_1$)= $\frac{Gm_2}{r^2} \Delta t$ ，則Star 1的新

位置為(x'_1, y'_1)=(x_1, y_1) + ($\vec{V}_1 \cos \theta, \vec{V}_1 \sin \theta$) Δt

+ [$\Delta(\vec{V}_1) \cos \theta, \Delta(\vec{V}_1) \sin \theta$] Δt ，則 $\vec{V}'_1 = \vec{V}_1 + \Delta(\vec{V}_1)$
同理Star2的新位置

(x'_2, y'_2)=(x_2, y_2) + ($\vec{V}_2 \cos \theta, \vec{V}_2 \sin \theta$) Δt + [$\Delta(\vec{V}_2) \cos \theta, \Delta(\vec{V}_2) \sin \theta$] Δt ，則 $\vec{V}'_2 = \vec{V}_2 + \Delta(\vec{V}_2)$

(2)再者，我們以三度的笛卡兒座標表示Star 1與Star 2的位置，也同樣以萬有引力公式 $F = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$ 及動量公式 $F \cdot \Delta t = m \cdot$

(ΔV)求出Star 1與Star 2的新位置。由於三度的笛卡兒座標不易在螢幕上表現出來，於是我們將其轉換成極座標，取(θ, ϕ)數對，而以 θ 為縱座標， ϕ 為橫座標。表現在螢幕上，其結果就如同在地球上觀看雙星一般。

[三度的笛卡兒座標與極座標之關係：

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \phi \\ y = r \cos \theta \sin \phi \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

r：星球到觀測者連線L之長度

ϕ ：L與XY平面的夾角

θ ：L在XY平面上投影與X軸的夾角了]

因此，據以設計電腦程式

6. 距離 $r \approx 7.06 \times 10^{11}$ m

速度 $\Delta \vec{V} = 1.4 \times 10^4$ m/s 假設是由垂直於兩星連接線的原始速度投影而成，應採用垂直於兩星連接線的原始速度 $\Delta \vec{V}_{\perp} = \sqrt{2} \times 1.4 \times 10^4$ m/s

G值為 6.67×10^{-11} m³/kg·s $1M_{\odot} \approx 2 \times 10^{30}$ kg

$$\frac{7.06 \times 10^{11} \times (\sqrt{2} \times 1.4 \times 10^4)^2}{6.67 \times 10^{-11} \times (2 \times 10^{30} + 2 \times 10^{30})} \approx 1.03$$

(介於1與2之間)

符合方法2、方法3、方法4，證明變化範圍具正確性。

STAR 1 DATA:

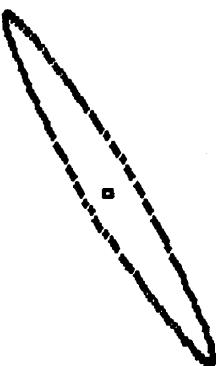
$X_0 = 250$ A.U.

$Y_0 = 150$ A.U.

$V_{x0} = 7000$ m/s

$V_{y0} = 0$ m/s

$M = 1$ Sun Mass



STAR 2 DATA:

$X_0 = 300$ A.U.

$Y_0 = 200$ A.U.

$V_{x0} = -7000$ m/s

$V_{y0} = 0$ m/s

$M = 1$ Sun Mass

六、結論

- 在每一瞬間所觀測到的相對於質心之速度比及距離比皆反比於質量比，其關係式為 $m_1 / m_2 = r_2 / r_1 = |\Delta \vec{V}_2| / |\Delta \vec{V}_1|$ 。
- 當二星距離和相對速度的平方乘積，除以二星質量和的商，在一倍到兩倍重力常數之間，則可表示此兩星為雙星系統，其條件為 $G \leq r (\Delta \vec{V})^2 / (m_1 + m_2) < 2G$
- 舉凡兩星距離、速度、質量，符合 $G \leq \frac{r (\Delta \vec{V})^2}{m_1 + m_2} < 2G$ ，並利用電腦程式模擬出來的圖形，即可據以研判其是否為雙星。
- 關於恆星的質量可用絕對光度求出大略的數值，尚無法得到誤差較小的數值。速度可用都卜勒效應求得。距離則可用視差法及三角測量法求得。

七、討論

- 在電腦模擬出來的圖形中，不難發現雙星之間的距離並非都維

持固定，而是有變化的。在所查閱的不少書中，將距離說為不變的值，似乎不太正確，而且根據天文觀測的資料顯示雙星間的距離沒有呈一定值。

2. 以處於質心的位置觀測，雙星各自的軌跡並非圓形，而是橢圓形，但是 $m_1 (\Delta \vec{V}_1)^2 / r_1 = Gm_1 m_2 / r$ 仍然適用。其解釋原因為兩星間的萬有引力等於當時所需的向心力。
3. 依據結果2和結果3可以發現 m_1 / m_2 大於3時，這種雙星軌道的型式是可以存在。但在實際觀測中卻沒有發現。當然並不排除這種雙星的存在。但是發現雙星在最接近時，由於距離太近有可能發生兩星物質轉換、潮汐效應等現象，以致使這種雙星產生變化而不存在。
4. 以結論1，我們可將Dr. H Spencer—Jones所著〔普通天文學〕中所論述的“可見雙星主伴星質量比率在1.0~3.0之間”和“分光雙星主伴星質量比率在1.0~2.0之間”中的質量比率改為相對於質心的速度比率。
5. 對於雙星軌道模擬是一件頗繁雜之事，所以讓電腦去處理。但是程式過程中“INT”指令，以及電腦運算位數的限制造就了誤差的形成。
6. 在程式中， Δt 的取值雖然加快了程式的執行，但卻也是誤差的來源。
7. 天文單位、太陽質量、G值等用以比較或運算的數值如不精確，則對於運算的結果也會造成誤差。
8. 既已尋出雙星判定的方法，知道太陽質量及速度的資料。若將離太陽較近的恆星相關資料查出後，代入結論2，其若有符合者，便可稱為“太陽伴星之候選星”；若沒有符合者，可能此一恆星由於太暗，尚未被觀測到。

八、參考資料

1. Dr. H Spencer—Jones著：普通天文學：廣文書局；P. 253

2. 數學在天文學上之運用：凡異出版社，P229～P233
3. Herbert Goldstein著 古典力學：曉園出版社；P85～139
4. THE TEN BEST DOUBLE STARS : ASTRONOMY JULY, 1989 ; P88～91
5. SPLIT A STAR IN TWO : ASTRONOMY DECE, 1989 ; P78～83
6. LABORATORY EXERCISES IN ASTRONOMY—THE ORBIT OF A VISUAL BINARY : SKY & TELECOPE
7. ROBERT H. BAKER著 天文學：復漢出版社；P314～334

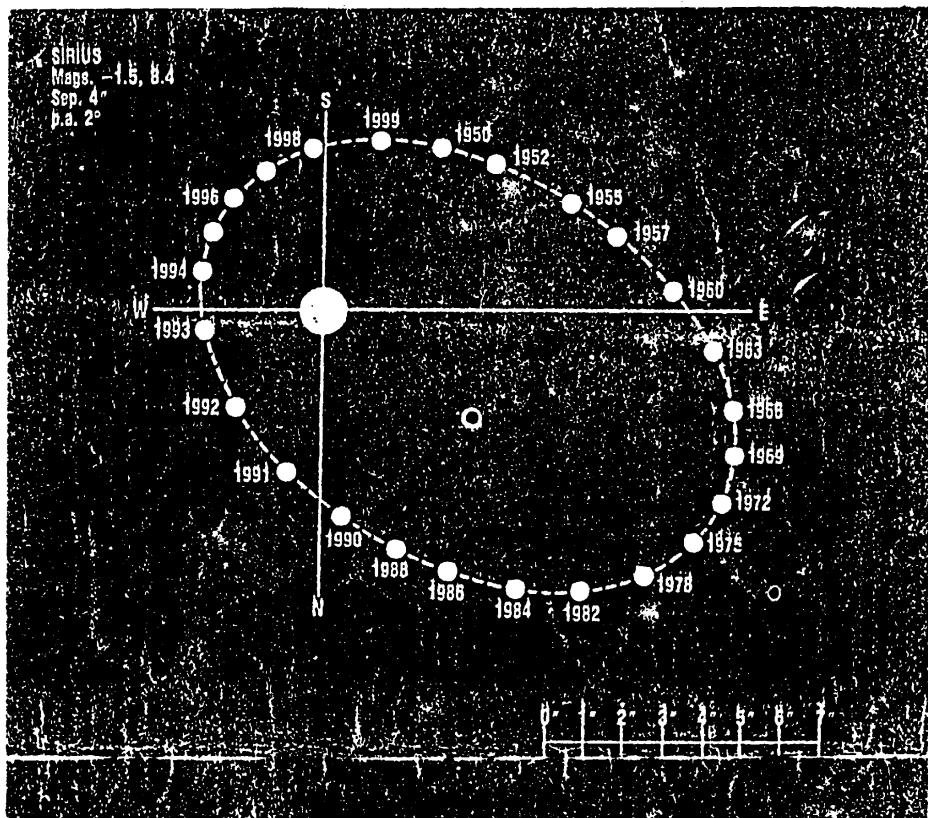


圖1. 天狼星伴星繞天狼星的軌道



圖2. 天狼星與其伴星

8英吋折射式望遠鏡200倍，f/ 10的光圈。由David J. Eicher拍攝

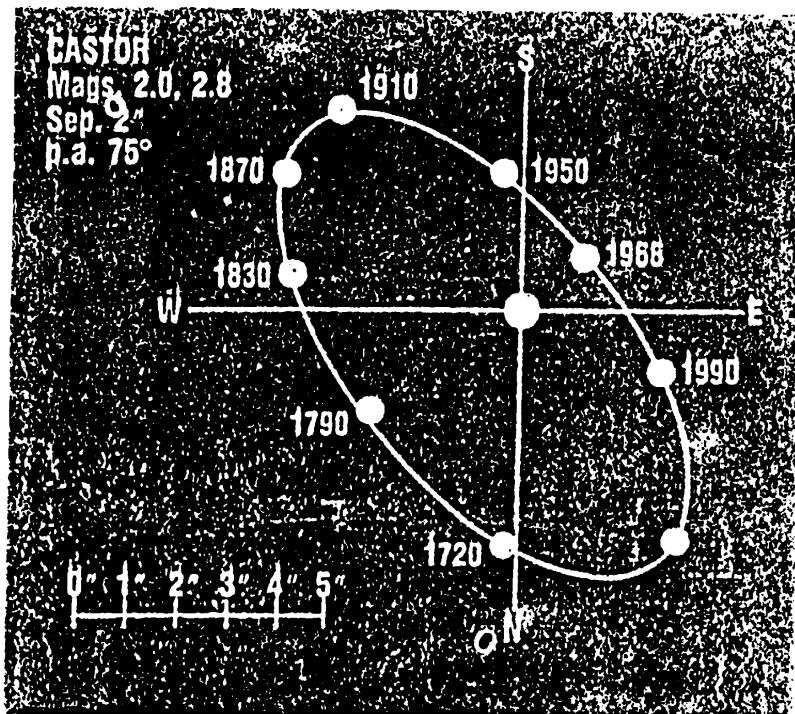


圖3. Castor B繞Castor A的軌道

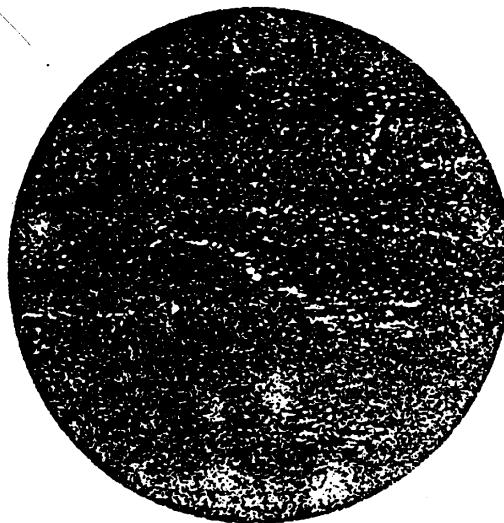


圖4. Castor與其伴星

3英吋反射式望遠鏡120倍， $f/10$ 的光圈。由Gienn F. Chaple, Jr. 拍攝

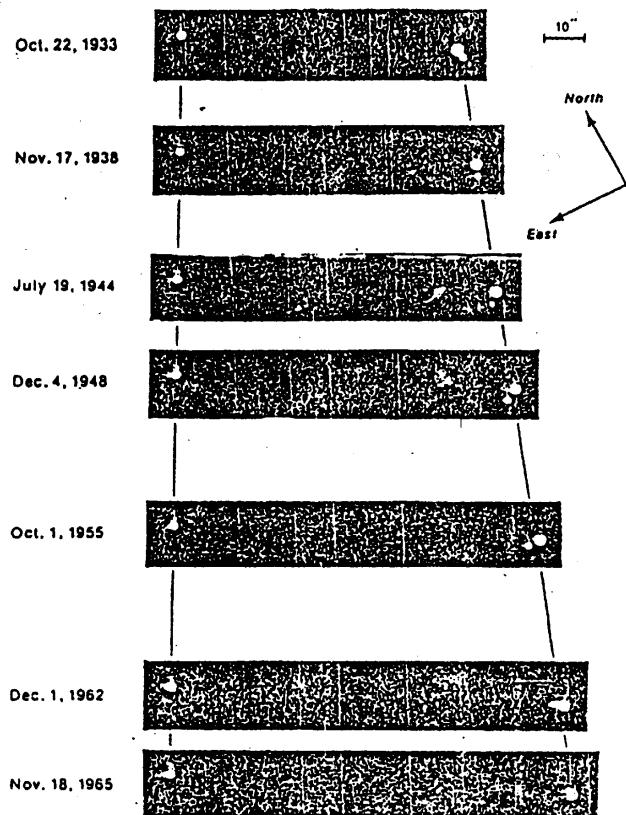


圖5. 分光雙星Krvger 60

評語

本研究用古典力學的公式，計算雙星軌跡速度。參考資料相當豐富，電腦模擬可信度頗高，圖形分為二維，三維狀況，經過極座標轉換，可以清晰的分析雙星相關位置、速度、週期，並參考觀測值比對，量化過程到達大學水準，根據所做結果，發現不少物理、數學的規律例如雙星軌跡並非圓形，雙星質量比例可以大於3，數值分析上採用時間差距含造成結果的影響。運算精確度，皆有適當的說明。本研究相當完整，數學方法與物理觀的結合亦屬成功。