尤拉環遊數的探討

高中組數學科第三名

臺灣省立嘉義高級中學

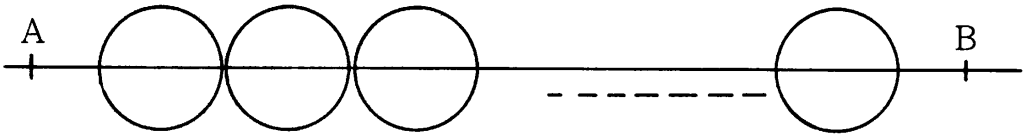
作　　者：黃書健

指導教師：陳獻平

一、研究動機：

在數學傳播第一卷第一期有一題是：

對於下例圖形A至B作「筆畫的走法」即每一弧線恰走過一次有幾種走法？



n個圓環首尾相接

Ans：$(3!)^n \cdot 2^{n-1}$

但如將AB合爲一點成一項鏈狀時，走法數又如何？

二、研究目的：

1. 研究n個點，相鄰二點間有m條線段相連，研究其一筆畫走法數。
2. 討論m π爲定值之情形。

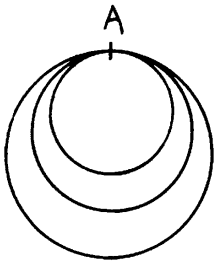
三、過程及結果：

(一)m＝3時

1．n＝1時　(1)三條線段次序不同有3！種

(2)僅考慮其走向之順、逆時針方向。

設由CCW起，分析過A，之走法數（$\xrightarrow{A_1\ 0}$ 爲經過，$\hookleftarrow^{A_1}_{O}$ 爲不經過）



(a)不過A_1者：　CCW,CW,CCW

(b)經A_1一次者：　CCW,CW,CW二種

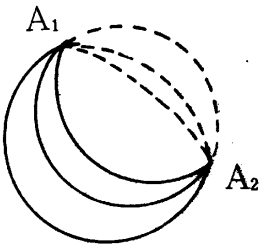
CCW,CCW,CW

(c)經A_1二次：　CCW,CCW,CCW

2.當n增加時

(1)將A_1分成二點，放入三條線段

(2)(a)原經$A_1$0次：



$A_1 \rightarrow \leftarrow \rightarrow A_2 \curvearrowright A_1$

餘下二線段必須成對放入

今有三處：$\rightarrow \alpha \leftarrow \beta \rightarrow r$

放入α，不經A_1

放入β：經A_1二次

放入r：不經A_1

(b)經A_1一次者：

$\rightarrow \alpha \leftarrow \beta \leftarrow r$，$\rightarrow \beta \rightarrow \alpha \leftarrow r$　　在β處用去一線段

放入α：　增0次

β　　增0次

r　　增1次

(c)經A_1二次者：

$A_1 \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow A_2$ r A_1

在α，β，r各用去一線段，用完三線段，故保持經A_1二次。

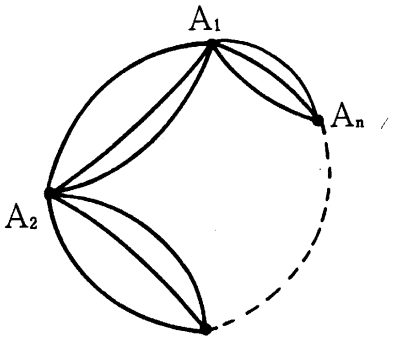
3.如2.所討論者：每次n增加時對走法數的影響取決於原先經A_1之次數。

以$f_3(x,y)$表m＝3，n＝y時經A_1 x次之走法數（不考慮3！之倍數）

得：$f_3(0,n)=2f_3(0,n-1)$

$f_3(1,n)=2f_3(1,n-1)$

$f_3(2,n)=f_3(0,n-1)+f_3(1,n-1)+f_3(2,n-1)$



又 $f_3(0,1)=1$

$f_3(1,1)=2$

$f_3(1,2)=1$

故得：$f_3(0,n)=2^{n-1}$

$f_3(1,n)=2^n$

$f_3(2,n)=3.2^{n-1}-2$

得n個點，m＝3時A_1-A_1一筆畫走法數為$2.(3!)^n\cdot(f_3(0,n)+f_3(1,n)+f_3(2,n))=(3!)^n.(3.2^{n+1}-4)$

(二)m≥3時：

1.估(一) 分A_1為二點放入m條線段研究其經A_1點次數的變化定義以下代號：

x：經A_1之次數

a_0：放入S會增加經A_1 0次者

a_1：放入S會增加經A_1 1次者

a_2：放入S會增加經A_1 2次者

s：一組的二條線段

b：餘下S數

（為不改變原先之走法，放入線段時 必須成對放入才可）

m定值時： $n=1$

$a_2=[m-x-1/2]$

$a_1=(-1)^{m-x}+1/2$

$a_0=[m+x+1/2]$

$b=[m-x/2]$

當n增大時：若x增加，乃因a_2，a_1被使用所致，而a_2，a_1一經使用（放入s）即轉為a_0。故由上可知$\forall_n \in N$對同一x，（a_2，a_1，a_0，b）皆同。

2.考慮遞迴關係：

(1)x增加2k次之法：

$C_k^{a_2}\cdot H_{b-k}^{a_0+k}$ 即在a_2中取k個，各放一個s，再由a_0+k個增0次的地方可重複地取b－k處各放一個s

(2)x增2k＋1次之法：

$C_k^{a_2}\cdot a_1.H_{b-k-1}^{a_0+k+1}$ ： a_2中取k個

a_1中取

a_0+k+1中重複取b－k－1個

故可得遞迴關係如下：

$$\begin{cases} f_{2p}(2\ell,n)=\sum_{i=0}^{\ell} C_{\ell-i}^{p-i-1}\cdot C_{p-\ell}^{2p-1}\cdot f_{2p}(2i,n-1) \\ f_{2p}(2\ell+1,n)=\sum_{i=0}^{\ell} C_{\ell-i}^{p-i-1}\cdot C_{p-\ell-1}^{2p-1}\cdot[f_{2p}(2i,n-1)+f_{2p}(2i+1,n-1)] \end{cases}$$

$$f_{2p+1}(2\ell,n)=\sum_{i=0}^{\ell} C_{\ell-i}^{p-i}\cdot C_{p-\ell}^{2p}\cdot f_{2p+1}(2i,n-1)$$

$$+\sum_{i=0}^{\ell-i} C_{\ell-i-1}^{p-i-1} \cdot C_{p-\ell}^{2p} \cdot f_{2p+1}(2i+1,\ n-1)$$

$$f_{2p+1}(2\ell+1,\ n)=\sum_{i=0}^{\ell} C_{p-\ell-1}^{p-i} \cdot C_{p-\ell}^{2p} \cdot f_{2p+1}(2i+1,\ n-1)$$

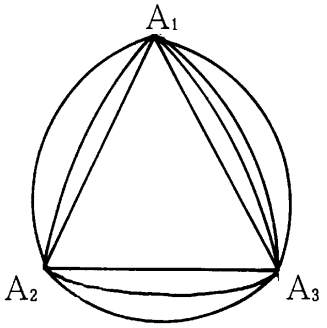
初始條件：$f(x,\ 1)=C_x^{m-1}$

其一筆畫走法數為 $2(m!)^n \cdot \sum_{x=0}^{m-1} f_m(x,\ n)$

$$=2(m!)^n \cdot f_m(m-1,\ n+1)$$

㈢ m不為定值時：舉二例說明之

1.（m）=3，3，5



由A_1—A_1

(a)①由A_1—A_2起走：［1，2，1］

②A_2—A_3：$[1,\ 2,\ 1]\times\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}=[2,4,4]$

③A_3—A_1

$[2,\ 4,\ 4]\times\begin{bmatrix}3&0&3\\0&3&3\\0&0&3\end{bmatrix}=[6,\ 12,\ 30]$

(b)由A_1—A_3起：

［1，4，6，4］

A_3—A_2:

$$[1,\ 4,\ 6,\ 4]\times\begin{bmatrix}3&0&2&0\\0&3&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=[3,\ 12,\ 12,\ 8]$$

A_2—A_1

$$[3,\ 12,\ 12,\ 8]\times\begin{bmatrix}2&0&2&0\\0&2&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=[6,\ 24,\ 30,\ 20]$$

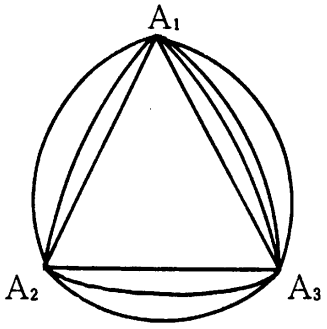
(c)總共：

$$(3!)^2\cdot 5!\cdot(6+12+30+6+24+30+20)=(3!)^2\cdot 5!\cdot 128$$

2.（m）=3, 3, 4

(a)①由A_1—A_2: [1, 2, 1]

$$A_2\text{—}A_3\ [1,\ 2,\ 1]\times\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}=[2,4,4]$$



A_2—A_1:

$$[2,\ 4,\ 4]\times\begin{bmatrix}3&0&3\\0&0&3\\0&0&3\end{bmatrix}=[6,\ 0,\ 30]$$

共36

(b)由A_1—A_3

①[1, 3, 3, 1]

②A_3－A_2:

$$[1,\ 3,\ 3,\ 1]\times\begin{bmatrix}0&3&0&1\\0&3&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}=[0,\ 12,\ 0,\ 8]$$

③A_2—A_1:

$$[0,\ 12,\ 0,\ 8]\times\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&2&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=[0,\ 24,\ 0,\ 20]$$

共44

∴由(a)＋(b)知走法數共：

$$(36+44)\ .\ (3!)^2\ .\ 4!$$
$$=80\ .\ (3!)^2\ .\ 4!$$

四、討論與結論

㈠利用本方法可得任意m, n,∈N, A_1—A_1之一筆畫走法數：

㈡對$f_m(x, n)$之遞迴式，可由x＝0, 1, 2,……逐步解得為 $f_m(x, n) = a\ f_m(x, m-1) + H(n)$ 其中a為常數，H(n)為n之函數之形式。

㈢m非定值亦可解之。

㈣x＝0之f即如動機中 A—B之解

五、參考資料

一、數學傳播第一卷第一期 P.108～P.109

二、圖形論及其應用。

六、附錄：

(一)m=4

$$f:[1,\ 3,\ 3,1]\times\begin{bmatrix}3&3&3&1\\0&3&0&1\\0&0&3&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{n-1}$$

$$=[3^{n-1},(n+.3^{n-1}).3^{n-1},(n+2).3^{n-1},(n+1).3^{n-1}-1]$$

(二)m=5

$$f:[1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1]\times\begin{bmatrix}6&0&8&0&1\\0&6&4&4&1\\0&0&4&0&1\\0&0&0&4&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}^{n-1}$$

$$=[6^{n-1},4\cdot6^{n-1},2\cdot6^{n}-6\cdot4^{n-1},8\cdot6^{n-1}-4^{n},5\cdot6^{n-1}-\frac{10}{3}(4^{n-1}-1)-4]$$

評語

1. 把一個常見的習題巧妙地變成困難但值得探討的問題，可見作者的創意。
2. 在解答過程中，能直指解答之核心。足見作者之機敏。