利用兩直線分割方形成所需的面積比

高中組數學科第三名

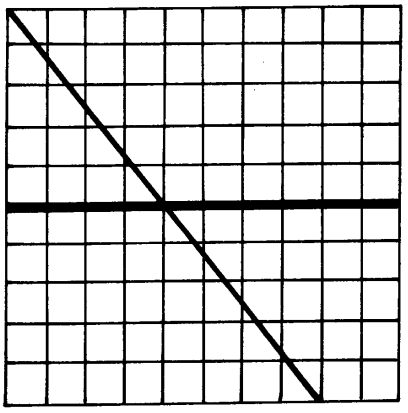
臺灣省立新竹高級中學　　作　　者：林昭宏、林天和
陳品竹
指導教師：許燦煌

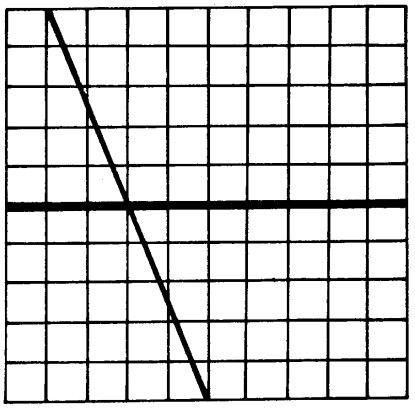
一、研究動機

某一日的國語日報上，有一道這樣的題目：

小華過生日，邀了三位好友一同慶祝。他準備了一塊正方形的蛋糕要和好友共享，而為了滿足每個人，他決定依各人的食量，將蛋糕切為四塊1:2:3:4的小蛋糕。如果小華只能切二刀，他應該如何切呢？

由於報上只印了如下的二種圖形以示解答：





使我們不禁懷疑，如上的二解是如何求出的呢？除了這二解之外，還有其他的解嗎？若要得到其他的比例，又該如何切呢？

我們想追根究柢的將所有的解答找出，而就此開始了我們的研究。

二、研究過程及內容

(一)國語日報上的問題

我們將其歸納為1.2.3.三種組合

1. $\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$　2. $\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \end{array}$　3. $\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ \hline 4 & 2 \end{array}$

1.(1) $\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$　即$P=1/10$，$Q=2/10$

$R=3/10$，$S=4/10$

$$\because \begin{cases} 3a+10b=5 \\ c+2d=1 \\ 2/5=(ad^2-2abd+b^2d)/a(a-c) \end{cases}$$

$\therefore\ 15d^2-31b^2-30bd^2-42b^2d-6bd+28b-12d-4=0$

如此，只要給d一個值，就可求出a，b，c。

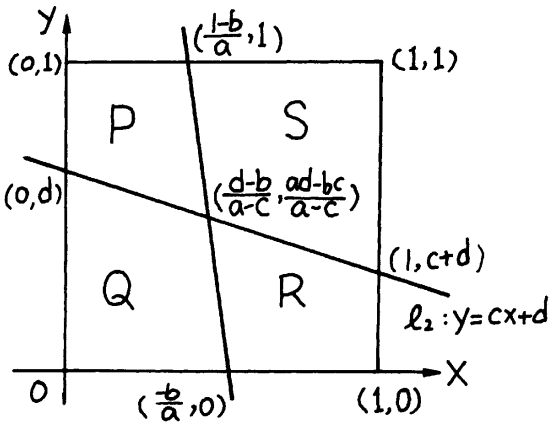


圖1-1

(2)a,b,c,d的範圍

$\because \ell_1: y=ax+b$恆過$(3/10,\ 1/2)$

$\ell_2: y=cx+d$恆過$(1/2,\ 1/2)$

且在正方形內$\ell_1: y=ax+b$

恆過$y=0$，$y=1$；$\ell_2: y=cx+d$

恆過$x=0$，$x=1$

$\therefore$我們將ℓ_1的範圍（$\ell_1' \sim \ell_1''$）ℓ_2的範圍（$\ell_2' \sim \ell_2''$）

，以圖1-2表示之。

$\therefore \begin{cases} a \geqq 5/3 \\ b \leqq 0 \end{cases}$ or $\begin{cases} a \leqq -5/3 \\ b \geqq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} -1 \leqq c \leqq 1 \\ o \leqq d \leqq 1 \end{cases}$

——— ℓ_1: $y=ax+b$

------ ℓ_2: $y=cx+d$

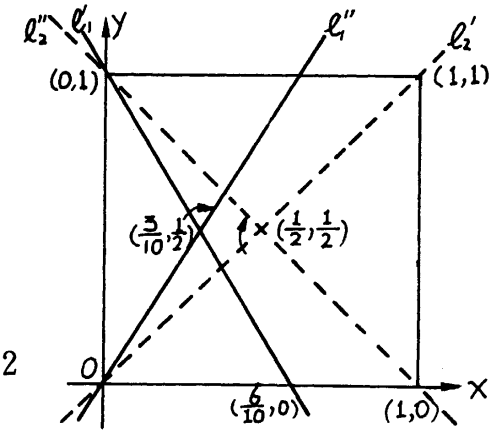


圖1-2

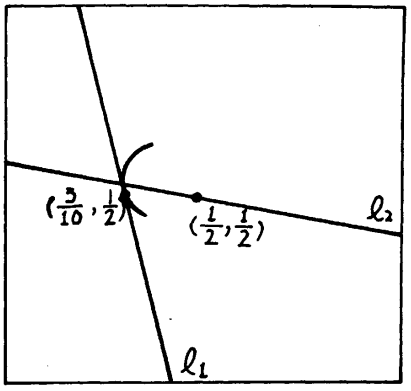
(3)為了探討所有解的情形，我們以電腦圖表現二直線變化的狀態，以下是利用Quick BASIC語言所寫的一個程式。

```
'$STATIC
SCREEN 3
WINDOW (1, .5)-(50, 1)
LINE (600, 250)-(650, 300), , B
Oa =-1.25
FOR d = 0 TO 1 STEP .006
LOCATE 24, 1: PRINT "
LOCATE 24, 1
DD = SQR(25×d^4-60×d×d×d+62×d×d-32×d
+8)
a =(-50×d×d+60×d-5+10×DD)/(42×d-31)
b =(15×d×d+3×d-14-3×DD)/(42×d-31)
c = 1-2×d
IF-1.666667 >= a THEN
  IF b < 1 THEN PRINT " No! a <=-5/3 but
 b<1" ;
ELSE IF a >= 1.666667 THEN
```

```
'  1  4
  IF b > 0 THEN PRINT " No!  a >=5/ 3 but b
>0" ;
'
ELSE PRINT " No!  a <-5/ 3 or 5/ 3 < a" ;
'  2  3
END IF
IF c <-1 OF 1 < c THEN PRINT " No!  c <-1
 or 1 < c" ;
IF POS(0) = 1 THEN
  PRINT " Yes";
END IF
VIEW: WINDOW (-20, .5)-(20, 1)
PSET (b, d)
LOCATE 10, 10: PRINT USING " a=####.##
####" ;a
LOCATE 11, 10: PRINT USING " b=####.##
####" ;b
LOCATE 12, 10: PRINT USING " c=####.##
####" ;c
LOCATE 13, 10: PRINT USING " d=####.##
#### " ;d
VIEW(300, 10)-(700, 310), , 1: WINDOW(0,
0)-(1, 1)
LINE(0, Od)-(1, Oc+Od), 0: LINE ((1-O
b)/ Oa, 1)-(-Ob / Oa, 0), 0
LINE (0, d)-(1, c+d): LINE((1-b)/ a,
1)-(-b / a, 0)
Oa = a: Ob = b: Oc = c: Od = d
NEXT d
```

圖1-3為電腦所繪之圖形，圖中之曲線為ℓ_1，ℓ_2的交點所構成的圖形。曲線上之任一點和（3/ 10，1/ 2），（1/ 2，1/ 2）相連，即為我們所求的ℓ_1: y＝ax＋b及ℓ_2: y＝cx＋d。而交點方程式為$\begin{cases} x=(d-b)/(a-c) \\ y=(ad-bc)/(a-c) \end{cases}$

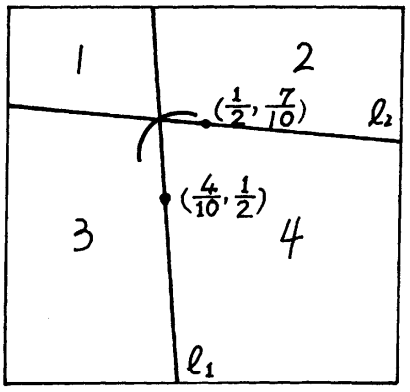
2，3討論的情形如1。



a＝-4.281　La＝1.027
b＝ 1.784　Lc＝1.020
c＝-0.200　θ＝1.14
d＝ 0.600　cos θ＝0.414
L＝2.04672　Yes

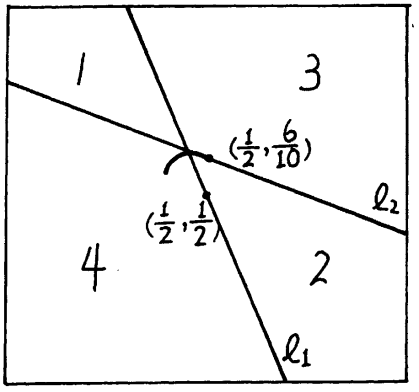
圖1-3

2.



a＝-12.847　La＝1.003
b＝ 5.639　Lc＝1.005
c＝ -0.100　θ＝1.39
d＝ 0.750　cos θ＝0.176
L＝2.00801　Yes

3.



a＝-2.505　La＝1.077
b＝ 1.753　Lc＝1.085
c＝-0.420　θ＝0.79
d＝ 0.810　cos θ＝0.701
L＝2.16135　Yes

㈠中1:2:3:4的ℓ_1，ℓ_2是穿越正方形的二對邊，另外尚有過二鄰

邊，及一對邊一鄰邊等數種情形。

如(二)中之2.3.4

(二)二直線分割方形為四塊面積的一般情形

A.(1)在圖1-1中

$$\because \begin{cases} 2(P+Q)a+2b=1 \\ c+2d=2(Q+R) \\ Q=(1/2)\cdot[(ad^2-2abd+b^2c)/a(a-c)] \end{cases}$$

∴可得$4[(P+Q)^2(Q+R)-Q]b^2+(P+Q)d^2-2(P+Q)bd^2-4(P+Q)(P+Q-1)b^2d+2(P+Q)(4Q-1)bd-4Q[2(P+Q)(Q+R)-1]b-4Q(P+Q)d-Q[1-4(P+Q)(Q+R)]=0$

(2)a,b,c,d的範圍

$\because$ $y=ax+b$恆過$(P+Q,1/2)$

$y=cx+d$恆過$(1/2,Q+R)$

且根據$P+Q$,$Q+R$的範圍,可分為下列四種情形：

ㄅ.$P+Q\leqq 1/2$, $Q+R\leqq 1/2$

如圖2-1

$$\begin{cases} a\geqq 1/2(P+Q) \\ b\leqq 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} a\leqq -1/2(P+Q) \\ b\geqq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2(Q+R)\leqq c\leqq 2(Q+R) \\ 0\leqq d\leqq 2(Q+R) \end{cases}$$

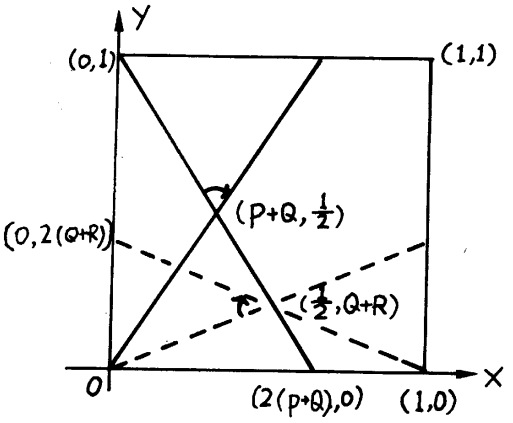


圖2-1

ㄆ.$P+Q\leqq 1/2$, $Q+R\geqq 1/2$

如圖2-2

$$\begin{cases} a\geqq 1/2(P+Q) \\ b\leqq 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} a\leqq -1/2(P+Q) \\ b\geqq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(Q+R)-2\leqq c\leqq 2-2(Q+R) \\ 2(Q+R)-1\leqq d\leqq 1 \end{cases}$$

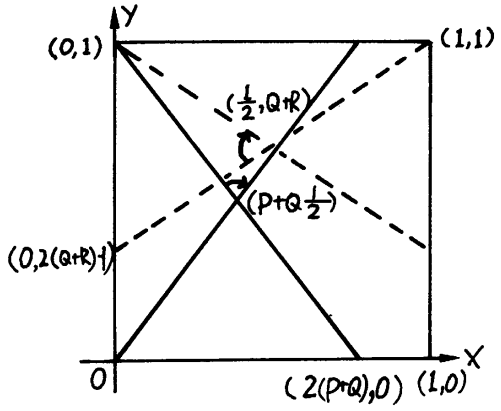


圖2-2

ㄇ.$P+Q\geqq 1/2$, $Q+R\leqq 1/2$

如圖2-3

$$\begin{cases} a\geqq 1/[2-2(P+Q)] \\ b\leqq [1-2(P+Q)]/[2-2(P+Q)] \end{cases} \text{ or } \begin{cases} a\leqq 1/[2(P+Q)-2] \\ b\geqq 1/[2-2(P+Q)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2(Q+R)\leqq c\leqq 2(Q+R) \\ 0\leqq d\leqq 2(Q+R) \end{cases}$$

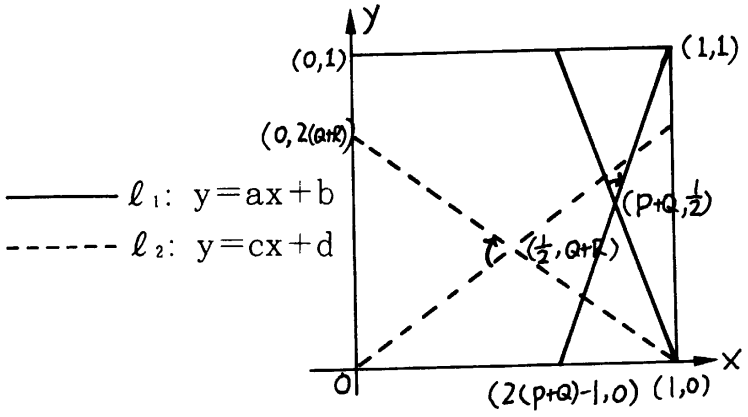


圖2-3

ㄈ.$P+Q\geq 1/2$, $Q+R\geq 1/2$

如圖2-4

$$\begin{cases} a\geq 1/[2-2(P+Q)] \\ b\leq [1-2(P+Q)]/[2-2(P+Q)] \end{cases}$$

or $$\begin{cases} a\leq 1/[2(P+Q)-2] \\ b\geq 1/[2-2(P+Q)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(Q+R)-2\leq c\leq 2-2(Q+R) \\ 2(Q+R)-1\leq d\leq 1 \end{cases}$$

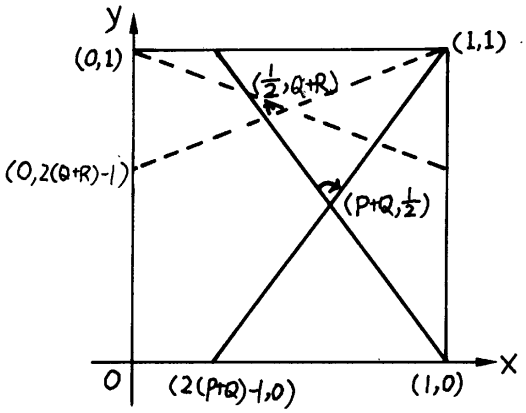


圖2-4

(3)P，Q，R，S的範圍由圖2-1，2-2，2-3，2-4，直線與方形相交的情形，可得下列四種情況。

ㄅ.$P+Q\leqq 1/2$, $Q+R\leqq 1/2$

$(P+Q)(1-2Q-2R)^2/[1-4(P+Q)(Q+R)]\leq P\leq \frac{1}{2}-Q$

$0\leq Q\leq 4(P+Q)(Q+R)(1-2P-2Q)/[1-4(P+Q)(Q+R)]$

$(Q+R)(1-2P-2Q)^2/[1-4(P+Q)(Q+R)]\leq R\leq 1/2-Q$

$1-P-2Q-R\leqq S\leqq [1-P-2Q-R]/[1-4(P+Q)(Q+R)]$

ㄆ.$P+Q\leqq 1/2$, $Q+R\geq 1/2$

$0 \leq P \leq [(2Q+2R-1)(P+2Q+R-1)+4(P+Q)(R-P)(1-Q-R)]/[1-4(P+Q)(1-Q-R)]$

$(P+Q)(2R+2Q-1)^2/[1-4(P+Q)(1-Q-R)] \leq Q \leq 1/2-P$

$P \leq R \leq (R-P)/[1-4(P+Q)(1-Q-R)]$

$(1-2P-2Q)[1-2P-3Q-R+2(P+Q)(Q+R)]/[1-4(P+Q)(1-Q-R)] \leq S \leq 1/2-P$

ロ.$P+Q \geqq 1/2, Q+R \leqq 1/2$

$R \leq P \leq [P+4Q+3R-4(QR)(P+Q)]/[1-4(Q+R)(P+Q-1)]$

$(Q+R)(2P+2Q-1)^2/[1-4(P+Q-1)(Q+R)] \leq Q \leq 1/2-R$

$0 \leq R \leq [4(Q+R)-4(P+Q)(P+2Q+R-1)]/[1-4(Q+R)(P+Q-1)]$

$[1+P-2R-Q+2(P+Q)(R-P)]/[1-4(P+Q-1)(Q+R)] \leq S \leq 1/2-R$

ハ.$P+Q \geq 1/2, Q+R \leq 1/2$

$(2P+2Q-1)[2P+3Q+R-1-2(P+Q)(Q+R)]/[1-4(P+Q-1)(Q+R-1)] \leqq P \leqq 1/2-S$

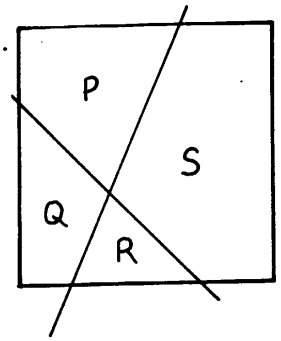
$P+2Q+R-1 \leq Q \leq [P+2Q+R-1]/[1-4(P+Q-1)(Q+R-1)]$

$(1-P-Q)(2Q+2R-1)^2/[1-4(P+Q-1)(Q+R-1)] \leq R \leq 1/2-S$

$0 \leq S \leq 4(P+2Q+R-1)[(P+Q)(Q+R)-(P+2Q+R-1)]/[1-4(Q+R-1)(P+Q-1)]$

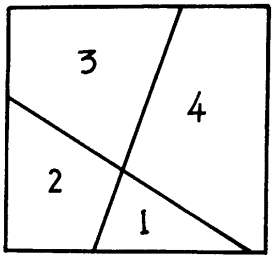
B,C,D,E討論的情形如A.

B.

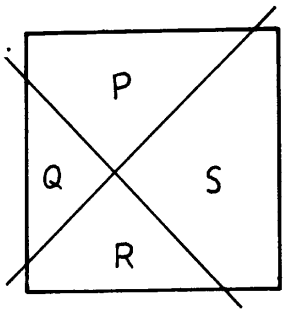


例：1:2:3:4

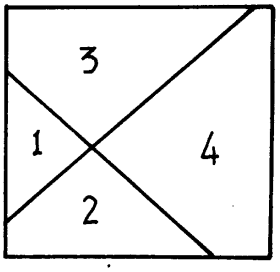
a= 3.126 La=1.050
b= −1.063 Lc=1.135
c= −0.683 θ= 1.28
d=0.640 cos θ=−.285
L=2.18505 Yes



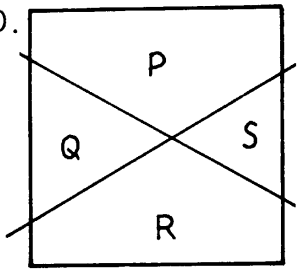
C.



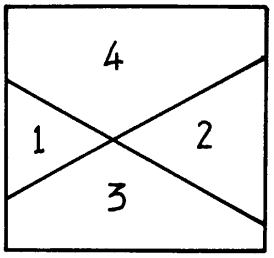
a= −0.939 La=1.097
b= 0.750 Lc=1.267
c= 0.924 θ =1.50
d=0.140 cos θ=0.071
L=2.36341 Yes



D.



a= −0.586 La=1.159
b= 0.693 Lc=1.156
c= 0.580 θ= 1.06
d=0.210 cos θ=0.493
L=2.31492 Yes

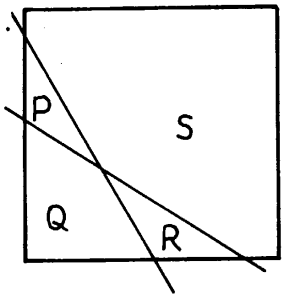


∵ 1/ 2≠S=4/ 10

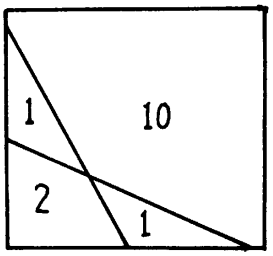
∴ 1:2:3:4時無解

我們另舉一例

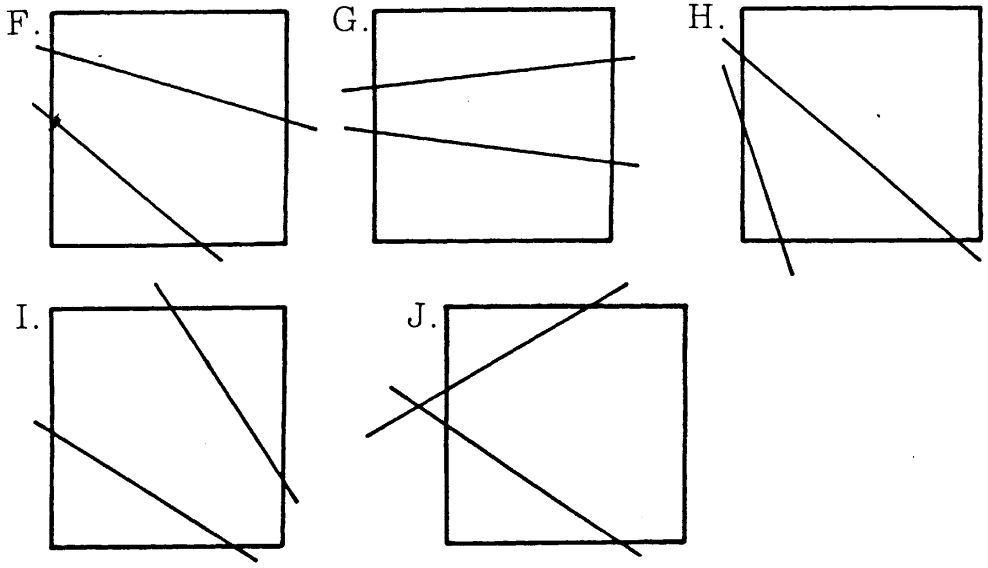
E.



a= −1.975 La=1.031
b= 0.920 Lc=1.039
c= −0.494 θ= 0.64
d=0.460 cos θ=0.800
L=2.07026 Yes



㈢二直線分割方形為三塊面積的情形（討論皆省略）



※二平行直線分割方形的情形，包含在F,G,H,I四情形之中。

㈣ ㈡中之五種情形是我們主要的探討，為了便於同時觀察，我們另寫一個Quick BASIC程式，包含㈡中的五種情形。

㈤被正方形所截二線段長之和的最大值及最小值我們以㈡中的1.為例

設

$f(a,c)=\sqrt{1+a^{-2}}+\sqrt{1+c^{2}}$

$g(a,c)=8[(P+Q)(Q+R)-Q]a^{2}+4(P+Q)(P+Q-1)a^{2}c+ac^{2}-4(P+R-1/2)ac+4(Q+R)(Q+R-1)a+c=0$——①

令$W=\sqrt{1+a^{-2}}+\sqrt{1+c^{2}}+\lambda\{8[(P+Q)(Q+R)-Q]a^{2}+4(P+Q)(P+Q-1)a^{2}c+ac^{2}-4(P+R-1/2)ac+4(Q+R)(Q+R-1)a+c\}$

$\because \partial w/\partial a=-1/a^{3}\sqrt{1+a^{-2}}+\lambda\{16[(P+Q)(Q+R)-Q]a+8(P+Q)(P+Q-1)ac+c^{2}-4(P+R-1/2)c+4(Q+R)(Q+R+1)\}=0$——②

$\partial w/\partial c = c/\sqrt{1+c^2} + \lambda\{4(P+Q)(P+Q-1)a^2+2ac-4(P+R-1/2)a+1\}=0$——③

由①②③可解出一組（a,c），將其代入f（a,c）即為線段長之和的極值。

※由電腦圖可知，所求之f（a,c）的值為最小值，而最大值在ℓ_1，ℓ_2範圍之端點上。

(六)1.二直線分割圓的情形，一定有解存在，而且是唯一解。

2.二直線分割橢圓的解為分割圓時所有解的投影。

3.二直線分割矩形、三角形的討論情形，如同分割方形時。

三、結論

(一)利用二直線分割正方形面積成1:2:3:4的切法，有A,B,C,D四種情形，而每種情形均有無限多組解。

(二)當分割正方形面積成任意比例時，由關係式求出之a,b,c,d若均滿足各自的範圍，則所得之二直線即為所求之解。

(三)切割正方形面積成任意比例時，二直線ℓ_1，ℓ_2不一定存在；但在滿足P,Q,R,S的範圍（或條件）下，則一定有解存在。

(四)被正方形所截二線段長之和的最大值及最小值均存在。

(五)二直線分割圖、橢圓及矩形、三角形的情形，均能加以討論。

四、參考資料

(一)理科數學（上）——國立編譯館

(二)數學分析導引（下）——凡異出版社

評語

推廣在報上看到分切蛋糕的問題，學習動機很好。知道如何以數學來表示問題，而從事探討，得到很好的結果。