三角形分割線形成的包絡線

高中組數學科第一名

省立臺中第一高級中學　　作　　者：陳旻宏
指導教師：陳鉀逸　林嵩明

一、研究動機

三年前，在老師的指導下，以「n等分三角形面積」爲題，參加了數學科展，並得到很好的名次，但在研究的過程中，卻發現了許多無法解決的問題，其中最重要的是何以有些點無法作出直線等分三角形，而在學過解析幾何，微積分後，遂欲利用這些工具解此問題。

二、內容概要

㈠取一適當座標系，對其中一族分割線，求其包絡線。
㈡求出所有的包絡線，並解釋無解區域形成之原因。
㈢嘗試推廣至四面體之分割。

三、研究過程

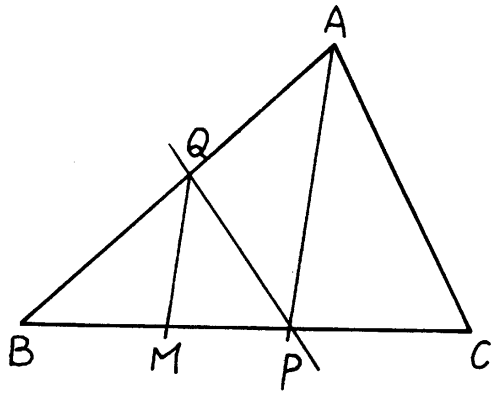
㈠使用解析幾何之前，我們先要了解如何以尺規作出直線將三角形分割成兩區域，面積比爲κ：1-κ。

1.過三角形邊上一點P

〔已知〕：如圖$P\in\overline{BC}$，$\overline{BM}:\overline{BC}=\kappa$

〔求作〕：$\overleftrightarrow{PQ}$，$Q\in\overline{AB}$，使$\triangle QBP:\triangle ABC=\kappa$

〔作法〕：1.連$\overline{AP}$



2.作$\overline{MQ}$∥$\overline{AP}$，交$\overline{AB}$於Q，則$\overleftrightarrow{PQ}$即爲所求。

2.過三角形內部一點P

〔已知〕：△ABC內部一點P，$\overrightarrow{AM}$：$\overrightarrow{AC}$＝κ

〔求作〕：作$\overleftrightarrow{PQ}$，使△AQp'：△ABC＝κ

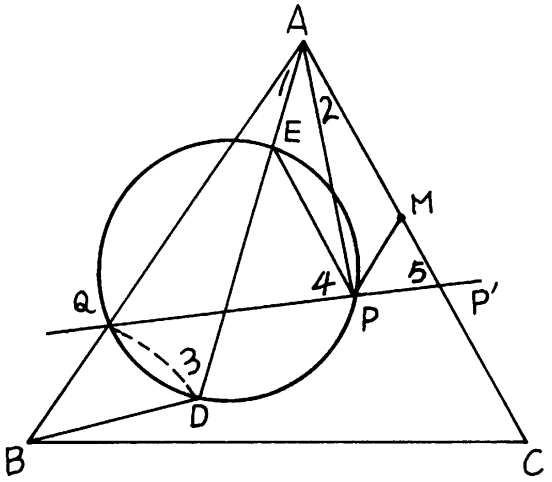
〔作法〕：1.連$\overline{AP}$,$\overline{PM}$

2.以$\overline{AB}$爲一邊；作△ABD～△APM且D於△ABC內部

3.作$\overleftrightarrow{PE}$∥$\overline{AC}$，交$\overline{AD}$於E

4.過P.D.E作一圓，交$\overline{AB}$於Q

5.連$\overline{PQ}$，則$\overleftrightarrow{PQ}$即爲所求。



3.在過內部一點P，作$\overleftrightarrow{PQ}$，有時無法得到解答，而當我們繪出所有的分割線後，我們發現有一區域沒有割線通過，亦即此區域內的點無法作出分割線。此區域稱爲無解區域。

㈡分割線形成的包絡線

1.解第一條包絡線

爲了使計算簡單所以我們將△ABC，設爲A（0,0），B（a，0），C（b，c），計算的包絡線則是分割線$\overleftrightarrow{PQ}$，（$P\in\overline{AB}$，$Q\in\overline{AC}$）所形成的包絡線。

1° 令P（p，o）$\in\overline{AB}$，$\kappa a<p<a$

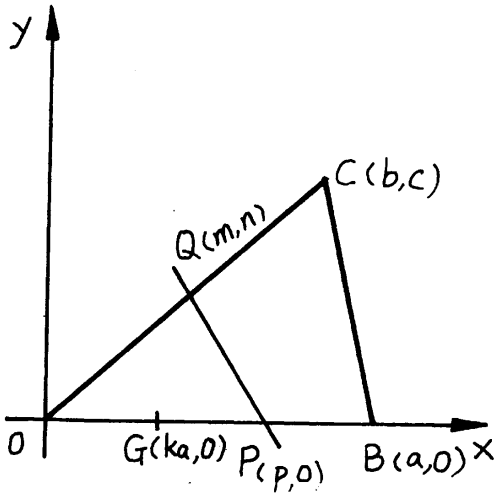
2° 令$\overleftrightarrow{PQ}$爲分割線，則$\overline{QG}\parallel\overline{PC}$

$\therefore b/m=P/(\kappa a)$ —(1)

$n/m=c/b$ —(2)

求得分割線方程式：

$x-p=(b/c)y-(p^2/\kappa ac)y$ —(3)



3° 求包絡線：

$\partial(X-P)/\partial P=\partial[(b/c)y-(P^2/kac)y]/\partial P$

$P=(kac)/2y$ —(4)

代(4)入(3)可得包絡線方程：

$xy-(\kappa ac/4)=(b/c)y^2$

4° 判斷何種曲線

$$\because \delta=-\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & b/c \end{vmatrix}=1>0$$

$$\triangle=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & b/c & 0 \\ 0 & 0 & kac/4 \end{vmatrix}=-kac/4<0$$

故包絡線爲雙曲線。

5° 此雙曲線之性質：

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-kab}}{2b/c}=0$$

$\therefore y=0$爲此雙曲線之漸近線

又設 $y=px+q$ 爲另一漸近線

$$P=\lim_{x\to\infty} y/x=c/b$$

$$q=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-kab}}{2b/c}-cx/b=0$$

，漸近線 $y=(c/b)X$

則漸近線恰爲$\overleftrightarrow{AB}$,$\overleftrightarrow{AC}$之方程式。

討論：ㄅ.由於其他的包絡線均可轉換至此種坐標，因此我們知道包絡線爲以三角形某兩邊爲漸近線之雙曲線。

ㄆ.這條包絡線由於坐標適當，所以甚易解出，但其他幾條包絡線就不宜用此種方法求出。

2.爲了求得其他的包絡線，我們把△ABC設爲正三角形，在求得方程式後再變換爲任意三角形。

令△ABC A(0,0) B(1,0) C($1/2,\sqrt{3}/2$)

爲了確定包絡線是否全部求出故將三邊分爲1到9段。

1° 由前文可知2→7，3→8之分割線形成之包絡線：

p_1：$y-\sqrt{3}xy+(3/8)\kappa=0$

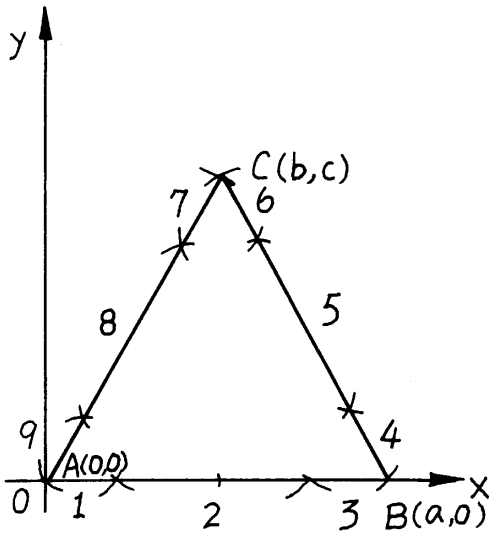
2° 1→5，2→6將△鏡射再向右平移與原來 P_1 相同，

故知 P_2 方程式：$y^2-\sqrt{3}(1-x)y+(3/8)\kappa=0$

$$y^2+\sqrt{3}xy-\sqrt{3}y+(3/8)\kappa=0$$

3° 8→4，9→5，將△逆時針轉120° 再向右平移，與原來 P_1 相同故

$$P_3: 3x^2-y^2-3x+\sqrt{3}y+(3/4)\kappa=0$$



4° 計算完三條包絡線後，發現尚有1→6，3→7，4→9三條尚未求出。但在觀察後發現這三條均可視爲前三條之比例改爲 $1-\kappa$：

$P_4: y^2-\sqrt{3}xy+(3/8)(1-k)=0$

$P_5: y^2+\sqrt{3}xy-\sqrt{3}y+(3/8)(1-k)=0$

$P_6: y^2+3x-\sqrt{3}y-3x^2-(3/4)(1-k)=0$

3. 正三角形→任意三角形

接下來我們利用線性變換求得任意三角形之包絡線，又爲了使包絡線簡單，所以仍將三角形兩頂點置於第一象限內。

設一2×2階矩陣A，將原坐標系中的

$(b,c)\to(1/2,\sqrt{3}/2)$，$(1,0)\to(1,0)$，$(x,y)\to(x',y')$

$$\because (1,\ 0)\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = (1,\ 0) \quad \therefore (p,\ q) = (1,\ 0)$$

$$(b,\ c)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r & s \end{bmatrix} = (1/2, \sqrt{3}/2) \quad \therefore \begin{cases} b + cr = 1/2 \\ cs = \sqrt{3}/2 \end{cases}$$

$$\therefore (x,\ y)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r & s \end{bmatrix} = (x',\ y') \quad \therefore \begin{cases} x' = x + ry \\ y' = sy \end{cases}$$

代入正三角形之包絡線方程式，可求得三角形頂點爲
(0,0)，(1,0)，(b,c)之包絡線：

P_1: $s^2y^2 - \sqrt{3}rsy^2 - \sqrt{3}sxy + (3/8)k = 0$

P^2: $s^2y^2 + \sqrt{3}rsy^2 + \sqrt{3}sxy - \sqrt{3}sy + (3/8)k = 0$

P_3: $s^2y^2 - \sqrt{3}sy + 3x + 3ry - 3x^2 - 6rxy - 3r^2y^2 - (3/4)k = 0$

P_4: $s^2y^2 + \sqrt{3}rsy^2 + \sqrt{3}sxy - \sqrt{3}sy + (3/8)(1-k) = 0$

P_5: $s^2y^2 - \sqrt{3}rsy^2 - \sqrt{3}sxy + (3/8)(1-k) = 0$

P_6: $s^2y^2 - \sqrt{3}sy + 3x + 3ry - 3x^2 - 6rxy - 3r^2y^2 - (3/4)(1-k) = 0$

其中$r = (1/2 - b)/c$，$s = \sqrt{3}/(2C)$

4.無解區域：

當我們將各個不同分割比例的圖形畫出後，我們發現無解區域隨κ值增加而縮小，同時當κ大於4／9時，無解區域不存在因此我們想利用包絡線來了解它的特性。

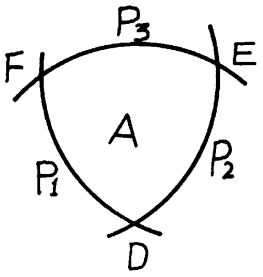
(1)首先我們只對其中一條包絡線研究，由於分割線爲包絡線的切線，因此當P在包絡線內部時必定無法作出切線，亦即包絡線之內部爲此線之無解區域，而三角形之無解區域則爲各個區域之交集。

(2)又發現P_4，P_5，P_6對無解區域沒有影響，因此只討論P_1，P_2，P_3，同時正三角形可代表所有的三角形，所以我們只研究正三角形的情況。

(3)我們將P_1，P_2，P_3的關係分爲兩類

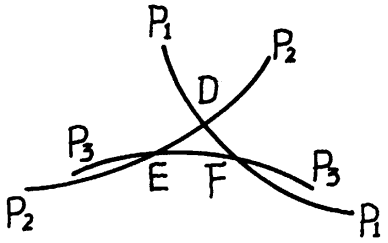
(a)存在無解區域：圖形如下：

即p_1，p_2交點，在其他兩交點之下方，如此區域A在p_1，p_2，p_3之內部。



(b)不存在無解區域：圖形如下

即p_1，p_2交點在其他兩點之上方



(4)令△ABC，A(0,0)，B(1,0)，C(1/2,$\sqrt{3}$/2)

$P_1: y^2-\sqrt{3}xy+(3/8)k=0$

$P_2: y^2+\sqrt{3}xy-\sqrt{3}y+(3/8)k=0$

$P_3: 3x^2-y^2-3x+\sqrt{3}y+(3/4)k=0$

令p_1交p_2於D，p_3於F；p_2交p_3於E

可求得D.E.F之坐標：

$D(1/2,(\sqrt{3}-\sqrt{3-6k})/4)$

$E\left(\dfrac{5+3\sqrt{1-2k}}{8},\ \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{3-6k}}{8}\right)$

$F\left(\dfrac{3+3\sqrt{1-2k}}{8},\ \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{3-6k}}{8}\right)$

由於無解區域不存在的條件爲D於E，F之上或等高。

$\therefore(\sqrt{3}-\sqrt{3-6k})/4\geq(\sqrt{3}-\sqrt{3-6k})/8$

$\therefore 1\geq 9-18\kappa \Rightarrow \kappa\geq 4/9$

又$4/9<\kappa\leq 1/2$

$\therefore$當$4/9\leq\kappa\leq 1/2$時無解區域不存在

討論：(1)由於D.E.F三點在κ越接近$4/9$時，三點越接近，因此無解區域隨κ值增加而減少。

(2)當$\kappa>4/9$時，雖然D.E.F逐漸遠離，但由於三包絡線之無解區域的交集爲空集合，所以仍無無解區域的存在。

(3)以上兩點與我們所觀察到的相當吻合，因此我們知道$4/9\leq\kappa\leq 1/2$時無解區域不存在。

四、推廣

在對三角形的分割有相當的了解之後，我們想推廣至四面體之分割，但由於能力上的限制，我們只能做出通過邊上一定點的包絡線。

1. 因爲線性變換前後，體積之變化只與矩陣之行列式值有關，所以我們只需做出一種四面體之分割面形成的包絡面，即可經由線性變換，得到任意四面體之情形。
2. 爲了方便計算，我們設四面體ABCD爲：A(0,0,0)、B(1,0,0)、C(0,1,0)D(0,0,1)

   切割平面交$\overline{AB}$，$\overline{AC}$，$\overline{AD}$於

   $p(p,0,0)$，$Q(0,q,0)$，$R(0,0,r)$

   分割比例爲κ，且R爲定點

   故知$pqr=\kappa\Rightarrow q=\kappa/(pr)$

   切割平面E：$x/p+y/q+z/r=1$

   $$\kappa rx+p^2r^2y+\kappa pz=\kappa pr$$

   $\therefore \partial E/\partial P=2Pr^2y+kz=kr\Rightarrow P=(kr-kz)/2r^2y$

   可得包絡面$\mathcal{C}$: $4r^3xy=\kappa(z-r)^2$

討論：A.我們雖然只求出一個包絡面，但其他的包絡面可用線性變換求得，而其性質亦不改變。

B.以 $z=h$ 之平面與包絡面相交形成之曲線爲一雙曲線或是兩相交直線。以 $x=h$ 或 $y=h$ 之平面截包絡面，則形成拋物線，若以 $x+y=h$ 之平面截包絡面，則形成橢圓，或一點，若以 $x-y=h$ 之平面截包絡面，則形成雙曲線，或相交直線。

C.綜合B點內各種截面截出之軌跡，我們發現包絡面爲一種二次錐面，而其橫截面爲橢圓。（可用電腦繪出圖形來觀察）

五結論

1.我們利用線性變換和基本偏微分求出三角形分割線形成的包絡線，且其中的三條恰爲無解區域的邊界。
2.六條包絡線均爲雙曲線，中心在頂點，漸近線爲三邊。
3.無解區域大小隨 κ 增加而縮小，當 $4/9\leq\kappa\leq1/2$ 時無無解區域存在。
4.若以平面過四面體邊上一定點分割四面體時，包絡面爲二次錐面。

六、參考資料

1.微積分（下）　楊維哲　著　三民書局
（包絡線方程式之求法）
2.初等線性代數　簡國清、曾文淇譯　東華書局

七、附錄

繪出包絡線圖形之方程式（分割線圖形略去）以True Basic執行

```
Clear
PRINT "(x1,y1)=(0, 0)"
PRITN "(x2, y2)=(1, 0)"
INPUT PROMPT "(x3, y3)" : x3, y3
LET  x= max(x3, 1)
LET X1= min(x3, 0)
LET y= max(y3, 0)
LET Y1= min(y3, 0)
INPUT PROMPT  "k=" : k
SET WINDOW  x1, x, y1, y.
PLOT 0, 0; 1, 0; x3, y3; 0, 0
LET W=y3×2×3^(-.5)
LET Z=(x3-.5)×2×3^(-.5)
FOR I= 1 TO 2
LET K= 1-k
FOR  Ya= gℓ+0.002 TO y STEP .002
LET  Xa= -3^(-.5)*ya*W-3^(.5)*k/ (ya*8*W)
+1-ya*z
PLOT xa, ya
LET  xa= 3^(-.5)*ya*W+3^(.5)*k/ (ya*8*W)-
z*Ya
PLOT xa,ya
NEXT Ya
FOR Xa=Xℓ+.002 TO x STEP .002
LET a= W^2-3*z^2
LET b= 3*z-6*z*xa-3^.5*W
LET c= 3*xa -3* xa 2-3*k/ 4
IF  b^2-4*a*c>=0 Then
    LET Ya=-b(b^2  -4*a*c)^.5) / (^2*a)
```

```
    PLOT xa,ya
    LET  Ya=(-b(b^2-4*a*c)^.5)/(2*a)
    PLOT xa, ya
   ELSE
END IF
NEXT Xa
NEXT I
END
```

評語

1.研究主題選擇的頗爲適當。

2.想像力頗爲豐富，考慮相當週延，先研究正三角形，利用旋轉，鏡射及平移求出包絡線，繼而利用綫性變換，由正三角形推廣到一般三角形。

3.學術性價值頗高。