

# 節腹線的深入探討

高中組物理科第一名

臺北縣私立光仁高級中學

作 者：鄭銘誌、連琬菁  
彭繼賢、謝宛珍  
指導教師：黃德亮

## 一、研究動機

在高中物理第三冊“波動篇”中提到兩圓形波干涉產生節腹線的情形，再加上老師利用投影片生動地示範節腹線位置變換，使我們對節腹線位置改變產生濃厚的興趣，而想對它作更深入的探討。

## 二、研究目的

1. 探討影響兩個點波源干涉產生的節腹線分布情形的因素：

- (a) 兩波源間的距離
- (b) 兩波源間的相角差
- (c) 兩波源間的頻率差異

2. 由理論探討(a)兩波源間的距離

- (b) 兩波源間的相角差
- (c) 兩波源間的頻率差異

分別對節腹線分布的情形所造成的影響，並找出關係。

4. 導出一通式來表示各種情況下節腹線的分布情形，並由此分析節腹線的特性。

5. 由電腦模擬各種情況下節腹線分布的情形，並由此分析節腹線的特性。

### **三、研究設備器材**

水波槽 投影機 尺 起波器 雷射光電計時器 攝影機 電腦自製轉角器 自製觀測節腹線壓克力盤 電源器 光柵 木屑 可變電阻

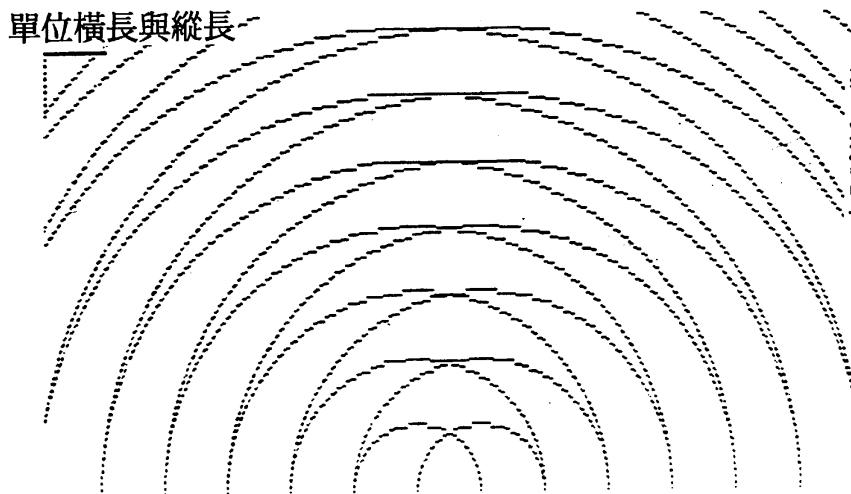
### **四、研究過程或方法**

1. 探討影響兩個點波源干涉所產生的節腹線分布情形的因素。
2. 由理論探討(a)兩波源間距離  
(b)兩波源間相角差  
(c)兩波源間頻率差異對節腹線分布的影響，並試著導一通式來表示各種情況下節腹線的分布情形。
3. 從導出的通式中分析各種情況下節腹線的特性。
4. 分別以(a)水波(b)光波進行抽樣實驗以驗證理論中各種情況下節腹線的特性。
5. 自行設計電腦程式，以電腦模擬理論中各種情況下節腹線的特性。
6. 以畫圖方式配合理論、實驗和電腦模擬來呈現在各種情況下節腹線的分布情形。

### **五、研究結果**

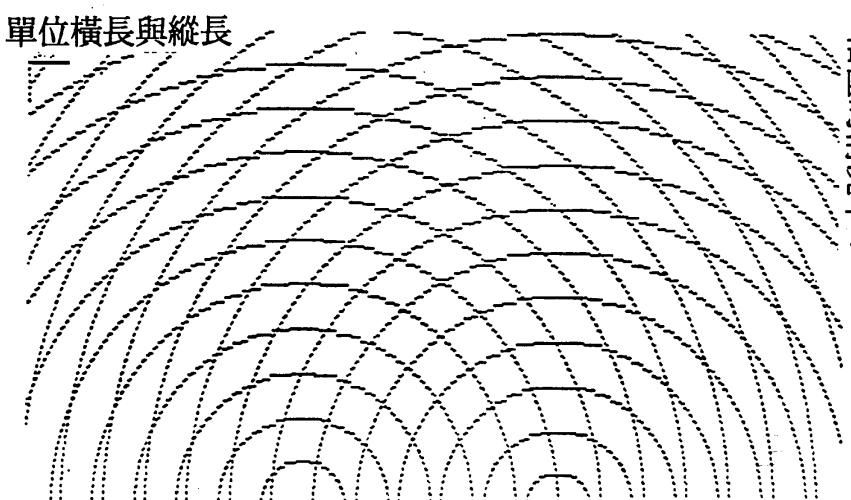
電腦模擬

(A) 在頻率相同，相位差 = 0，改變兩波源間  
距離的情況下：



$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $p = 0$ ,  $d_1 = 1$   
兩波相距  $D = 1$ . 相角差  $A = 0$ . 倍率  $M = .25$ .

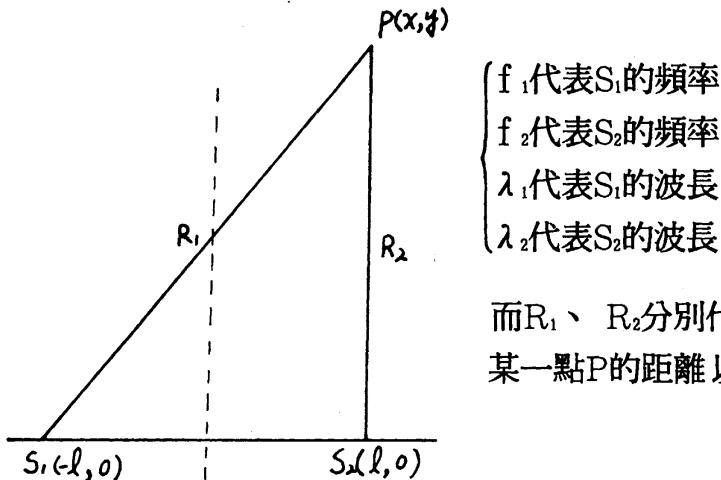
(C) 在波源距離相同，波源間頻率相同，改變  
相位的情況下：



## 六、研究討論

### 1. 理論探討：

設  $S_1(-\ell, 0)$ ,  $S_2(\ell, 0)$  代表兩個點波源



而  $R_1$ 、 $R_2$  分別代表  $S_1$ 、 $S_2$  距平面  
某一點  $P$  的距離 以上圖例：

(a) 若  $P$  為腹線上的一點：

$(R_1/\lambda_1 - R_2/\lambda_2)$  代表在  $P$  點處的波數差，設波數差為  $n$  相位差為  $P$

$$R_1/\lambda_1 - R_2/\lambda_2 = n + p \quad n \in \mathbb{Z} \quad -1 < p < 1$$

$$R_1 = \sqrt{(x + \ell)^2 + y^2}$$

$$R_2 = \sqrt{(x - \ell)^2 + y^2}$$

若  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $\lambda_2 = \alpha \lambda$ ,  $\alpha = \lambda_2/\lambda_1$  可得

$$\Rightarrow \alpha \sqrt{(x + \ell)^2 + y^2} - \sqrt{(x - \ell)^2 + y^2} = \alpha (n + p) \lambda$$

(b) 若  $P$  為某節線上的一點：

$$R_1/\lambda_1 - R_2/\lambda_2 = (n - \frac{1}{2}) + p \quad n \in \mathbb{Z} \quad -1 < p < 1$$

$$R_1 = \sqrt{(x + \ell)^2 + y^2}$$

$$R_2 = \sqrt{(x - \ell)^2 + y^2}$$

可得

$$\alpha \sqrt{(x + \ell)^2 + y^2} - \sqrt{(x - \ell)^2 + y^2} = \alpha [ (n - \frac{1}{2}) + p ] \lambda$$

## 2. 節腹線方程推導：

(1) 腹線方程：

$$\text{由 } \begin{cases} \alpha \sqrt{(x + \ell)^2 + y^2} - \sqrt{(x - \ell)^2 + y^2} = \alpha (n + p) \lambda \\ -2\ell \leq \sqrt{(x + \ell)^2 + y^2} - \sqrt{(x - \ell)^2 + y^2} \leq 2\ell \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1/\lambda (-2\ell - [(1-\alpha)\sqrt{(x-\ell)^2+y^2}]/\alpha) - p \leq n$$

$$\leq 1/\lambda (2\ell - [(1-\alpha)\sqrt{(x-\ell)^2+y^2}]/\alpha) - p$$

(2) 節線方程：

$$\text{由 } \begin{cases} \alpha\sqrt{(x+\ell)^2+y^2} - \sqrt{(x-\ell)^2+y^2} = \alpha [ (n - \frac{1}{2}) + p ] \lambda \\ -2\ell \leq \sqrt{(x+\ell)^2+y^2} - \sqrt{(x-\ell)^2+y^2} \leq 2\ell \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1/\lambda [-2\ell - (\frac{1-\alpha}{\alpha})\sqrt{(x-\ell)^2+y^2}] + (\frac{1}{2} - p)$$

$$\leq n \leq \frac{1}{\lambda} [2\ell - (\frac{1-\alpha}{\alpha})\sqrt{(x-\ell)^2+y^2}] + (\frac{1}{2} - p)$$

則得之

(3) 特例：( $\alpha=1$ )

i 腹線數目：

$$\frac{1}{\lambda}(-2\ell) - p \leq n \leq \frac{1}{\lambda}(2\ell) - p$$

ii 節線數目：

$$\frac{1}{\lambda}(-2\ell) + (\frac{1}{2} - p) \leq n \leq \frac{1}{\lambda}(2\ell) + (\frac{1}{2} - p)$$

(4) 節腹點移動軌跡方程式：

$$\frac{x^2}{(\frac{\Delta\ell}{2})^2} - \frac{y^2}{(\frac{d}{2})^2 - (\frac{\Delta\ell}{2})^2} = 1$$

若將X、Y座標互換，可得

$$\frac{4y^2}{\Delta\ell^2} - \frac{4x^2}{d^2 - \Delta\ell^2} = 1$$

令波程差 $\Delta\ell = (n+p)\lambda$ 代入

$$\because \lambda \text{ 很小} \quad y = \sqrt{\frac{4\ell^2 - (n+p)^2\lambda^2 + 4x^2}{4\ell^2 - (n+p)^2\lambda^2}} \cdot \frac{(n+p)}{2}\lambda$$

$$\therefore \lambda^2 \rightarrow 0$$

$$\therefore X \gg \ell \quad y = \sqrt{\frac{4\ell^2 + 4x^2}{4\ell^2}} \cdot \frac{(n+p)}{2}\lambda$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{(n+p)}{2}} \lambda$$

$$= \frac{(n+p)x}{2\ell} \cdot \lambda$$

同理  $\triangle \ell = [ (n - \frac{1}{2}) + p ] \lambda$

$$y = \frac{(n+p - \frac{1}{2})x}{2\ell} \cdot \lambda$$

若  $2\ell$  以  $d$  代替， $x$  以  $r$  代替

$$y = \frac{r \cdot \lambda}{d} \cdot n$$

$$y = \frac{r \cdot \lambda}{d} \cdot \left( n - \frac{1}{2} \right)$$
 與課本(16-4)式相吻合

3.(a)由結果，電腦模擬和圖片，得到節腹線的分布，在兩波源的頻率相同，相位相同的情況下，會受到兩波源間的距離所影響，當距離加大時節腹線數會增多，愈顯密集且曲率小，但是兩波源的頻率等量增加，而且相位相同的情況下時，其結果與前相似，但在相同的距離下，節腹線的數目會出現得較少，但是其分布依然是左右相對稱的。

(b)由理論分析可知：每當  $d/\lambda$  值相等時，節腹源分布情形，會完全相同 ( $d$ —兩波源之距離)。

4.由結果，電腦模擬和畫圖中的圖片，電腦模擬和照片分析得到在兩波源間的距離相同相位相同的情況下，節腹線的分布會受到兩波源的頻率所影響，當  $S_1$  的波源頻率控制不變時， $S_2$  的波源頻率改變時，發現到：

(a)若  $S_2$  波源頻率變小，節腹線會向波源  $S_1$  (頻率不變) 的一邊偏移且曲率變大。

(b)反之，則向波源  $S_2$  (頻率改變) 的一邊偏移且曲率變大。

5.由結果，電腦模擬和圖片分析得知：在兩波源距離和兩波源頻率保持不變時，兩波源相位差對節腹線的分布有影響，若波源

$S_2$ 比波源 $S_1$ 多一相位差 $P$ ，則 $P$ 愈大時，節腹線的位置會偏向 $S_2$ 移動，若相位差增減 $1/2$ 時，節腹線的位置互調。

## 七、結論

1. 由以上的理論、實驗、電腦模擬和圖形的分析，驗證所形成的假設如下：

- a. “兩個點波源間的距離會影響節腹線的分布情形”是正確的。當距離變大時，節腹線會增多，愈顯密集且曲率愈小，但分布依然對稱。
- b. “兩個點波源間的頻率差異會影響節腹線分布情形”是正確的。當一波源頻率控制不變，而另一波源頻率較其為大且陸續增大時，節腹線會向變大的一邊偏移；若較其為小且陸續減小時，節腹線會向頻率不變的一邊偏移。
- c. “兩個點波源間的相角差異會影響節腹線的分布情形”是正確的。節腹線的位置會隨著相位差偏向一邊。當相位差增減 $1/2$ 時，節腹線位置互相對調。相位差增減 $1$ 時，節腹線位置會恢復原狀。
- d. “兩圓形波干涉時，所產生的節腹線為雙曲線”是不一定正確的。節腹線只在波源頻率相同，相位差 $=0$ 的兩波干涉時才是雙曲線。但在任何情況下，節腹點移動的軌跡都是雙曲線。
- e. “在各種情況下，可導出一通式表示所有節腹線的分布情形”是正確的。由理論導出節腹線分布的方程式：  
$$\frac{a\sqrt{(x+\ell)^2+y^2}-\sqrt{(x-\ell)^2+y^2}}{a\sqrt{(x+\ell)^2+y^2}-\sqrt{(x-\ell)^2+y^2}}=a(n+p)\lambda, \quad a\sqrt{(x+\ell)^2+y^2}-\sqrt{(x-\ell)^2+y^2}=a[(n-\frac{1}{2})+p]\lambda$$

此式在任何情況下都適用
- f. “能導出一通式，並由此通式中可決定節腹線的數目”是正確的。由理論導出節腹線數目的通式：

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\lambda} \left( -2\ell - \frac{(1-\alpha)\sqrt{(x-\ell)^2+y^2}}{\alpha} \right) - p \leq n \leq \\
 & \frac{1}{\lambda} \left( 2\ell - \frac{(1-\alpha)\sqrt{(x-\ell)^2+y^2}}{\alpha} \right) - p \dots\dots (4) \\
 & \frac{1}{\lambda} \left( -2\ell - \frac{(1-\alpha)\sqrt{(x-\ell)^2+y^2}}{\alpha} \right) + \left( -\frac{1}{2} - p \right) \\
 & \leq n \leq \frac{1}{\lambda} \left( 2\ell - \frac{(1-\alpha)\sqrt{(x-\ell)^2+y^2}}{\alpha} \right) + \left( -\frac{1}{2} \right. \\
 & \quad \left. - p \right) \dots\dots (5)
 \end{aligned}$$

此式在任何情況下都適用

- g. “水波，光波兩圓形波干涉時所產生的節腹線分布情況是一致的”是正確的。由實驗可知水波和光波情況是相同的，只是波長的長短而已。
2. 由分析得知：(a)兩波源間的距離，(b)兩波源間的相角差，(c)兩波源間的頻率差異的確影響兩個點波源干涉產生的節腹線分布情形的因素。
3. 在本研究中發現，節腹線的分布在某些情形下是很難由實驗中獲得，就是能獲得也很難做廣泛的抽樣（例如：相位差），因此我們採用電腦模擬和畫圖，的確是補足了實驗的限制，而達到盡善盡美的境界。

## (二)研究價值：

1. 在高中物理中，節腹線的觀念對學生而言相當模糊，因此本研究對觀念的澄清有很大的幫助，更是同學和老師一份很好的資料，尤其有關節腹線分布的通式更值得參考。
2. 有關本研究中有關實驗的新技術（例如：光波節腹線的呈現、拍攝等）都可作為同學的借鏡。
3. 電腦模擬更可供大家對節腹線分布作更廣泛及更深入探討的資料。

## 八、參考資料

高中物理 吳友仁 東華書局 大學物理 李怡嚴 東華書局  
高級中學物理 國立編譯館

## 評語

1. 以光電計數器以及照相技術從事水波干涉實驗，頗具巧思，數據分析亦稱完整。
2. 設計透明壓克力板觀察當兩波波源相位差保持定值條件下的干涉現象，使干涉現象更能具體呈現，有助於教學。
3. 自行設計電腦程式，模擬波的干涉現象，且清晰展示節腹線形成過程，充份顯示作者應用電腦的能力。