

數學解題的啓示——四色積木的解法

高小組數學科第三名

高雄市博愛國民小學

作者：張堯渝、洪從真
高瑞紋、謝雯凌

一、研究動機

指導教師：高玉枝、吳吉昌

自從上了六年級以後，教室的佈置欄裡，就常常擺著各種具有挑戰性的數學題目或數學遊戲。有一次就出現了四塊積木，這四塊積木似乎與眾不同，每一塊積木都以紅、白、藍、綠四種顏色分別塗在各表面，但是每塊積木顏色的分佈都不一樣，而要求我們把這四塊積木疊在一起，使得每一側面都各出現四種顏色。對於這個挑戰，因為經過幾番的挫折，於是引起我們研究它的興趣。

二、研究目的

利用簡化問題的方法，解決四色積木的問題。

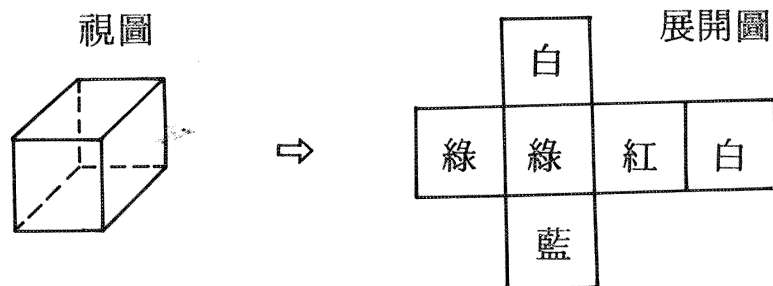
三、研究器材設備

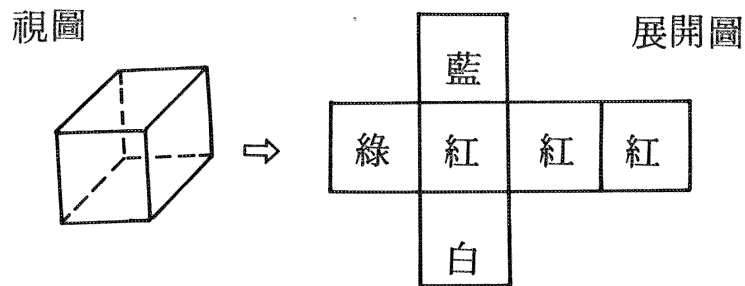
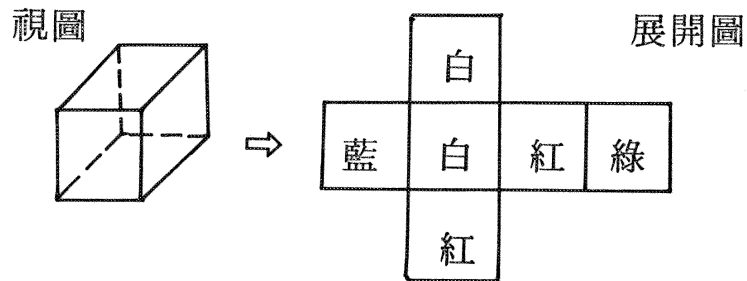
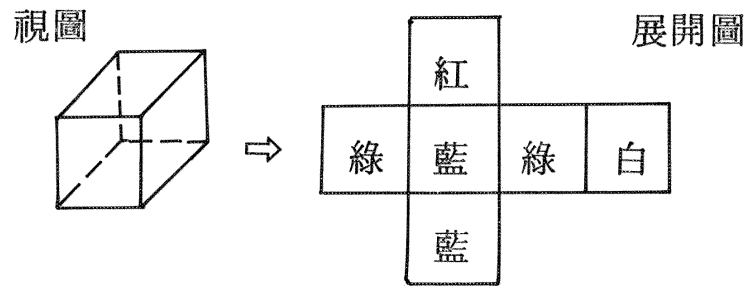
四色積木

四、研究過程

(一)瞎貓碰死耗子：

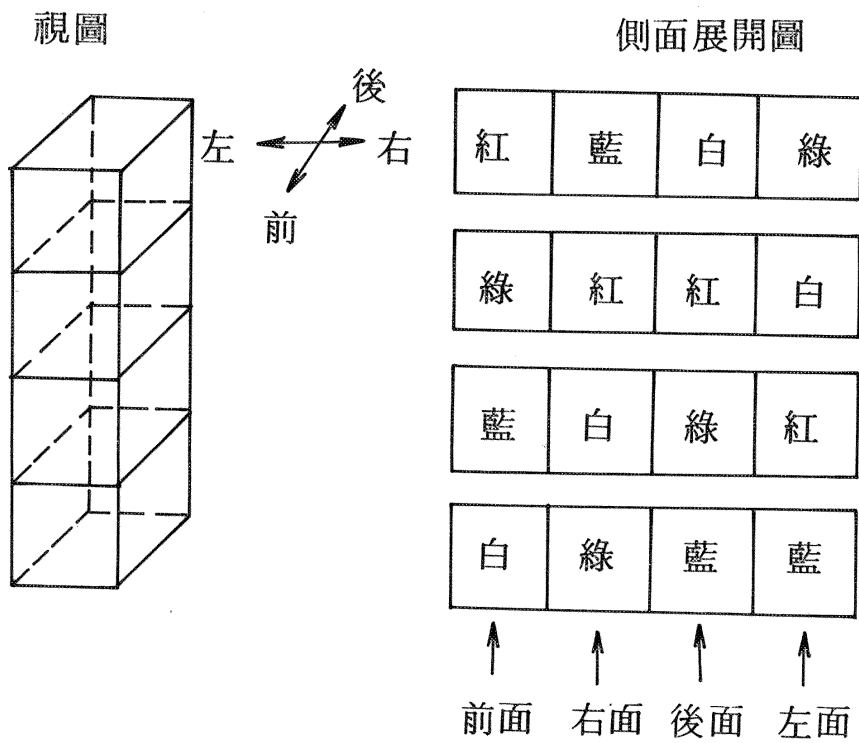
1. 每個人手中都拿了一組積木（四塊），其樣式如下：





(圖一)

2.我們憑著感覺去摸索，試著把積木堆疊成每一側面都出現四種顏色。*在腦海中先假設大概能疊成的情形如下：



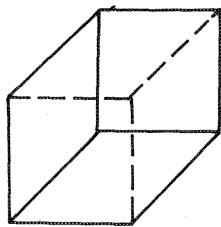
(圖二)

3.這個問題看起來很簡單，做起來卻不然。在二個多小時的奮鬥中，只有二位同學可以順利的堆疊成功。但是正當我們為此沾沾自喜時，老師卻把四塊積木攪亂，要求我們再度將它恢復成剛才疊成的樣子。再經過一個多小時的埋頭苦幹，我們才又嚐到成功的滋味。由此我們明瞭一個事實：沒有經過思考來尋求答案的這種方法，不會帶給我們經驗或智慧上的成長。想到六上數學課程裡的怎樣解題中，曾教過我們簡化問題的方法，於是做了以下的研究。

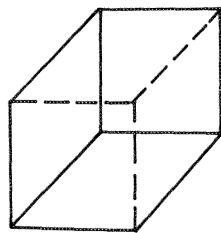
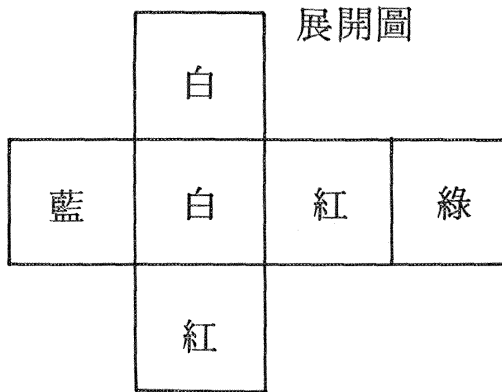
(二)簡化問題（減少積木數量，逐一淘汰不適合的）：

- 1.從多次嘗試失敗的經驗中，我們領悟到要堆疊成功，並不須要將四塊積木所在位置改變，也就是四塊積木的上下次序不必變動，所以我們將每塊積木的位置固定，只在原位旋轉，或將積木本身顛倒後再旋轉。
- 2.爲了紀錄方便，我們把積木編號：

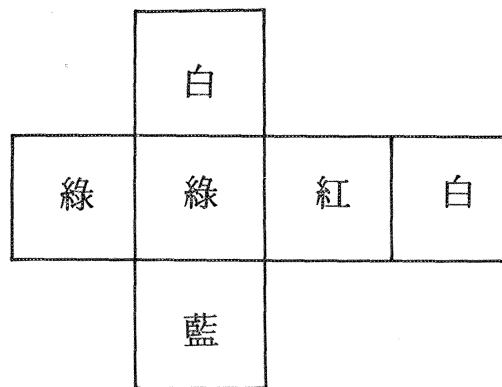
視圖

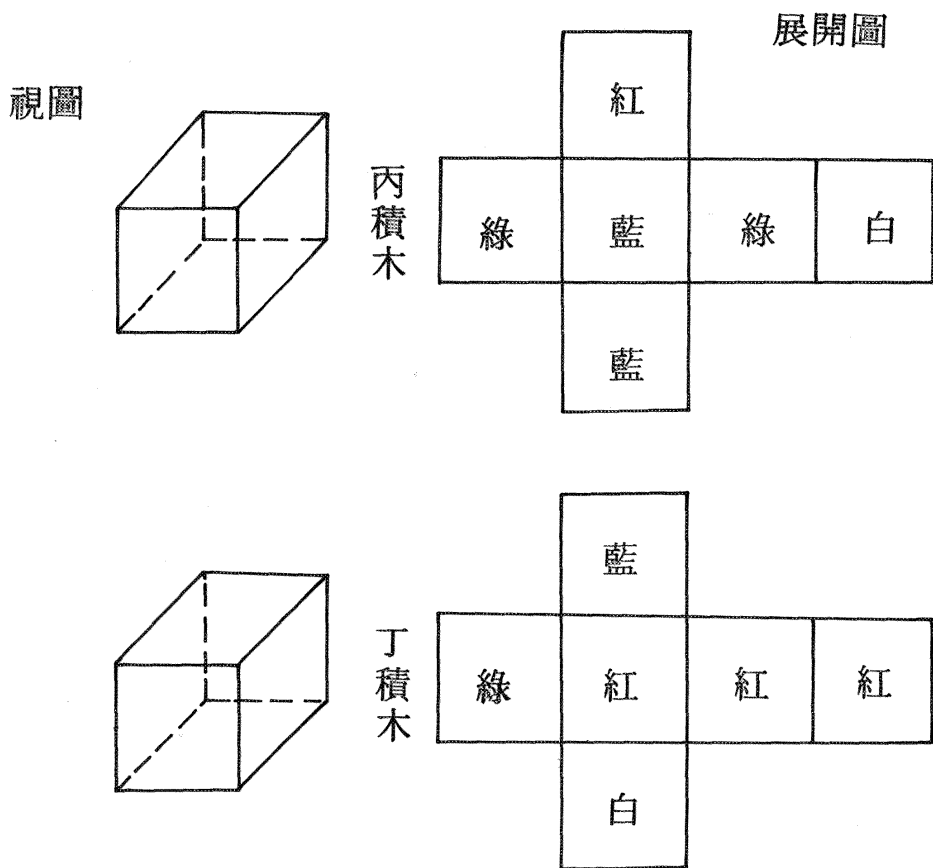


甲積木



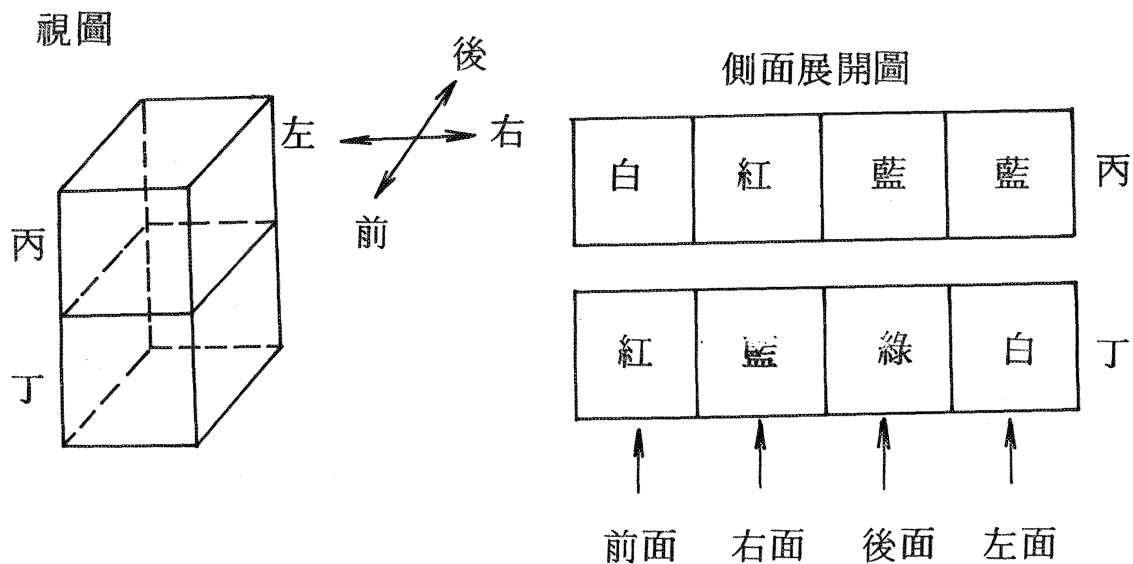
乙積木





(圖三)

3.先拿丙、丁兩塊積堆疊，旋轉成功，也就是每個側面都出現二種不同的顏色，如下圖：

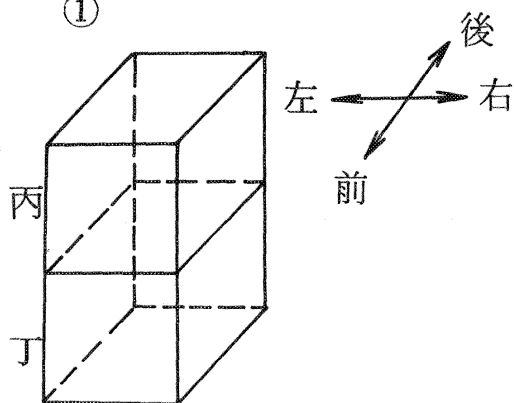


(圖四)

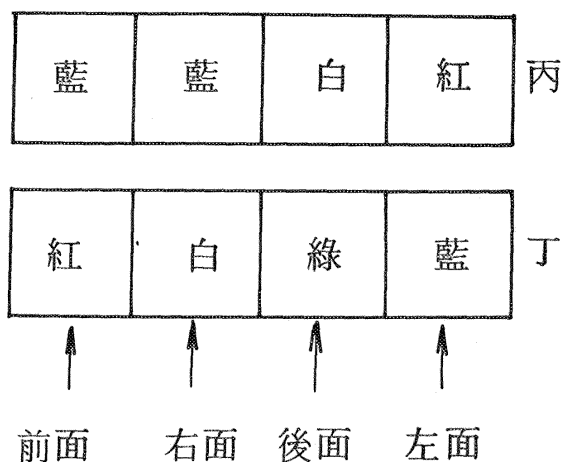
- 4.將旋轉成功的丙、丁積木固定，再拿乙積木疊在丙積木上，奇怪的是把乙積木旋轉或顛倒再旋轉，卻發現有兩種堆疊方式，使得每個側面都出現三種不同的顏色。我們想：是否丙、丁兩塊積木的堆疊情形，還有其他成功的例子呢？
- 5.我們把乙積木拿掉，再以丙、丁做堆疊，結果驚奇的發現共有二十七種堆疊成功的例子，下面是其中的兩種圖形（如①、②兩圖所示）。

視圖

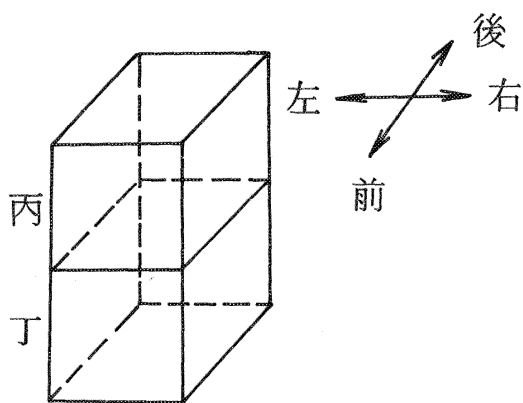
①



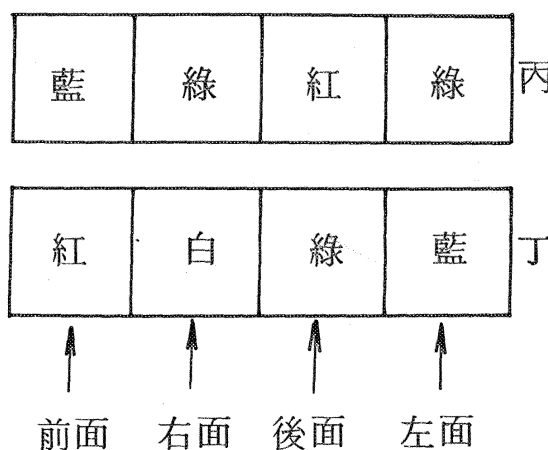
側面展開圖



②

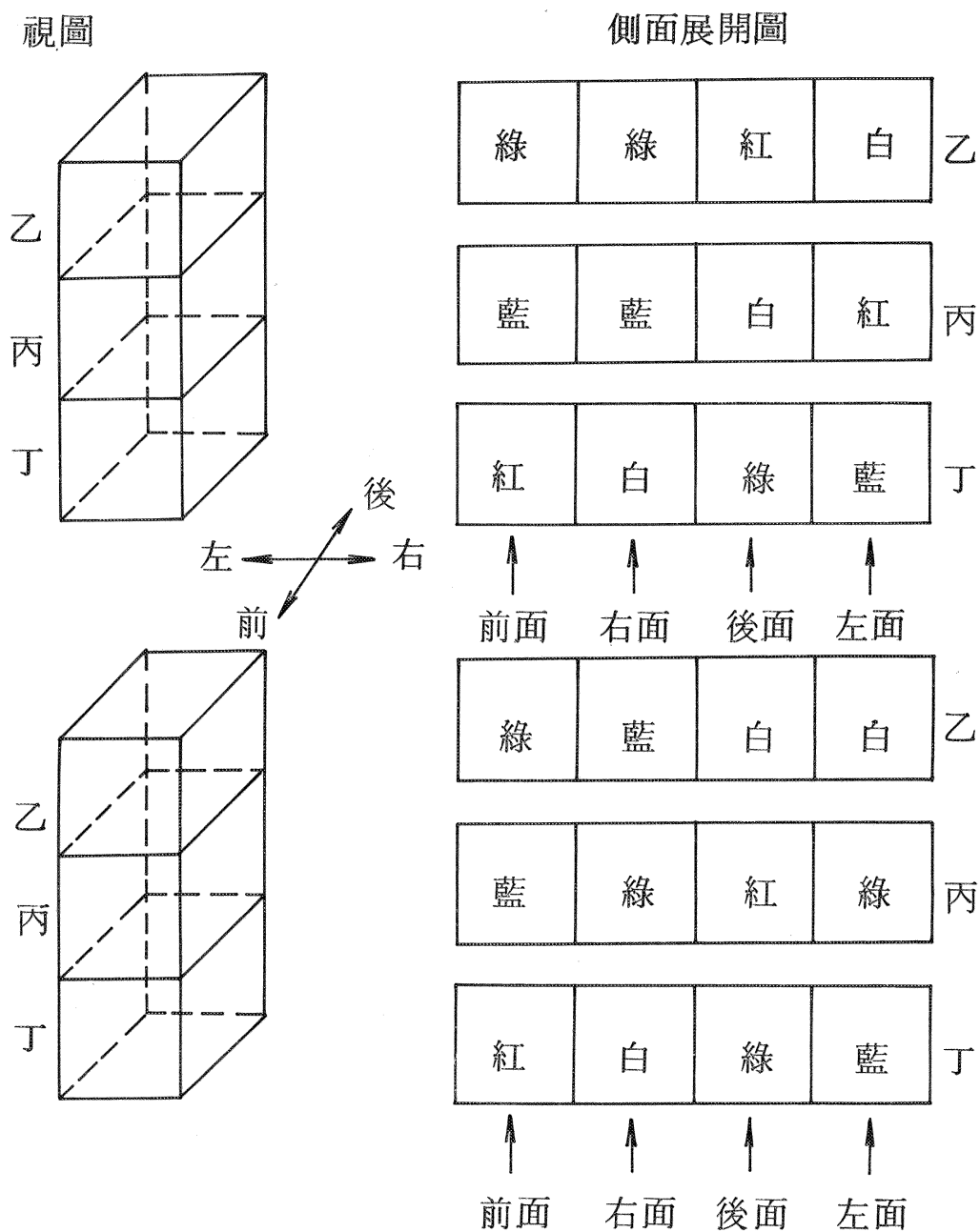


側面展開圖



(圖五)

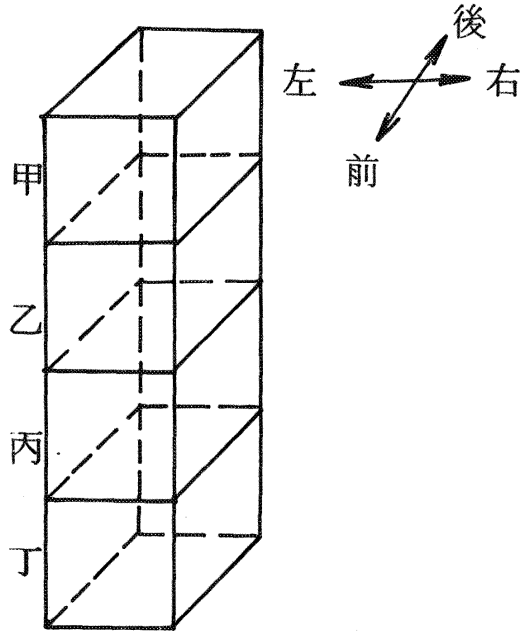
6. 將乙積木分別疊在以上的①、②……各個成功的例子，沒想到成功的情形總共六十五種，比疊二個積木的情形更多了，下面是其中的二個圖形：



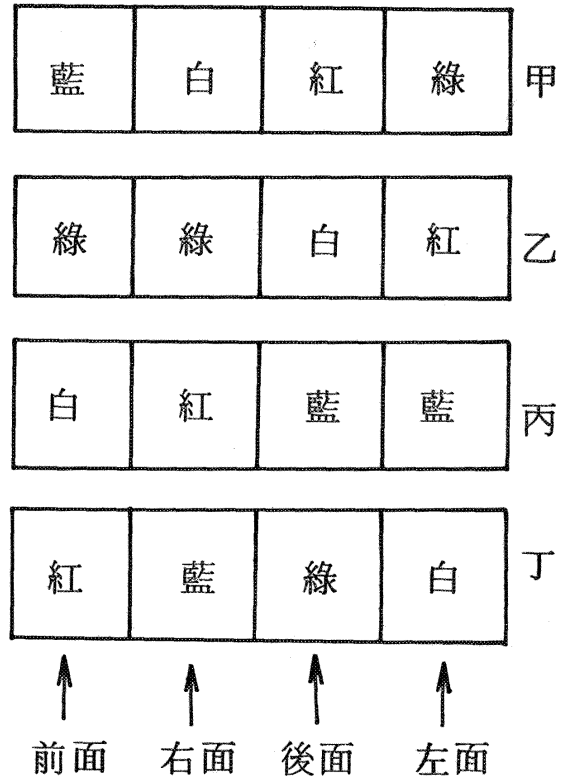
(圖六)

7. 同樣的將甲積木分別疊在以上六十五種成功的例子，最後的答案實在太不可思議了，在那樣衆多的旋轉的方式當中，卻獨獨只有一個是成功的。換句話說，只有一種堆疊方式可以使每個側面都出現四種不同的顏色。如下圖：

視圖



側面展開圖



(圖七)

如此費了九牛二虎之力，才把問題解決，心裡總覺得太煩雜，所以我們針對四色積木的顏色分佈情形做分析、探討，繼續研究。

㊦簡化問題（以顏色做為依據，減少操作次數）：

1. 以成功的目標（如圖二），分析四塊積木的側面展開圖，顏色出現的次數：紅、綠、藍白各出現四次。
2. 參考圖三分別分析每塊積木的顏色面數，並統計總面數。

類別		顏色	紅	綠	藍	白
甲	積木		2	1	1	2
乙	積木		1	2	1	2
丙	積木		1	2	2	1
丁	積木		3	1	1	1
四塊顏色總面數			7	6	5	6

(表格一)

- 3.再仔細的觀察四塊積木堆疊在一起的情況（如圖二的視圖）：
- (1)這種的堆疊方式，每一塊積木將有二個面，也就是說有二面的顏色不出現在側面。
- (2)不出現的兩面，是上下互相平行的那兩個面。
- (3)從以上(1)、(2)這兩個觀點來看，每次旋轉或翻轉，少掉的顏色必定是互相平行的其中一對。
- 4.從以上(三)~1 及(三)~2 的統計，推算每一種顏色不出現在側面的面數，如下表：

類 別 \ 顏 色	紅	綠	藍	白
四塊積木顏色總面數(□)	7	6	5	6
堆疊成功四塊積木顏色出現在側面的總數(□)	4	4	4	4
應該被放在上下位置的積木顏色面數(□)-(□)	3	2	1	2

(表格二)

從表格裡可以發現，紅色有 3 面不出現（即擺在上下位置），綠色有 2 面不出現，藍色有 1 面，白色則有 2 面。

- 5.根據以上的分析，把每一塊積木的顏色分爲三組（互相平行的兩面顏色當作一組），每一組將同時出現在側面或同時不出現在側面。分組如下：

甲積木	乙積木	丙積木	丁積木
(白，綠)	(綠，白)	(藍，紅)	(紅，紅)
(紅，藍)	(紅，綠)	(綠，綠)	(紅，綠)
(白，紅)	(白，藍)	(白，藍)	(藍，白)

- 6.從上面第 4 的統計及第 5 的分析，我們按照顏色不出現的次數做了以下的分組，這些都是可能成功的。

* 說明：有以線段連接的部分，是表示被放在上下兩面的部分，也就是不出現在側面。下列的四種組合都符合表格二的要求：

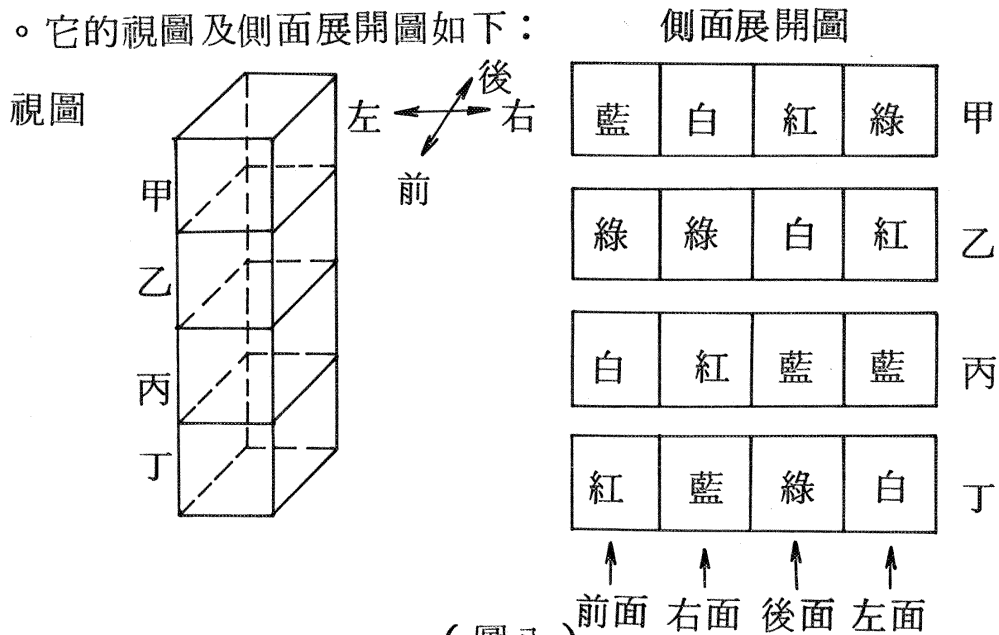
	甲積木	乙積木	丙積木	丁積木
(1)	(白, 綠)	(綠, 白)	(藍, 紅)	(紅, 紅)
	(紅, 藍)	(紅, 綠)	(綠, 綠)	(紅, 綠)
	(白, 紅)	(白, 藍)	(白, 藍)	(藍, 白)

	甲積木	乙積木	丙積木	丁積木
(2)	(白, 綠)	(綠, 白)	(藍, 紅)	(紅, 紅)
	(紅, 藍)	(紅, 綠)	(綠, 綠)	(紅, 綠)
	(白, 紅)	(白, 藍)	(白, 藍)	(藍, 白)

	甲積木	乙積木	丙積木	丁積木
(3)	(白, 綠)	(綠, 白)	(藍, 紅)	(紅, 紅)
	(紅, 藍)	(紅, 綠)	(綠, 綠)	(紅, 綠)
	(白, 紅)	(白, 藍)	(白, 藍)	(藍, 白)

	甲積木	乙積木	丙積木	丁積木
(4)	(白, 綠)	(綠, 白)	(藍, 紅)	(紅, 紅)
	(紅, 藍)	(紅, 綠)	(綠, 綠)	(紅, 綠)
	(白, 紅)	(白, 藍)	(白, 藍)	(藍, 白)

7. 將這四種分別去做堆疊的試驗，我們發現也只有第(4)種是成功的。
 它的視圖及側面展開圖如下：



8.討論：此種方法的確比前一個逐一淘汰的方法要快得多。但是每一種方法都應有它的優點，我們是不是可以綜合(一)、(二)的方法去解決問題呢？

(四)綜合(一)、(二)的方法：

1.先用(二)的方法：（以顏色做爲依據，減少操作次數）：

(1)先把每塊積木的顏色分析。

(2)研究想要達成的目標，其中的顏色分佈情形。

(3)分析每一種顏色該出現幾面，或不該出現幾面。

2.經過以上三個過程的選擇後，再用(一)的方法（減少積木數量，逐一淘汰不適合的），一個一個去驗證，必定能正確而且不遺漏的發現答案。

五、結論

(一)思考的確是解決問題的好方法，有頭緒的簡化問題，不僅可以解決疑難問題，而且有助於對問題更深入的了解。

(二)解決四色積木的方法，我們發現有下列：

1.第一種方法：嘗試錯誤。太花費時間，讓人感覺到有點碰運氣，但是一般人在沒想到策略之前，它是最常被採用的。

2.第二種方法：減少積木數量，逐一淘汰不適合的。有條理，也不會遺漏任何一種可能的解答。

3.第三種方法：以顏色做爲依據，減少操作次數。是我們自認爲最科學的，簡單又迅速。

(三)其實假如憑直覺去判斷，紅色面特別多，而丁積木的紅色面又有3面，所以丁積木的（紅，紅）那一組，應該是被放置在上下兩面的。從研究過程中(三)~6的分析，也不難發現，四種可能的解決方法當中，就有三種是去掉丁積木（紅、紅）的那一組。

(四)綜合以上探討過程，我們覺得：如果能把第二種簡化策略及第三種簡化策略的兩種方法合併使用（先用第三種再用第二種方法），再加上自己的判斷力，那麼就可以迅速、確實的解決問題。

評 語

學生對本題的解法知之甚詳很有概念，學生可做難度高的轉換，很靈活。