

押！押！押！

高小組數學科第一名

台北市立民權國民小學

作 者：張鈞淳、曾柏仁

楊璧瑜、張展璋

一、研究動機

指導教師：林志忠、洪雲江

過年時，大家總會賺不少紅包，我也不例外，口袋裡滿滿的不知道該怎麼花，所以過年時就有很多平時看不到的「娛樂」。今年我到北港大伯家去玩，在廟的旁邊看見很多人圍在一起「娛樂」，我也湊過去玩。心想：六個格子中三個，應該不會輸，就跟著大人押。我只覺得錢一直出來，而老闆的錢卻越來越多，實在很奇怪。算算，我輸了三百多元，心有不甘，改變押法再玩，想要撈本。乖乖！又賠上了兩百多元，趕快腳底抹油。開學了，一直都還很迷惑，明明六個中三個，機會一半一半嘛！怎麼我就特別倒霉，決定好好探討這個怪東西。

二、研究目的

- (一)這種「押！押！押！」的遊戲怎麼玩？
- (二)用三個骰子出現各種點數的變化有那些呢？
- (三)按照一般人的玩法，憑感覺隨興的押會贏嗎？
- (四)押的錢越多會如莊家說的「押越多，贏越多！」嗎？
- (五)押的位置不同，結果有何不同？
- (六)到底這種遊戲，莊家和玩家的勝算各是多少？
- (七)如果我是玩家有沒有好的策略能提高勝算呢？

三、研究過程

- (一)這種「押！押！押！」的遊戲怎麼玩？

1.方法：實地到攤子上去觀察，將過程做個觀察記錄。

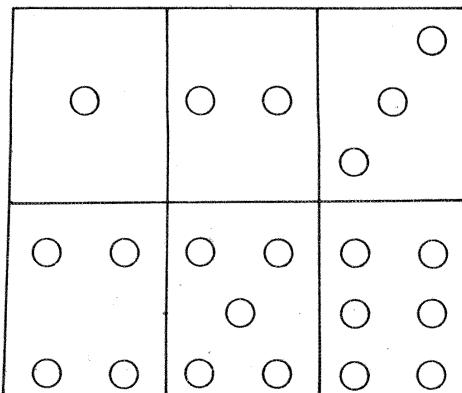
2.結果：

(1)一個人居中做莊家，玩家不限人數，不限錢數。

(2)莊家將裝有三個骰子的杯碟上下搖動後放在桌面上。

(3)玩家在如圖一的大紙上押錢，押的位置及錢自己決定。

(圖一)



(4)等到押確定了後，莊家翻開茶杯，三個骰子若出現 1 個玩家所押的號碼，玩家就拿回一倍的錢，兩個就兩倍。當然，沒出現，押的錢就歸莊家。

(二)用三個骰子出現各種點數的變化有那些？

1.方法：我們先觀察一個骰子。它一只有六面，而每次會出現其中一面，三個骰子一起觀察，我們列出它們所有的變化。

2.結果：

(1)一個骰子有 6 種組合。

(2)二個骰子有 36 種組合。

(3)三個骰子有 216 種組合。

3.討論：假設每種組合會出現一次的機會，於是我們決定每次實驗，都採用押 216 次加以記錄統計。

(三)按照一般人的玩法，憑感覺隨興的押會贏嗎？

1.方法：我們模仿攤子的玩法，玩 216 次後加以記錄。

2.結果：表一

押的號碼	押的次數	押的錢數	輸贏情形	百分率
隨 興	216	1630	-156	-9.57%

3. 討論：

(1) 從我們做的過程中，有押中的，有沒押中的。

(2) 玩了 216 次後，我們輸了 156 元。

(四) 押的錢越多會如莊家說的「押越多，贏越多！」嗎？

1. 方法：我們先用 1 元（不固定押的位置）押 216 次，再 2 元、3 元……到 12 元各押 216 次。

2. 結果：表二

每次押的錢數		1	2	3	4	5	6
勝負情形	+	103	111	156	285	365	491
	-	128	174	279	393	368	359
合 計		-25	-63	-123	-113	-3	+132
每次押的錢數		7	8	9	10	11	12 合 計
勝負情形	+	446	492	618	550	502	405 4524
	-	558	702	626	855	905	1117 6469
合 計		-112	-210	-8	-305	-403	-712 -1945

3. 討論：

(1) 除了押 6 元小贏外，其餘都是負的。

(2) 輸的最多的是押 12 元的（我們做的實驗而言）。

(3) 真正應了莊家所說的「押得越多，（我）贏得越多。」！

(五) 押的位置不同其結果如何呢？

1. 方法 1：我們先列出所有能押的位置。

2. 結果 1：押的位置共有 $6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$ 種。

3. 方法 2：依照各種押的位置，每種玩 216 次，並加以記錄統計。

4. 結果 2：圖二（如下頁）

5. 討論：

(1) 從圖二看來押的位置越多輸得越多。

(2) 由 6 個全押的操作中，我們發現只要二個骰子重覆，就會輸 1 元；三個重覆，就會輸兩元。

(3) 由於押的方式不同，造成押的個數有差異，若使其條件相同，

(假設都只押 1 個)我們得到下列的結果：

① $16.33 \div 1 = 16.33$

② $28.66 \div 2 = 14.33$

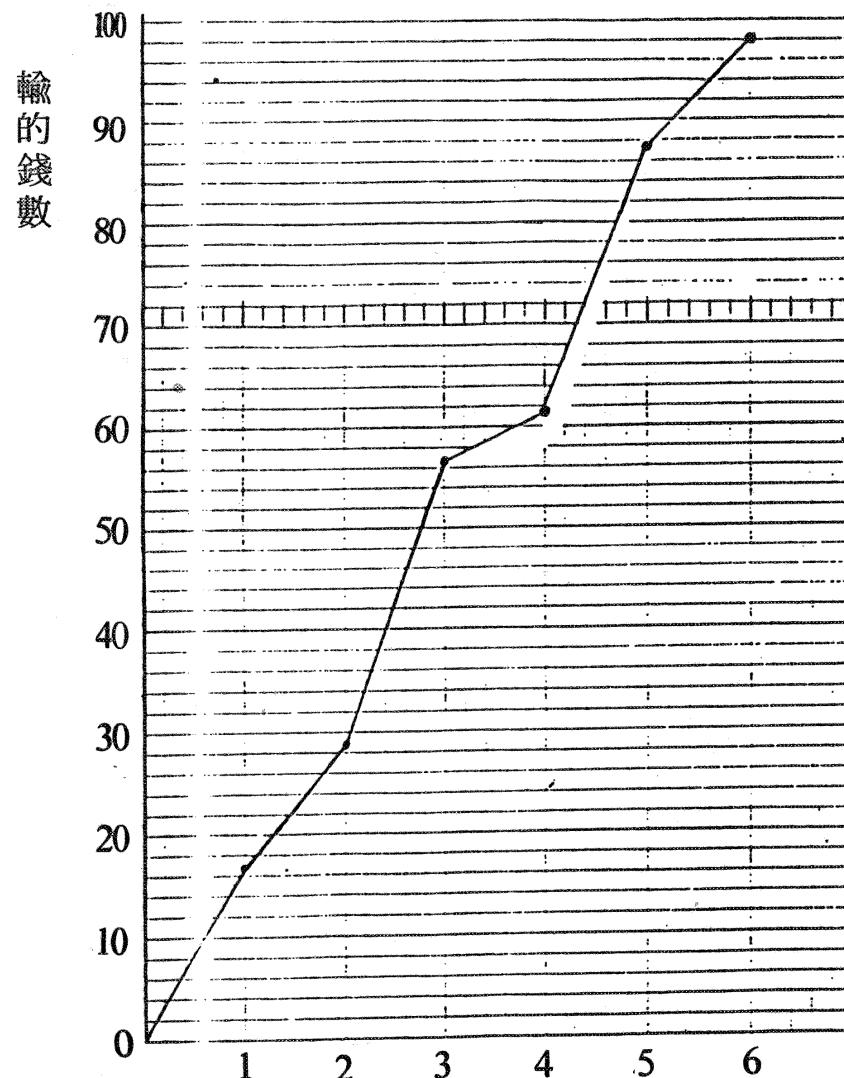
③ $56.65 \div 3 = 18.88$

④ $61.27 \div 4 = 15.32$

⑤ $87.67 \div 5 = 17.53$

⑥ $98 \div 6 = 16.33$

⑦以上之和再平均： $98.72 \div 6 = 16.45$



圖二 押的位置數

(4)由以上的討論，我們知道何以押的位置越多，輸的越多了。

(六)到底這種遊戲，莊家和玩家的勝算各是多少呢？

1.方法 1：我們先用 1 個骰子擲 216 次，記錄它出現的面。

2. 結果 1：表三

出現的面	1	2	3	4	5	6	合計
出現次數	40	33	38	32	38	35	216

3. 討論 1：依照理論推理，每個骰子有 6 面，每面出現的機會應該是 $216 \div 6 = 36$ (次)，而表三的結果已很接近，也就是說，每個骰子出現同一種號碼應有 $\frac{1}{6}$ 的機會。

4. 方法 2：我們進行理論上的推理。

5. 結果 2：

(1) 押中 1 個的機率是 $75 / 216$ 。

押中 2 個的機率是 $15 / 216$ 。

押中 3 個的機率是 $1 / 216$ 。

$$\text{總共會押中的機率是 } \frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = \frac{91}{216}$$

$$\text{而押不中的機率則有: } 1 - \frac{91}{216} = \frac{125}{216}$$

換言之：假使我會每次押 1 塊錢，216 次後將會輸：

$$125 - (75 + 15 \times 2 + 1 \times 3) = 17 \text{ (元)}$$

$$(17 \div 216) \times 100\% = 7.87\%$$

我們發現何以在實際操作時，總是輸在這個數目。

(2) 我們又發現，如果每個位置押 1 元的話，只要骰子重覆一個數，就會輸 1 元，全部出現一個數，則會輸去 2 元。於是我們發現有 $15 / 216$ 會中 2 個， $1 / 216$ 會中 3 個，則正好是： $1 \times 15 + 2 \times 1 = 17$ (元)，莊家就在這重覆時候佔便宜，難怪我們總是輸。

(七) 如果我是玩家，有沒有好的策略能提高勝算？

1. 討論：既然莊家佔便宜，在自然狀態下機率又不受操縱，要如何才能反敗為勝呢？

我們想到：(1) 從押的位置著手，但結果(五)指出此路不通。

(2) 順運氣，也不通，因為莊家勝算大。

(3) 從押的錢數著手，我們決定試試看。

2. 方法 1：我們試著找出一組數列，使後面要比前面大。

如：1、2、3、4、5……

1、3、5、7、9……

2、4、6、8、10……

結果：我們找到了如下一組數列：1、2、4、8、16、32……數列。

討論：這是我們從數學遊戲「萬能袋」得到的啓示（此遊戲玩法如附件 6）。

我們發現這數列有以下的特色：

(1) 後一數是前一數的兩倍。

1、2、4、8、16……

1、 1×2 、 2×2 、 4×2 、 8×2 ……

(2) 可組成任何一個數目。

(3) 後一數減前一數，所成的數列和原來的完全一樣。

1、2、4、8、16……

(2 - 1)，(4 - 2)，(8 - 4)，(16 - 8)，(32 - 16)……

(4) 任何一數，比前面數的總和多 1。

如 $8 - (4 + 2 + 1) = 1$

$16 - (8 + 4 + 2 + 1) = 1$

3. 方法 2：應用此數列，我們發現的第 4 個特性，我們活用它來押看看，每個數玩 36 次，共玩 216 次。

結果：表四

押的號碼	1	2	3	4	5	6	合計
勝負情形	+52	+27	+35	+24	+50	+27	+215

討論：(1) 我們只要押中一次，即從頭開始，如此可確保每回贏 1 元，用此方法，我們押任何一個號碼都「立於不敗之地」。

(2)我們推想，如果每個人都用這種方法的話，那麼就沒有人敢當莊家，自然可以將這種不好的「娛樂」消滅於無形。

四、結論與心得

(一)一般人認為骰子出現重覆時最好了，因為可以得加倍的錢，其實就整體的勝負來說，我們就是輸在重覆的時候。

(二)研究結果告訴我們，這是一個「機率」問題，機率是種可能性的探討，也就是說可能出現某種情形的機會的比率有多大，寫成算式就是：
$$\text{機率} = \frac{\text{可能出現該種組合的種類}}{\text{全部可能出現的組合種類}}$$

(三)應用它我們得知莊家的勝算是 $125 / 216$ ，超過一半，難怪我們總是輸。假若我們每回押 1 元，押 216 次後，將會輸 17 元。

(四)從研究過程中，我們知道了這種遊戲，為什麼會看起來公平，實際不公平的道理，也感受到追求「真象」的樂趣。

(五)「問題七」的數列問題很有趣，值得進一步探討。

五、參考資料

國小數學課本第十二冊，第 86 ~ 92 頁。

評語

學生對機率概念極為正確，不簡單；學生知道重複排列總數的算法，因此對排列組合方法很有認識。

問題取材自然，教師指導方式正確。