

# 假如我是對的——鬼腳圖的奧秘

## 初小組數學科第三名

台北縣國光國民小學

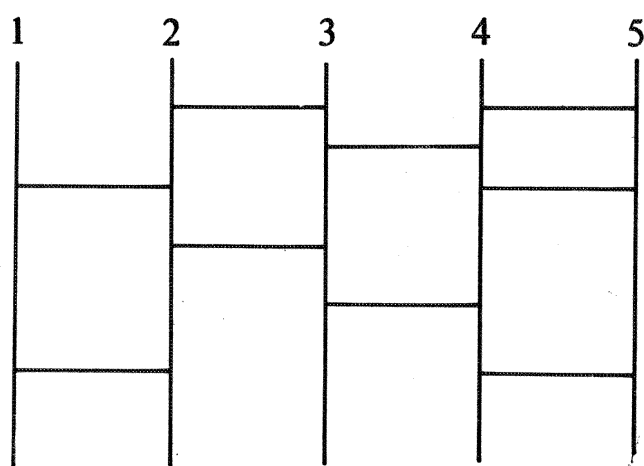
作者：林永泰、林淑惠

指導教師：林俊輝、何志浮

### 一、研究動機

你玩過“鬼腳圖”抽籤的遊戲嗎？有一次我們五位同學分配工作，就玩了一次“畫鬼腳圖決定工作”的遊戲。

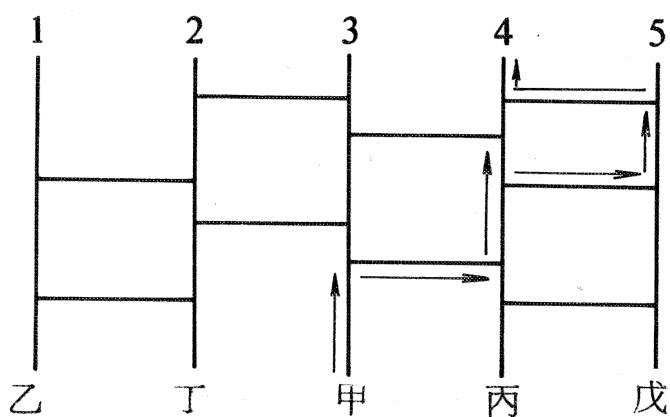
什麼是鬼腳圖呢？例如：甲、乙、丙、丁、戊 5 人要做 1、2、3、4、5 個工作，他們沒辦法決定誰做什麼工作，於是就畫一個鬼腳圖來決定：方式如下：



### 說明

先畫直線 5 條（5 人）直線與直線間各畫橫線若干，1、2、3、4、5 的工作寫在各直線上端，下端則是抽籤的人選填。

假如 5 人選擇填後如下：



### 求法

每人從直線的下端向上移動，逢橫線就轉彎，但只能轉向上或轉向左、或轉向右而不能轉向下，直達工作的位置。

上圖所抽籤結果是甲負責4的工作；乙負責5的工作；丙負責2的工作；丁負責3的工作；戊負責1的工作。

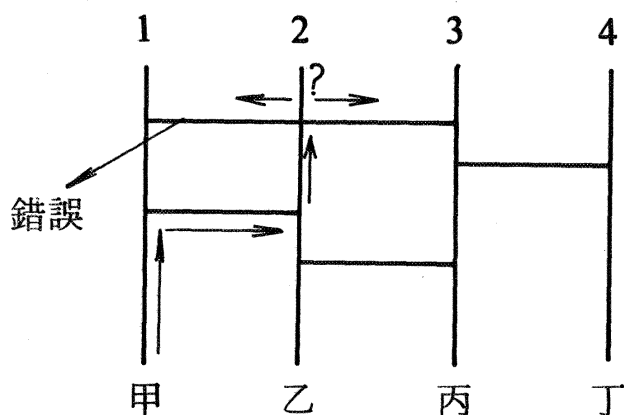
很奇怪的是：1. 每個人所抽到的答案，怎麼都會不同呢？

2. 中間的橫線有什麼作用呢？

3. 能不能依照我們的需要安排誰做什麼工作呢？

這些都令人感興趣，於是便做了這個研究，研究有什麼奧妙的地方。

注意：下列情況是不可出現的畫法。



舉例說明

如甲向上移，上轉右、右轉上，此時上轉向左或轉向右呢？

這條穿過直線的橫線就是錯誤的畫法了。

## 二、研究目的

(一) 鬼脚圖會不會出現二人或二人以上相同的答案呢？

(二) 鬼脚圖中間橫線增加或減少，所得的答案會改變嗎？

(三) 是不是每一種結果（排列）都可以用鬼脚圖表示出來？

(四) 每一種不同人數的鬼脚圖所出現的情形（排列組合）有多少個？

## 三、研究器材設備

測驗紙、白報紙、筆、口香糖、麪包、蛋糕、水果糖等。

## 四、研究過程及方法

(一) 鬼脚圖會不會出現二人或二人以上相同的答案呢？

1. 研究方法：設計一四人鬼脚圖，並設計好橫線（如圖所示），並延長橫線由下至上編上①②③④號碼。

2. 說明：

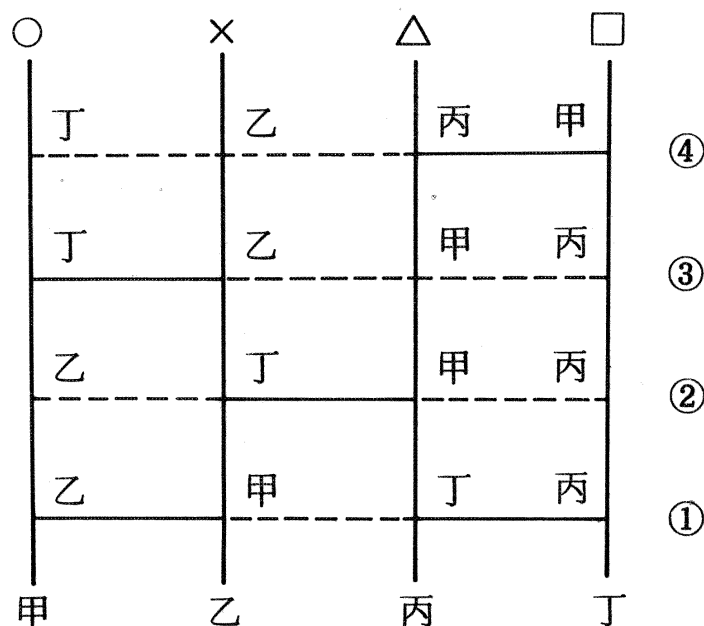
(1) 甲、乙、丙、丁向上移動到第①條橫線時，甲轉向右，乙轉向

左，丙轉向右，丁轉向左，由左至右排列成乙、甲、丁、丙，每人各佔一條直線。

(2)移動到第②條橫線時，乙不變，甲轉向右，丁轉向左，丙不變，排列成乙、丁、甲、丙，每人各佔一條直線。

(3)移動到第③條橫線時，乙轉向右，丁轉向左，甲、丙不變，排列成丁、乙、甲、丙，每人各佔一條直線，沒有重複。

(4)移動到第④條橫線時，丁、乙方向不變，甲轉向右，丙轉向左，排列成丁、乙、丙、甲，結果，丁得到了○，乙得到了×，丙得到了△，甲得到了□，每人仍然各佔一條直線，沒有重複。



3.結果：由方法中研究結果，我們得知不會出現二人或二人以上相同答案的原因：

(1)每越過一條橫線，每個人的位置都重新做了一次排列，組成另外一個型式。即每遇上一條橫線就必須重新做一次排列。每人仍然各佔一條直線，不會重複。

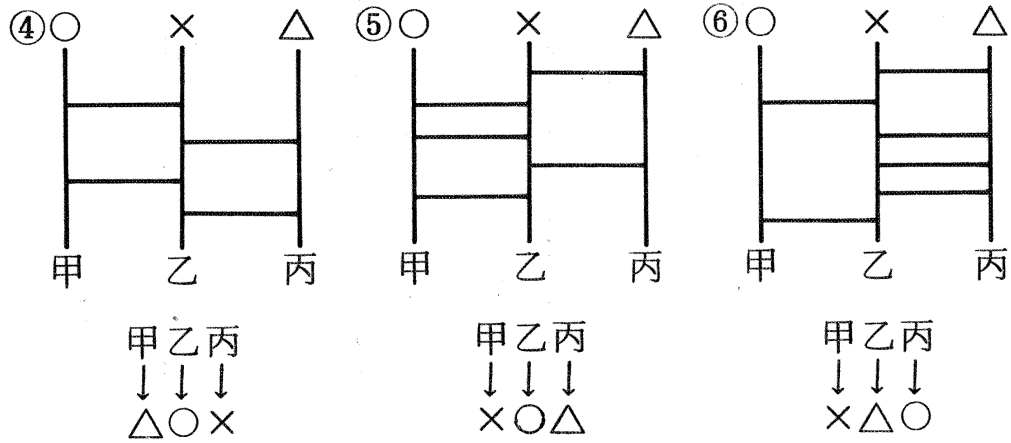
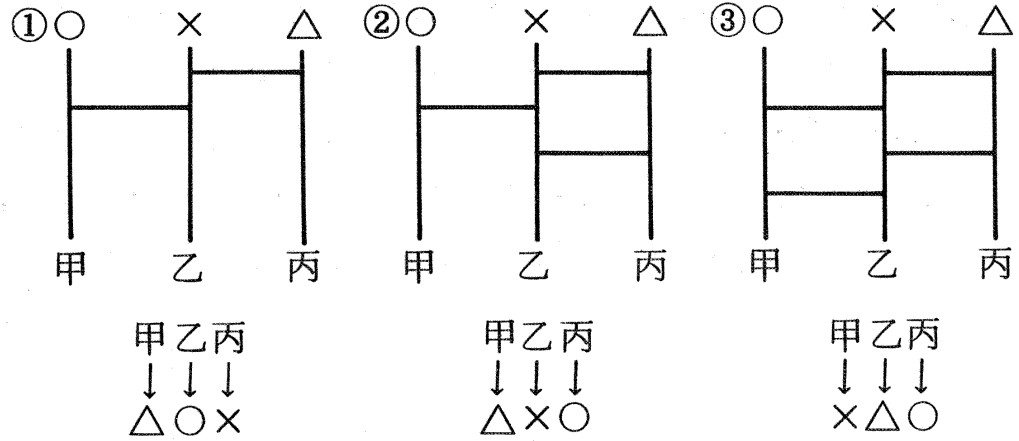
(2)我們由上發現，直線與直線間的橫線作用，就是把相鄰直線間的兩人做一次對調，重新排列。所以不管橫線有多少條，不管每人做了幾次對調排列，最後每個人還是各佔一條直線，不會有重複的問題，即不會有相同的答案。

(二)鬼腳圖中間橫線增加或減少，所得的答案會改變嗎？

1.方法：

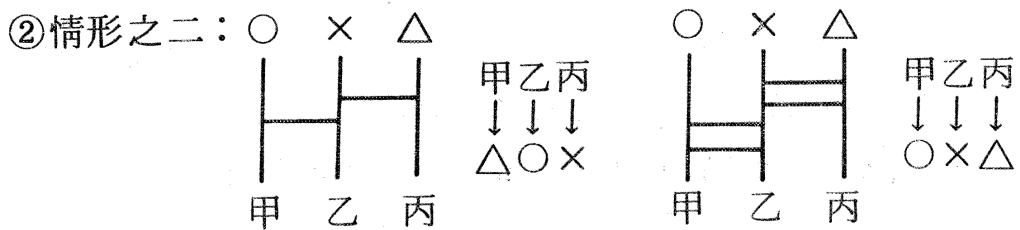
- (1)以三人畫鬼腳圖方式研究。  
 (2)任意增減中間橫線，研究其排列變化情形。  
 (3)結果其排列組合變化情形如下列 4 種。

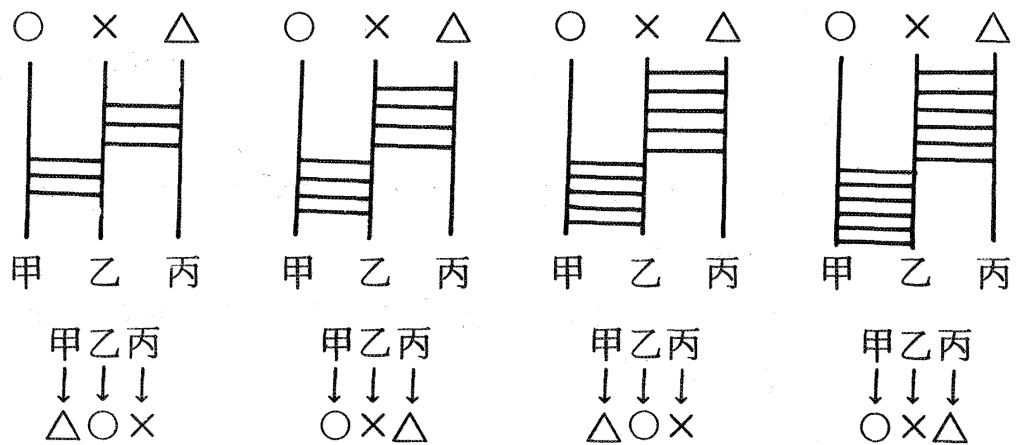
①情形之一：



發現：

- (A)因沒有規則的任意增減橫線，所出現的排列，結果相當有變化，但也出現相同的排列結果，相當有趣。如①與④。  
 (B)所增減的橫線會改變其排列組合結果。  
 (C)出現相同的排列結果的原因在哪裏呢？我們做規律性的增添橫線研究。

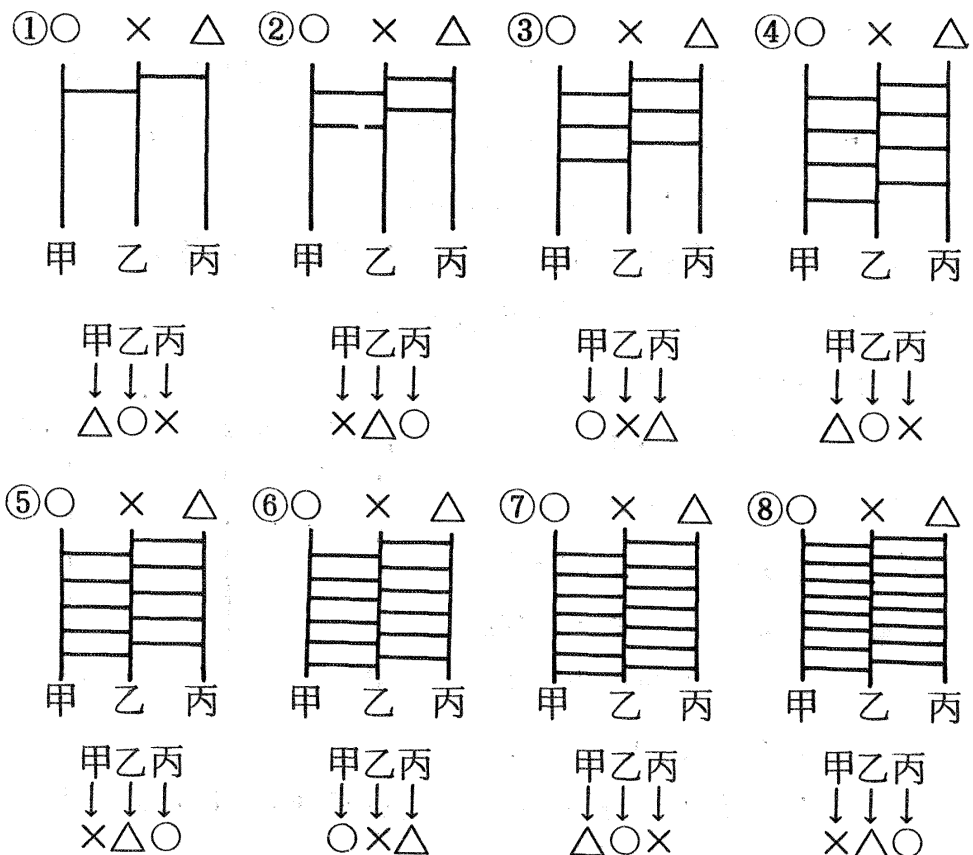




發現：

- (A) 有規律性的增加橫線，所出現的排列組合也有規律性。
- (B) 如上列情形(二)的各圖，連續所增添的橫線是偶數時，則其排列的結果不變。
- (C) 偶數橫線不改變他的排列組合，仔細移動一次研究發現所調換的排列又被調回原直線，所以排列組合的結果不變。即  $\Rightarrow$ 。

③情形之三：



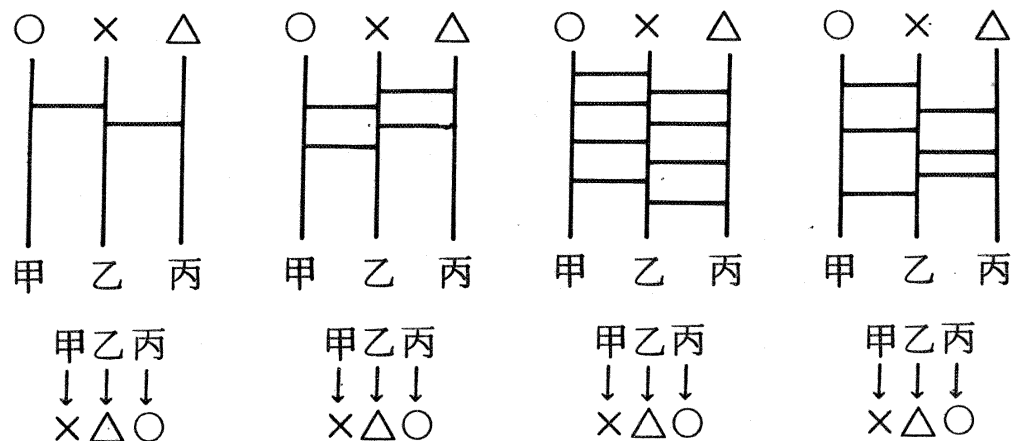
發現：

(A)排列情形①與④與⑦、②與⑤，③與⑥的排列組合結果相同。

(B)有規律的橫線增添，由上面得知橫線重複三次後，又回到原來的排列型式。

(C)推測四人鬼腳圖要重複4次，五人鬼腳圖要重複5次，六人鬼腳圖要重複6次。

④情形之四：



發現：

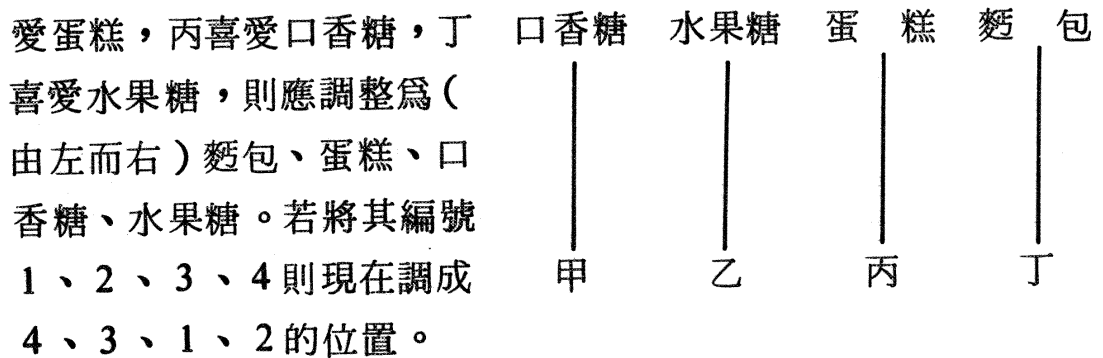
(A)中間橫線不相同型式之下會出現相同的排列組合。

(B)將一個排列組合用鬼腳圖表示出來，其表示方式不是只有一種，可以有許多種型式。

(三)是否每一種結果(排列)都可以用鬼腳圖表示出來？

1.方法：以實物和一個四人鬼腳圖來研究。

假設甲喜歡麪包，乙喜



自左而右1、2、3、4的位置調成4、3、1、2經我們

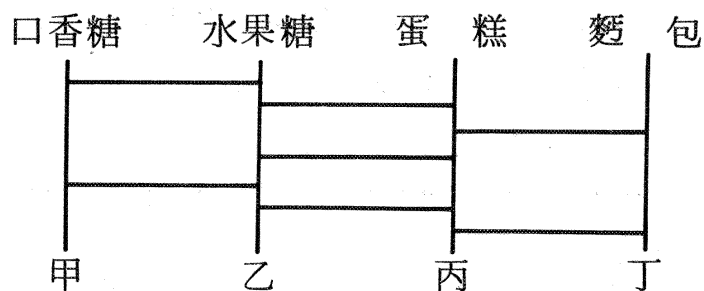
實物調換得知 ( 1 , 4 ) → 即 1 和 4 位置調以下同。( 2 , 3 )  
 ( 3 , 4 ) 即成。經我們研究結果列表如下：

( 1 , 4 ) 調換表

線 別	第 1 線	第 2 線	第 3 線	第 4 線	說 明	簡 寫
原 位 置	1	2	3	4	物品在原線上	
第 1 次 調	2	1	3	4	第 1 線物和第 2 線物調換	( 1 、 2 )
第 2 次 調	2	3	1	4	第 2 線物和第 3 線物調換	( 2 、 3 )
第 3 次 調	2	3	4	1	第 3 線物和第 4 線物調換	( 3 、 4 )
第 4 次 調	2	4	3	1	第 2 線物和第 3 線物調換	( 2 、 3 )
第 5 次 調	4	2	3	1	第 1 線物和第 2 線物調換	( 1 、 2 )
2 、 3 對 換	4	3	2	1	第 2 線物和第 3 線物調換	( 2 、 3 )
3 、 4 對 換	4	3	1	2	第 3 線物和第 4 線物調換	( 3 、 4 )

2. 結果：

- (1) 得知 1、2、3、4 調成 4、3、1、2 需經過 ( 1 , 2 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 2 , 3 ) ( 1 , 2 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 4 ) 的步驟才成。
- (2) 調換前要先定調換原則即 ( 1 , 4 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 4 ) 再決定調換的步驟。
- (3) 依各人意願畫出鬼腳圖如下：



⇒ 皆大歡喜

(四)每一種不同人數的鬼脚圖所出現的情形(排列組合)有多少個?

1.方法:依自由意願請全班畫2、3、4、5人鬼脚圖並統計共有多少種。統計表如下:

人 數	2	3	4	5
出現答案(個)	2	6	24	120

2.結果:

(1)依表看有右上左下斜乘得每種人數的個數特性。

(2)依此推之6人是  $6 \times 120 = 720$ 。

## 五、結果及討論

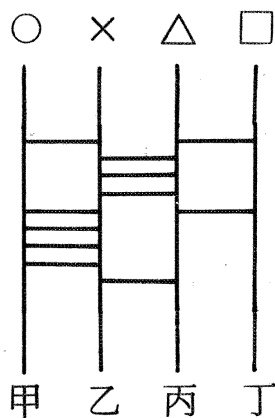
(一)鬼脚圖是一個排列組合的遊戲，由研究中我們得知橫線的作用就是做調換的工作。(位置互換)

(二)直線只走一次，而橫線都走了兩次。(因位置互換)

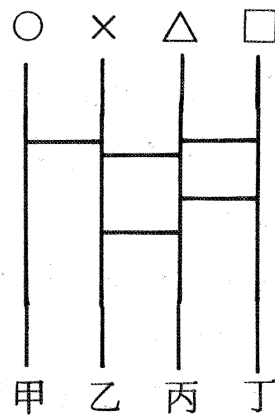
(三)不會出現二人以上得相同答案的原因在於橫線的功用。

(四)同一種排列在鬼脚圖上表示出來的方式不只一種，可有多種。

(五)橫線規律的增添會回到原排列，即有換等於沒換，可以把這種橫線刪去，如下圖可免走許多冤枉路。



可刪成  
→  
(在一起的  
偶數橫線)

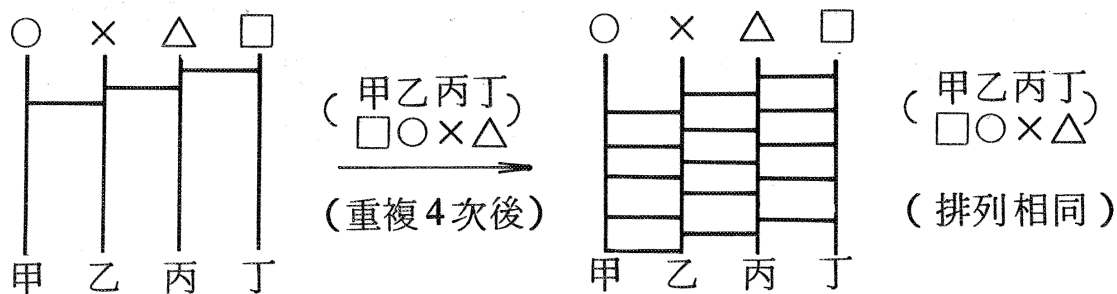


結果排列仍是

( 甲乙丙丁 )  
( ×△□〇 )



(六)在問題(三)的第③種情形中，我們推測四人鬼脚圖要重複4次，五人鬼脚圖要重複5次，證實如下圖。



(七)在問題(三)中我們學會了已知的排列組合要在鬼脚圖上表示出來的方法：即先把握調換原則再編定調換步驟，經操作證實，每一排列皆可在圖上畫出。

(八)在鬼脚圖上的調換步驟中，我們發現  $(1, 4) \rightarrow (1, 2)(2, 3)(3, 4)(2, 3)(1, 2)$ 。而  $(2, 4) \rightarrow (2, 3)(3, 4)(2, 3)$ 。在  $(1, 3)$  則  $(1, 2)(2, 3)(1, 2)$ 。即不相鄰的兩線還要調回原來的直線。相鄰的兩線則相互對調即可如  $(2, 3) \rightarrow (2, 3)$ 。

(九)在問題(四)中，我們由表上得到了計算不同的人數有幾個排列組合的方法，相當有趣。例：2人  $\rightarrow$  2種。3人  $\rightarrow 3 \times 2 = 6$  (種)。4人  $\rightarrow 4 \times (3 \times 2) = 24$  (種)。5人  $\rightarrow 5 \times (4 \times 3 \times 2) = 120$  (種)。推之6人  $\rightarrow 6 \times (5 \times 3 \times 2) = 720$  (種)。

## 六、感想

(一)有許多人問為什麼稱呼“鬼脚圖”？我們想，這種方式很“鬼怪”又有直線像“脚”吧！

(二)這次的研究討論，我們發現數學就在日常生活中，沒去研究就不知道他的樂趣在哪裏。

(三)鬼脚圖位置的互換是有步驟的，做事也要一步一步來。

## 七、參考資料

寓數學於遊戲第一輯 趙文敏編著

數學遊戲大觀 陳懷書編 台灣商務印書館

## 評 語

- (一)作者發現鬼脚圖之橫線是連續相鄰兩縱線之交換結果，把數學上 *Permutation* 之觀念簡單的在此表示出來，對初小學生實是難得。
- (二)但操作上對逆推回啓始點並未能清楚完成是為缺點。