

「棋迷之迷」的探討

初小組數學科第一名

嘉義縣過溝國民小學

作者：蔡坤佑、高三貴
蔡淑玲、高玉鳳

指導教師：李春瑛、曾月梅

一、研究動機

暑假快結束了，媽媽希望我們能把假期中弄亂的書櫥重新整理，並把新買的書放到適當的位置，我們選了個全家有空的日子，就動起手來。姊姊、我和弟弟的書有限，一會兒工夫就整理好了，倒是爸爸還有一大堆沒處理好，我們又幫不上忙，就乾脆坐下來看看爸爸散置在地上的書，在這些書中，有三本薄薄的「回饋學刊」引起了我的注意，我拿來翻看。其中第二冊中有一篇「棋迷之迷」特別具有挑戰性。內容是：

「一張西洋棋盤，縱橫各有 8 個方格，總共有 64 個方格，一副牙牌有 32 張，一張牙牌可蓋住 2 個方格，這副牙牌恰好可以蓋滿整個棋盤，如果把棋盤的右下角和左上角各剪去一個方格，棋盤上還能蓋得下幾張牙牌？」

我想剪去兩格，恰好少了一張牙牌的位置，應該可蓋得下 31 張牙牌，但是文章裡面却暗示 31 張的答案並不正確，我找第三期並沒有解答，問爸爸是否有第四、五、六……期，爸爸說沒有，要我自己求出正確答案。我只好向老師求救，並邀請幾位好朋友共同參與。

二、研究問題

- (一)棋盤不剪掉任何方格，可蓋得下多少張牙牌？
- (二)棋盤的右下角剪去一個方格時，可蓋得下多少張牙牌？
- (三)剪掉的那個方格不限定在右下角時，蓋得下的牙牌數有沒有變動。

- (四)在棋盤的右下角和左上角各剪去一個方格時，可蓋得下多少張牙牌？
 (五)剪去的兩個方格不限定位置時，有什麼變化？
 (六)能不能找出簡單的公式，算出正確的牙牌數？
 (七)如果棋盤是長方形時，牙牌數又有什麼變化？

三、研究過程

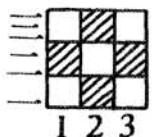
我們利用圖畫紙畫成了每邊由 2 格到 8 格的 7 個棋盤，並用色卡紙剪了長方形的牙牌做了下面的探討：

棋盤的觀察：

我們仔細的觀察了棋盤後，發現：

- (一)白色的方格占(奇……奇)或(偶……偶)位置。灰色的方格占(奇……偶)或(偶……奇)位置。
 (二)每邊有奇數個方格時，白色方格比灰色方格多了一格，如每邊有 5 格時，棋盤上共有 25 個方格，有 13 個白格，但只有 12 個灰格。每邊有偶數個方格時，白格和灰格一樣多。如每邊有 4 個方格時，棋盤上共有 16 個方格，有 8 個白格，也有 8 個灰格。
 (三)每邊有奇數個方格時，四個角都是白色方格，每邊有偶數個方格時，左上，右下是灰格，左下，右上則為白格。
 (四)一張牙牌所蓋住的方格必定是一白方格和一灰方格。

〔問題一〕

如果棋盤不剪掉任何方格(如：)可蓋得下多少張牙牌？

爲了簡化問題，我們由每邊有二格做起直到每邊有八格的棋盤。經過實際的排列計算後，得到下表：

棋盤每邊方格數	2	3	4	5	6	7	8
方格總數	4	9	16	25	36	49	64
牙牌數	2	4	8	12	18	24	32
未蓋方格	0	1 白	0	1 白	0	1 白	0
	$4 \div 2 = 2$	$9 \div 2 = 4 \dots 1$	$16 \div 2 = 8$	$25 \div 2 = 12 \dots 1$	$36 \div 2 = 18$	$49 \div 2 = 24 \dots 1$	$64 \div 2 = 32$

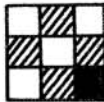
〔討論〕

由上面的實際操作中，我們發現：

- (一) 棋盤每邊有奇數個方格時，最後有一白色方格沒有被牙牌蓋住。
- (二) 棋盤每邊有偶數個方格，每一個方格都會被牙牌蓋住。
- (三) 牙牌數可用下面公式求得：

$$\text{一邊} \times \text{一邊} \div 2 = \text{牙牌數} \cdots \cdots \text{餘數} \quad (\text{公式一})$$

〔問題二〕

如果在棋盤右下角剪去一個方格時（如：）可蓋得下多少張牙牌？

經過實驗的操作後，得到下表：

棋盤每邊方格數	2	3	4	5	6	7	8
方格總數	3	8	15	24	35	48	63
牙牌數	1	4	7	12	17	24	31
未蓋方格	1白	0	1白	0	1白	0	1白
	$3 \div 2 =$ $1 \cdots 1$	$8 \div 2$ $= 4$	$15 \div 2$ $= 7 \cdots 1$	$24 \div 2$ $= 12$	$35 \div 2$ $= 17 \cdots 1$	$48 \div 2$ $= 24$	$63 \div 2$ $= 31 \cdots 1$

表 二

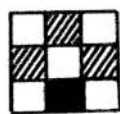
〔討論〕

- (一) 每邊有奇數個方格時被剪去的是白格，每邊有偶數個方格時被剪去的是灰格。
- (二) 每邊有奇數個方格時，不管是完整的或剪去一方格，所需的牙牌數一樣多，而每邊有偶數個方格時，剪去一方格時比完整時少一張牙牌。
- (三) 使用的牙牌數可用下面公式計算：

$$(\text{一邊} \times \text{一邊} - 1) \div 2 = \text{牙牌數} \cdots \cdots \text{餘數} \quad (\text{公式二})$$

- (四) 每邊有奇數個方格時恰好可全部被牙牌蓋住，而每邊有偶數格時則有一白格未被牙牌蓋住。

〔問題三〕

被剪掉的方格位置不固定在右下角時，（如：）使用

的牙牌數，是不是會有所不同。

我們一一做實驗，結果得到下表：

棋盤每邊方格數		2	3	4	5	6	7	8
方格總數		3	8	15	24	35	48	63
剪去灰格	牙牌數	1	3	7	11	17	23	31
	未蓋方格	1白	2白	1白	2白	1白	2白	1白
剪去白格	牙牌數	1	4	7	12	17	24	31
	未蓋方格	1灰	0	1灰	0	1灰	0	1灰

表 三

〔討論〕

(一)每邊有偶數個方格時：

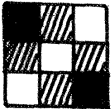
1. 剪去灰格時，最後有一白格沒被牙牌蓋住，如果剪去白格，則有一灰格沒被牙牌蓋住。
2. 不管缺少的空格在那個位置，使用的牙牌都一樣，可用（公式二）計算出來。

(二)每邊有奇數個方格時：

1. 剪去灰格時，最後有二白格沒被牙牌蓋住。如果剪去的是白格，則棋盤上的方格全部都能被牙牌蓋住。
2. 剪去白格比剪去灰格多使用一張牙牌。
3. 剪去白格時使用的牙牌數，可用（公式二）算出，但剪去灰格時，必須用下列公式計算。

$$(\text{一邊} \times \text{一邊} - 1) \div 2 - 1 = \text{牙牌數} \dots \dots \dots (\text{公式三})$$

〔問題四〕

如果在棋盤的右下角和左上角各剪去一個方格（如：）會有什麼情形發生。

我們經過實地的操作後得到表四（略）

〔討論〕

- (一)棋盤每邊有奇數格時，沒有被蓋住的一格都是灰格。
- (二)棋盤每邊有偶數格時，沒有被蓋住的二格都是白格。

(三)使用的牙牌數可用下列公式表示：

1.每邊有偶數格時：

$$(一邊 \times 一邊 - 2) \div 2 - 1 = \text{牙牌數} \dots\dots\dots (公式四)$$

2.每邊有奇數格時：

$$(一邊 \times 一邊 - 2) \div 2 = \text{牙牌數} \dots\dots\dots 1 \quad (公式五)$$

[問題五]

如果被剪去的二方格不固定在右下角和左上角時會有什麼情形？

我們分別以(一)剪去的都是灰格。(二)剪去的都是白格。(三)剪去一灰格和一白格，做實驗。

經過實際的操作後，有下列情形：

棋盤每邊方格數		2	3	4	5	6	7	8
方格總數		2	7	14	23	34	47	62
剪去 2 灰格	牙牌數	0	2	6	10	16	22	30
	未蓋方格	2 白	3 白	2 白	3 白	2 白	3 白	2 白
剪去 2 白格	牙牌數	0	3	6	11	16	23	30
	未蓋方格	2 灰	1 灰	2 灰	1 灰	2 灰	1 灰	2 灰
剪去 1 灰格 1 白格	牙牌數	1	3	7	11	17	23	31
	未蓋方格	0	1 白	0	1 白	0	1 白	0

表 五

[討論]

(一)剪去灰色方格時：

1.沒被蓋住的都是白格，棋盤每邊有偶數格時有 2 格沒被蓋住，每邊有奇數格時則有 3 白格沒被蓋住。

2.棋盤每邊方格數，不論是奇數或偶數，使用的牙牌數都可以沿用 (公式五) 計算。

(二)剪去白格時，除了棋盤每邊有奇數格時，沒被蓋住的方格是灰格而不是白格外，其餘都和問題四的情況一樣。

(三)剪去一灰格和一白格時：

1.棋盤每邊有奇數格時，有一白格沒被蓋住。

2. 每邊有偶數格時，則全部格子都能被蓋住，這情形和問題一相同。
3. 棋盤每邊方格數不論是奇數或偶數，使用的牙牌數都可用（公式五）計算得知。

〔疑問〕

做完上面的探討，我們發現：

- (一) 剪去灰格和白格對蓋住的牙牌數有不同的影響。
- (二) 要利用五道公式才能計算各種情況的牙牌數真麻煩。難道沒有更簡單的方法嗎？

〔探究〕

我們重新檢討了前面的紀錄，把有關資料列表加以比較研究探討。

- (一) 只剪去灰格或白格。（表六）略。
- (二) 同時剪去灰格和白格。

甲剪去的灰格多於白格。（表七）略。

乙剪去的灰格等於白格。（表八）略。

〔歸納〕

由上面的探討，我們歸納出：

- (一) 只剪去灰格，或同時剪去灰格、白格，剪去的灰格多於或等於白格時，使用的牙牌數隨剪去的灰格數的增加而減少，可用（公式六）計算。

一邊 × 一邊 ÷ 2 - 被剪去的灰格數 = 牙牌數……（公式六）

- (二) 只剪去白格，或同時剪去灰格，白格，而白格多於灰格時，可分為：

(甲) 棋盤每邊有偶數格時，使用的牙牌數可沿用（公式六）算得。

(乙) 棋盤每邊有奇數格時，使用的牙牌數則要用（公式七）來計算：

一邊 × 一邊 ÷ 2 - 被剪去的白格數 + 1 = 牙牌數……（公式七）

完成了正方形棋盤的探究後，我們想：

「如果棋盤不是正方形，而是長方形時，情況又會有什麼不同呢？」於是又開始下面的研究。

（長方形的部份略去）。

四、結 論

做完正方形和長方形兩種棋盤的探討後，我們發現：

- (一)正方形每邊有偶數個方格和長方形兩邊都是偶數個方格，或一邊是偶數格一邊是奇數格時的方格總數都是偶數，這時在棋盤上灰色方格和白色方格一樣多。
- (二)正方形每邊有奇數個方格，和長方形兩邊都是奇數個方格時的總方格數是奇數，這時在棋盤上白色格比灰色格多一格。
- (三)使用的牙牌數，隨剪去的灰格或白格的增加而減少。
 - 1.只剪去灰格時可用（公式六）求得。
 - 2.只剪去白格時必須看棋盤是：
 - (1)正方形每邊都是偶數格，長方形兩邊都是偶數，或一邊是偶數一邊是奇數時，用（公式六）計算。
 - (2)正方形每邊都是奇數格或長方形兩邊都是奇數格時，則要用（公式七）計算。
 - 3.同時減去灰格和白格時，就要比較灰格剪得多或白格剪得多，如果灰格剪得多，用（公式六）計算，如果白格剪得多，則比照只剪白格的計算方法就行了。

五、參考資料

- (一)回饋學刊 雲林縣土庫國中。
- (二)趣味的數學 國語日報社。
- (三)數學遊戲大觀 前程出版社。
- (四)科展優勝作品專輯（國小組） 國立台灣科學教育館。

評 語

- (一)本作品對於一位初小學生能設想一個簡單的西洋棋盤上，從最少的兩格到正式棋盤的 64 格中，研究如何蓋滿，更且設想任何一個方格若缺口時，如何發現不可能蓋滿的情形，在這方面的創見是為難得。

- (二)作者對於棋盤上任意指定之缺口，只要是在可蓋滿之條件下均能非常熟練地將其操作完成。
- (三)作者在解決所指定之問題時，都能以奇偶數之分類來推出可有解或無解之數學方法說出結果。