長方形交替切割成正方形的問題 ——

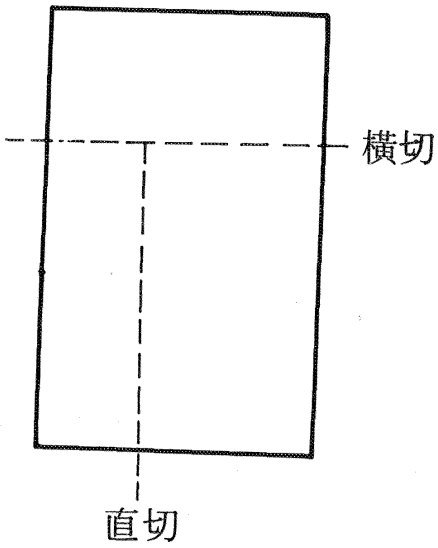
費氏數列及黃金矩形的研究

國中組數學科第三名

台北市立金華女子國民中學　　作　　者：顏永愉、王智璿、郭正佩
指導教師：陳文瑛

一、研究動機

國中數學課本第四册曾提到黃金矩形的意義。如圖，就長方形較長的部分剪下長條叫做「橫切」，剩下的長方形，依與橫切垂直的方向剪下長條叫做「直切」，而黃金矩形經橫切及直切交替切割下，可切出無限個正方形。我們便想，什麼樣的長方形可交替切割成有限個正方形。



二、研究目的

我們要探討的是那些長方形在橫切及直接的交替切割下，可以切成有限個正方形，並找出這類長方形與黃金矩形之間的關係。

三、研究器材設備

紙、筆、簡單自製模型。

四、研究內容

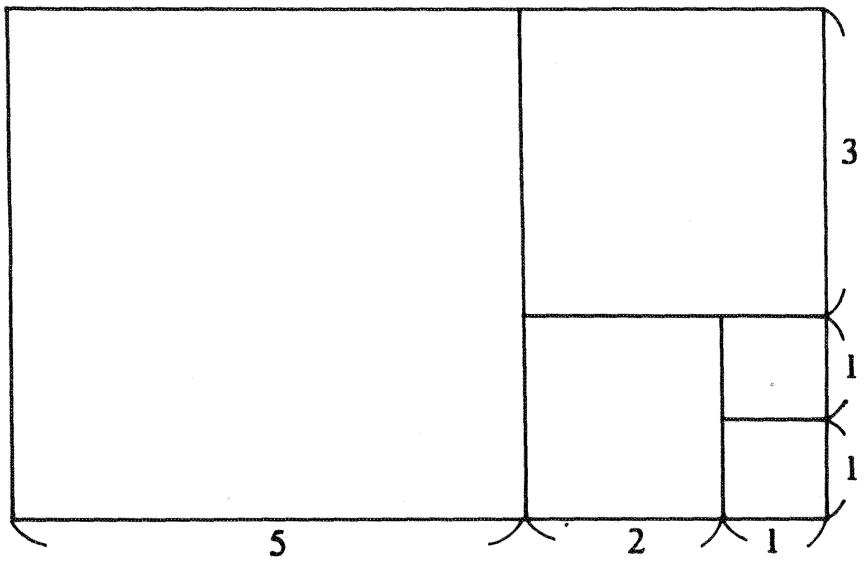
㈠由費氏數列相鄰兩項爲邊長所構成的長方形可交替切割成有限個正方形。如圖一

邊長是 2 和 1 的長方形可切割成 2 個正方形。

邊長是 3 和 2 的長方形可切割成 3 個正方形。

邊長是 5 和 3 的長方形可切割成 4 個正方形。

邊長是 8 和 5 的長方形可切割成 5 個正方形。



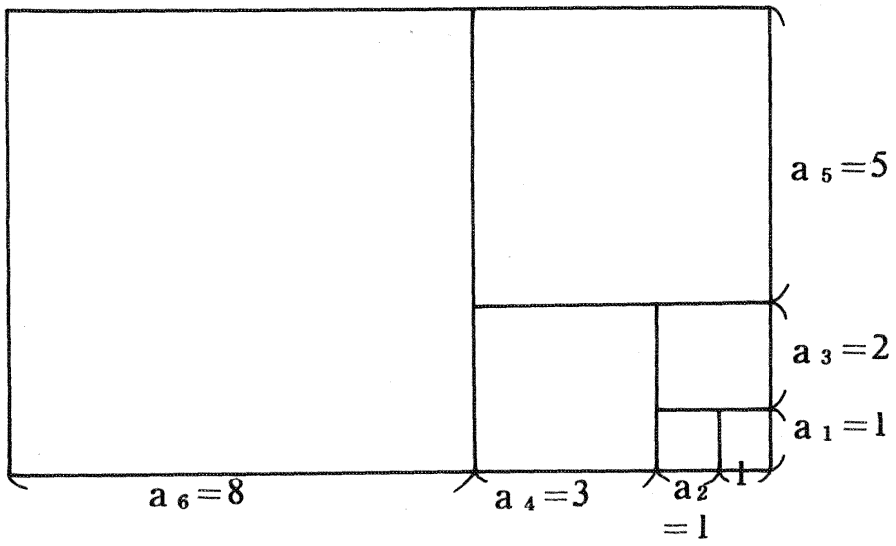
圖(一)

以此類推，可看出 1 、1 、2 、3 、5 、8……正是費氏數列，由此可知邊長由費氏數列相鄰兩項組成的長方形，可切出有限個正方形。

爲了方便起見，我們稱這種長方形爲費氏矩形，並設邊長 2 及 1 的爲第 2 級費氏矩形，邊長 3 及 2 的爲第 3 級費氏矩形……。

(二)由費氏矩形之拼圖方式，證明費氏數列的性質。

如圖二



圖(二)

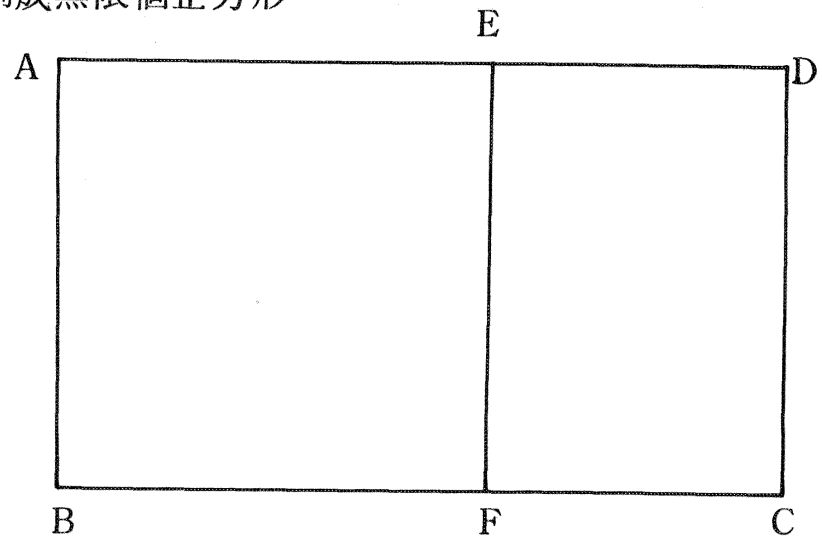
費氏數列中奇數項 a_1．a_3．a_5 ……在長方形的一邊依序出現，而偶數項 a_2．a_4．a_6 ……在長方形的另一邊依序出現。我們由此推廣出費氏矩形的四個性質：

1. $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots\cdots\cdots a_{2n-1} = a_{2n}$
2. $1 + a_2 + a_4 + a_6 + \cdots\cdots a_{2n} = a_{2n+1}$
3. $1 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots a_n = a_{n+2}$
4. $a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_n^2 = a_n \times a_{n+1}$

㈢黃金矩形可交替切割成無限個正方形

如圖三

設ABCD是黃金矩形，可以證明ABCD可切割成一個正方形ABFE和另一個黃金矩形EFCD。同理，EFCD可切割成一個正方形和另一個黃金矩形。



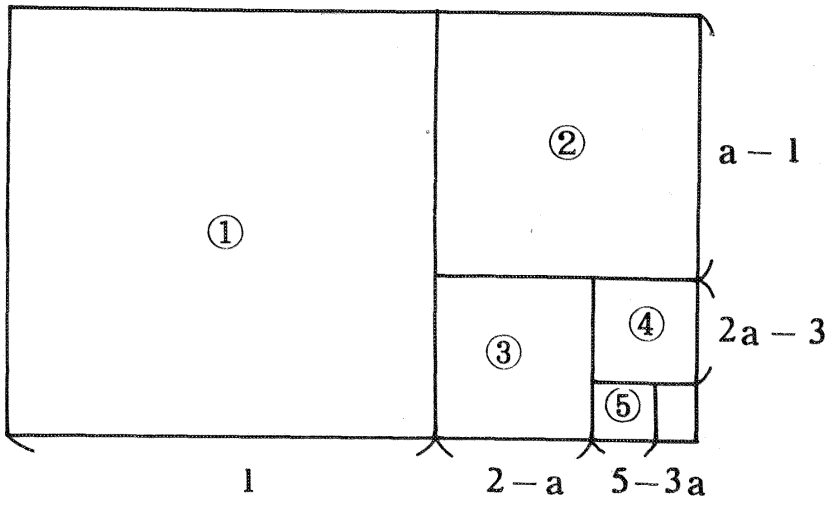
圖㈢

由此可知，黃金矩形可交替切割成無限個正方形。

㈣由黃金矩形之可切割性，導出黃金矩形與費氏矩形長寬比值之關係。

如圖四

設黃金矩形的長是 a，寬是 1，可求出交替切割出的正方形邊長依次爲：1，a－1，2－a，2a－3，5－3a ……此數列從第三項起，每一項都是前兩項的差。



圖㈣

因爲正方形的邊長必爲正數，

所以 $a-1>0$ ， $a>1$

$2-a>0$ ， $a<2$

$2a-3>0$ ， $a>3/2$

$5-3a>0$ ， $a<5/3$ ……

整理上面的結果，列出表一及表二

<表一>

	費氏矩形長寬比值	黃金矩形長寬比值的範圍
1	1	大於 1
2	2	小於 2
3	3/2	大於 3/2
4	5/3	小於 5/3
5	8/5	大於 8/5
6	13/8	小於 13/8

<表二>

a 的 範 圍	a 的 範 圍 之 近 似 值
$1<a<2$	$1<a<2$
$3/2<a<5/3$	$1.5<a<1.66666$
$8/5<a<13/8$	$1.6<a<1.625$
$21/13<a<34/21$	$1.615384<a<1.619047$
$55/34<a<89/55$	$1.617647<a<1.6181818$
……	……

由表一，可看出黃金矩形與費氏矩形長寬比值的關係。

由表二，黃金矩形長寬比值 $a=\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\doteqdot 1.6180336$ 與費氏矩形長寬比值吻合。因此我們可知費氏數列後項及前項的比值 a_2/a_1、a_3/a_2、a_4/a_3、a_5/a_4 ……與黃金矩形長寬比值越來越接近。

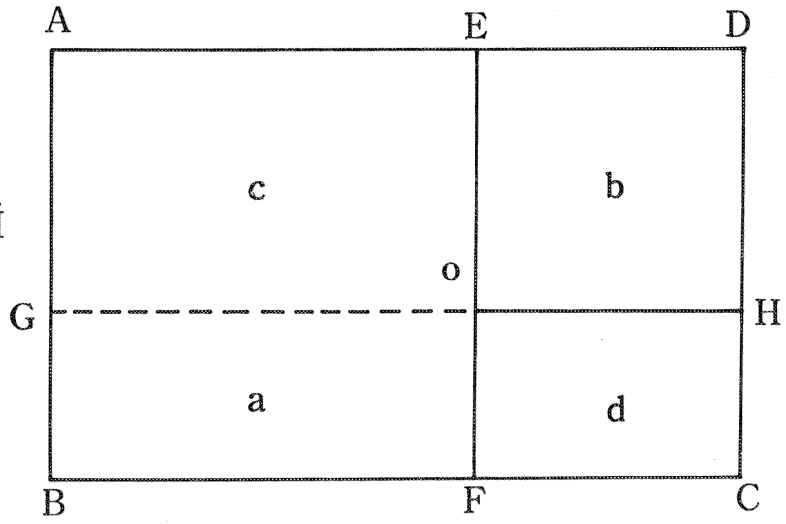
(五)黃金矩形與費氏矩形切割圖形之比較進一步說明費氏數列的性質。

如圖五

ABCD是黃金矩形，ABFE及EOHD是正方形，延長$\overline{OH}$交$\overline{AB}$於G，可將此矩形分爲a、b、c、d四部分，我們可證明

1、b＝c－d

2、b＝a



圖(五)

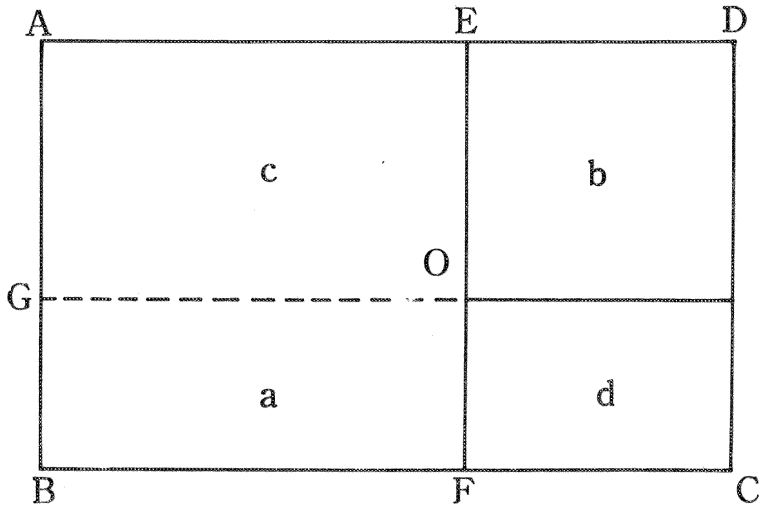
如圖六

我們也將費氏矩形ABCD依上述方法分割成四個圖形，來探討a、b、c、d之間的關係，結果：

1、b＝c－d

2、b＝a＋1

或b＝a－1

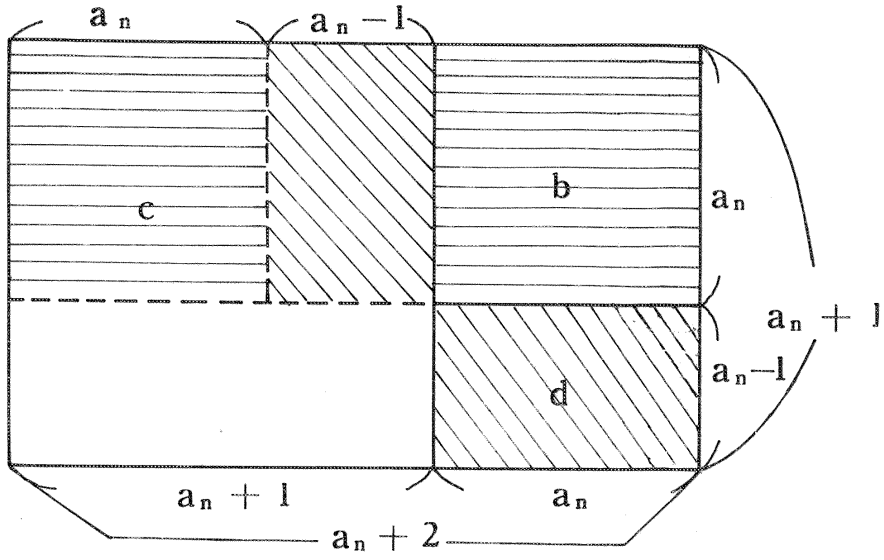


圖(六)

證明於後：

1. b＝c－a

的證明，如圖七，在圖形c上取一長方形，使此長方形面積等於d可以證明切割剩下部分面積等



圖(七)

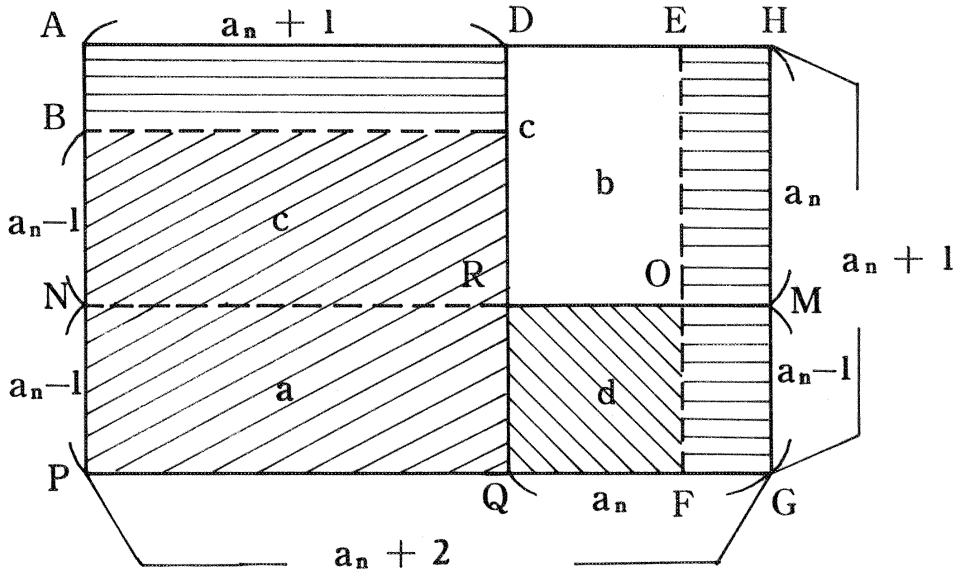
於 b，所以 $b = c - d$

2. $b = a + 1$ 或 $b = a - 1$ 的證明

如圖八

$$b - a = c - d - a = (c - a) - d$$
$$= ABCD - d$$
$$= EFGH - d$$
$$= EOMH - RQFO$$

所以費氏矩形 APGH 的 b − a 等於次一級費氏矩形 DQGH 的 EOMH-RQFO（即 a − b）如此，逐級下降，可推出費氏數列的 $b = a + 1$ 或 $b = a - 1$，（第三級的 $b - a = -1$）。



圖(八)

3. 由圖七及圖八，可說明費氏數列的另二個性質：

(1) $a_n^2 = a_{n+1} \times a_n - a_n \times a_{n-1}$

(2) $a_n^2 = a_{n+1} \times a_{n-1} + 1$ 或

$a_n^2 = a_{n+1} \times a_{n-1} - 1$

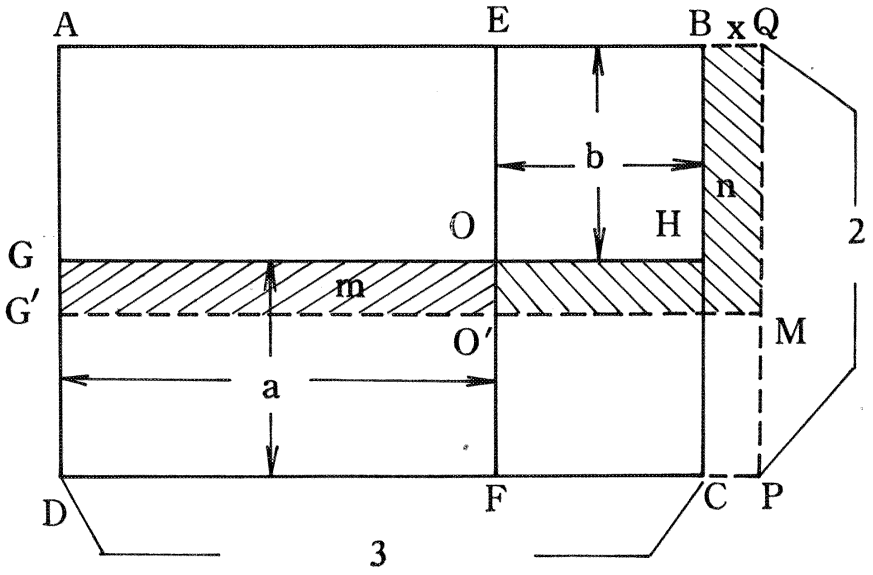
(六)由費氏矩形修補爲黃金矩形，增或減的長條寬度說明兩者的關係。

如圖九

設費氏矩形的長與寬是 3 和 2，因爲 $a = 2$，$b = 1$ 欲將此矩形修改爲黃金矩形，必須補上一長條 BCPQ，設 $\overline{BQ} = \overline{X}$ 作正方形

EQMO′，並延長$\overline{MO'}$交$\overline{AD}$於G′，由黃金矩形G′DFO′＝EQMO′即a－m＝b＋n，移項得a－b＝m＋n，由前知a－b＝1可推出m＋n＝1

從圖形可以看出3x＜m＋n且5x＞m＋n，即3x＜1且5x＞1，得1／5＜x＜⅓



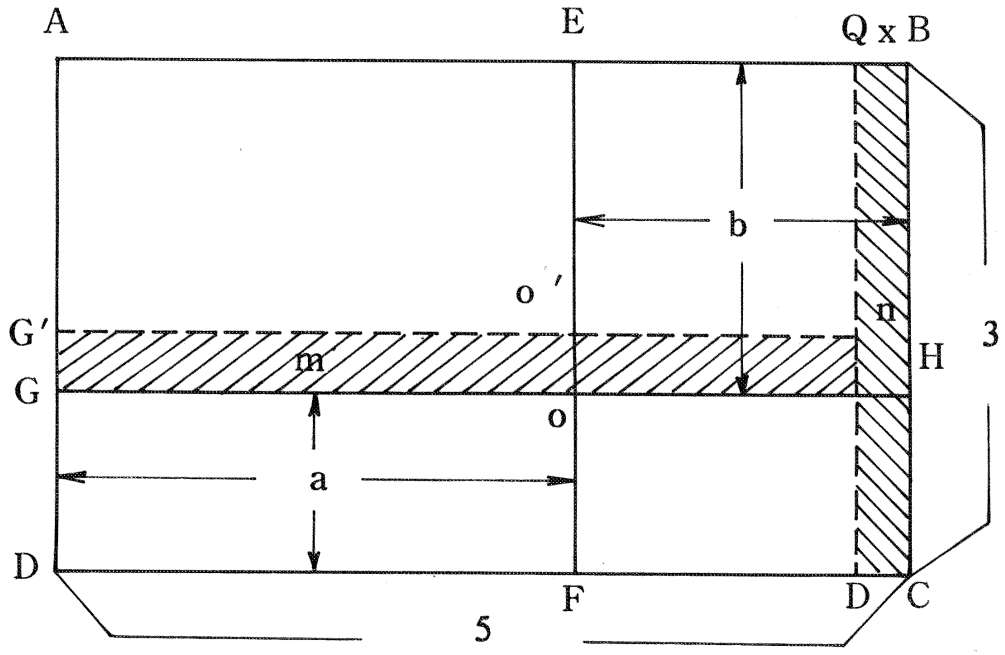
圖(九)

如圖十

設費氏矩形的長與寬是5和3，因爲a＝3，b＝4，欲將此矩形修改爲黃金矩形，必須削去一長條BCPQ，設$\overline{BQ}$＝x，作正方形EQMO′，並延長$\overline{MQ'}$交$\overline{AD}$於G，由黃金矩形G′DFO′＝EQMO′，即a＋m＝b－n，移項得a－b＝m＋n，由前知a－b＝1，可推出m＋n＝1

從圖形可看出5x＜m＋n且8x＞m＋n，即5x＜1且8x＞1得⅛＜x＜1／5

上面兩種情形，可以推廣到一般費氏矩形，爲了方便比較，列出下表。由表四，可推出費氏矩形之長寬是a_{n+1}及a_n時，$1/a_{n+2}<x<1/a_{n+1}$，也就是說費氏矩形之長寬越大時，須增或減的寬度越小，即形狀越接近黃金矩形。



圖(十)

五、結論

(一)黃金矩形可以切割成一個正方形及另一個黃金矩形，並且黃金矩形可以交替切割成無數個正方形。

(二)費氏矩形可以切割成一個正方形及一個次一級的費氏矩形，並且費氏矩形可以交替切割成有限個正方形。

(三)利用費氏矩形排列的規則性，可以說明費氏數列的一些性質：

1. $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots\cdots a_{2n-1} = a_{2n}$ 。
2. $1 + a_2 + a_4 + a_6 \cdots\cdots a_{2n} = a_{2n+1}$ 。
3. $1 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots a_n = a_{n+2}$ 。
4. $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \cdots\cdots + a_n^2 = a_n \times a_{n+1}$ 。

(四)由黃金矩形可切割成正方形的特性，可發現黃金矩形長寬的比值與費氏數列後一項及前一項的比值 a_2 / a_1 、a_3 / a_2 、a_4 / a_3 ……越來越接近。

(五)黃金矩形由直切切出一個正方形，再經橫切切出第二個正方形，將橫切延長，可將原黃金矩形分割成四個部分（一個正方形與三個長方形）。則小正方形的面積等於不相鄰長方形的面積，且小正方形的面積等於相鄰兩長方形面積的差。

(六)費氏矩形依上述方法切割可分爲四個圖形，利用圖形可以証明小正方形面積等於相鄰兩長方形面積之差，而小正方形的面積比不相鄰長方形面積大 1 或小 1 。由此可說明費氏數列的兩個性質：

1. $a_n^2 = a_{n+1} \times a_n - a_n \times a_{n-1}$

2. $a_n^2 = a_{n-1} \times a_{n+1} + 1$ 或 $a_n^2 = a_{n-1} \times a_{n+1} - 1$

(七)綜合結論五、六，黃金矩形及費氏矩形可分爲四個圖形。利用此結果，將費氏矩形補上或修去一個長條成爲黃金矩形，則可看出，費氏矩形級別越大，形狀越接近黃金矩形。

六、參考資料

(一)國中數學課本第四册。

(二)大英科技百科全書第九册 94 頁費氏數列。

評　　語

(一)費氏數列與黃金矩形的研究實在是一個相當多人研究的題目而且已有太多的結果，本件作品之結果亦無不同之處，但其出發點由兩個完全一樣之正方形開始則爲其創見，就因爲出發點之不同使其對後面解出來之式子有了更簡單而且明確的解釋。

(二)學生對問題相當熟練，而且亦參考了許多以前的作法及結果。