騎士問題

國中組數學科第二名

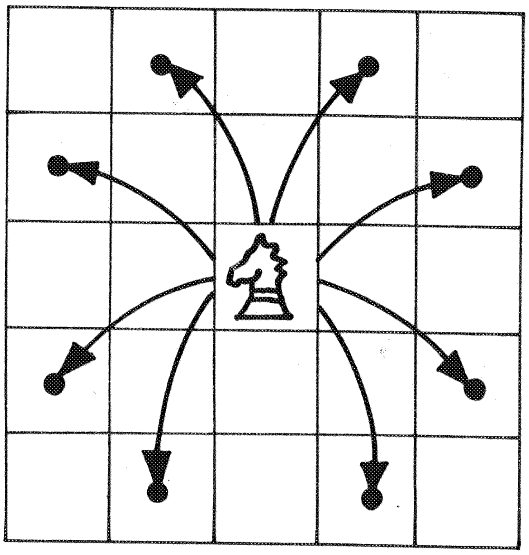
彰化縣立陽明國民中學　　作　　者：張聖德、張澍元、韓宇軒
指導教師：王淑儷、江金澤

一、研究動機

一天上數學課時，老師介紹我們玩幾種跳棋遊戲，其中最受歡迎的就是“騎士問題”（Knight Question）一時風行全班，於是大家紛紛鑽研，互相競賽，為求能贏過對方，我開始動手尋找騎士問題的各種特性，希望能夠由此找出各種階數的走法，並求出其快速解。

二、遊戲方法

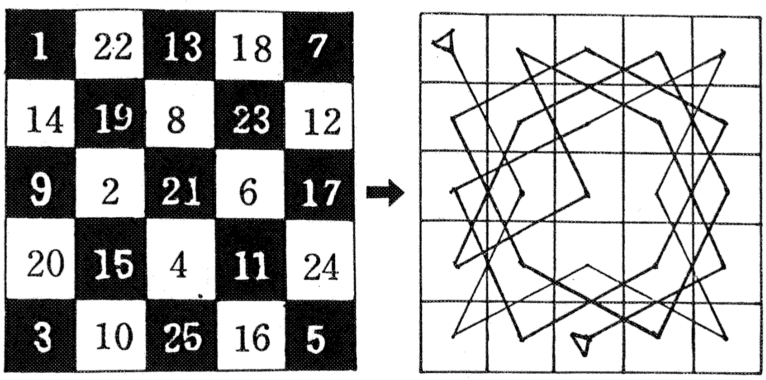
在一個 $n \times n$（$n \geqq 5$）格的正方形棋盤上，如何讓一隻西洋棋中的騎士（馬頭棋子），在騎士跳過的格子不能再跳的條件下，把棋盤中的所有格子走一遍，但騎士的跳法要符合西洋棋中的規定。即騎士在（a、b）位置，則下一步的位置必須是（$a-2$、$b-1$），（$a-1$、$b-2$），（$a+1$、$b-2$），（$a+2$、$b-1$），（$a+2$、$b+1$），（$a+1$、$b+2$），（$a-1$、$b+2$）及（$a-2$、$b+1$）中的某一格，如右圖所示。



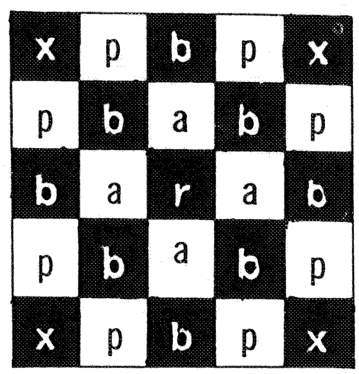
三、探討分析

㈠ 5 階（ 5 × 5 ）騎士問題的分析

1. 若將 5 × 5 的棋盤加以塗色，使黑白相間，就可以看出騎士問題的跳法，必不能由黑格跳到黑格，由白格跳到白格，亦即騎士的位置若在黑格，則下一步必在白格；反之，若現在在白格，則下一步必在黑格。
2. 由下圖，黑格共 13 格，白格共 12 格，而其跳法必須是黑→白→黑→白（或白→黑→白→黑），因此確定起跳點必是黑格，而終點亦必是黑格。
3. 因為黑格不能走到黑格，故第 25 步不能再跳回第一步，所以 5 階騎士問題所跳的路徑繪成之圖形必為不封閉圖形。如圖㈠。



圖㈠



圖㈡

4. 由上圖㈡位在四個角落的黑格（ x ），只能由白格的 a 進（ a → x ）或出（ x → a ），而不能由白格的 p 進出，最中間的 r ，則只能由白格的 p 進（ p → r ）或出（ r → p ），而不能由 a 進出，而其餘的黑格 b ，則皆可由 p 或 a 進出，故騎士問題（ 5 × 5 ）的跳法：

   黑格 x 僅能與 a 連　　　白格 a 可與 b 或 x 接

   黑格 r 僅能與 p 連　　　白格 p 可與 b 或 r 接

黑格 b 可與 p 或 a 連

5. 既然需從黑格起跳，則其走法分為：(1)由 x 起跳，(2)由 b 或 r 起跳。

(1)由 x 起跳，其路徑可分為如下：

A型：x→a→x－a－x－a－x－a－b－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b（或 r）。

B型：x－a－x－a－x－a－b－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b－a－x。

C型：x－a－x－a－b－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b－a－x－a－x。

D型：x－a－b－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b（或 r）－p－b－a－x－a－x－a－x。

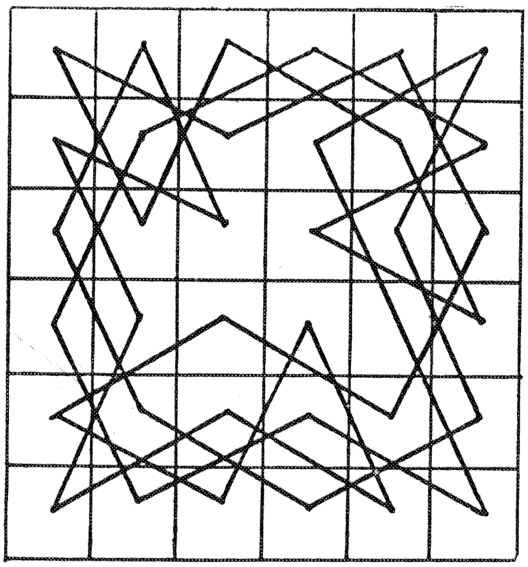
若將上面各型路線的走法，分別調過來走，（即終點改為起點，起點改為終點），則可發現 B 和 D 相同，因此由 x 起跳，其路程只須分為 A、B、C 三種。

(2)若由 b（或 r）起跳，即不是從 x 起跳，則終止點就必須為 x，因為起跳點若不是 x，而終止點也不是 x 的話，則 4 個 x 就必須為路程中的經過點，而 x 的走法只能為 a－x－a，則 4 個 a 和 4 個 x 之走法將成為一封閉圖形，無法再和另 17 點相接。故起跳點若不是 x，其終止點就必須是 x，是故若由 b（或 r）起跳，將必終止於 x，如將終點 x 改為起點，b（或 r）改為終點，即為 A 型。

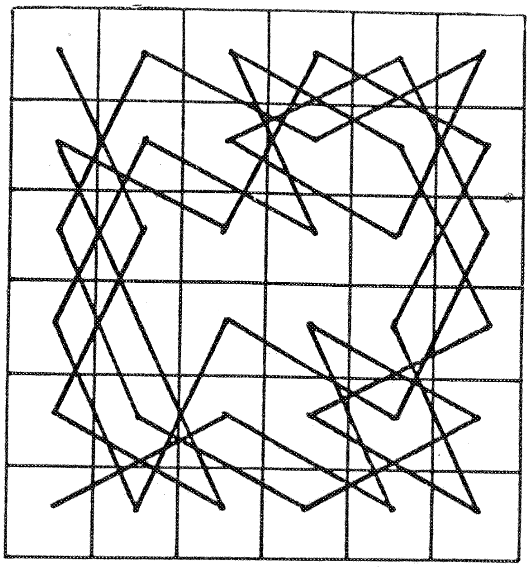
總結：5階騎士問題的所有跳法，其起點與終點至少有一點會是 x，故我們只需從 x 出發，必能找出所有解。經由同學陸續提供了約 50 種跳法，確實只有A．B．C三型，後來又有同學設計電腦程式，求出5階的所有解，共 122 種（其中A型 64 種、B型 30 種、C型 28 種，附於書後），驗證了我上面的推論。

㈡ 6階騎士問題的分析

1. 6階（6 × 6）的棋盤共有 36 格，其中黑 18 格、白 18 格。如從黑格起跳，則第 36 步必為白格，若此白格與第一步的黑格恰好在 2 × 3 的長方形的對角線端點上，則騎士便可跳為原來的出發點，而繪成封閉圖形。（如圖一）。若第 36 步與起步點不在 2 × 3 的長方形的對角線上（圖二），則無法跳回起步點而繪成封閉圖形，故6階的圖形可能是封閉的，也可能是不封閉的。



圖㈠

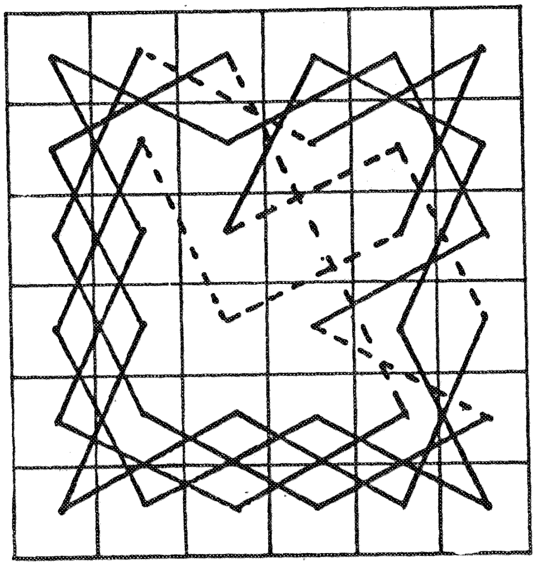


圖㈡

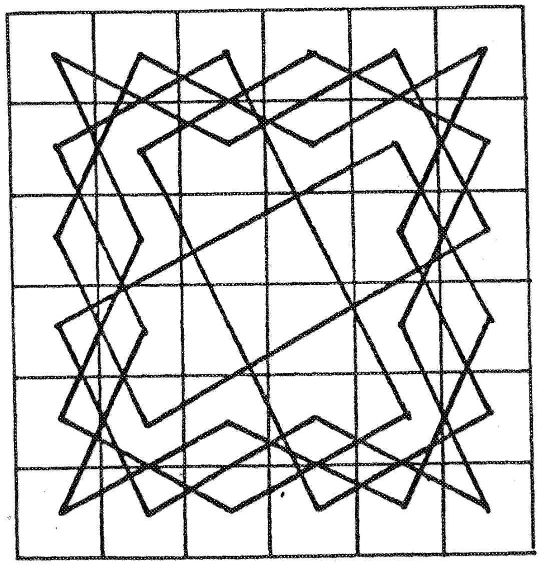
2. 若是封閉的圖形，則沒有起終點之分，任何一點的均是起點，也是終點，故可先選定由角落 x 為起步點。由同學提供不同的走法發現，封閉圖形有對稱的，也有不對稱的。圖㈢即為不對稱的圖形，其黑格虛線部分不對稱。圖㈣為對稱圖形。

3. 為求方便敘述起見，我把對稱的型式分為下列三種：

(1)以一點為中心，旋轉 180° 後能和原圖形重合，稱為點稱圖形。



圖(三)



圖(四)

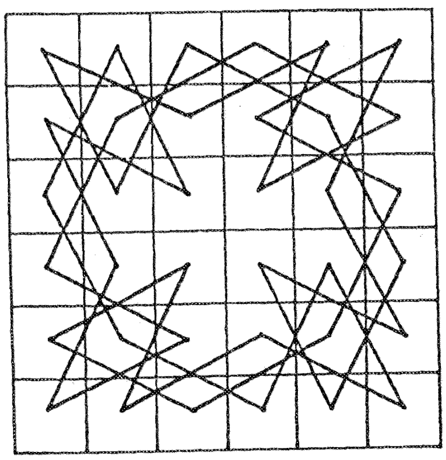
(2)以一點為中心，每旋轉 90°後皆能和原圖形重合，稱為四面對稱圖形。

(3)沿著一條直線摺疊時，直線兩側完全重合的，稱為線對稱圖形。

4. 今由同學幫助收集的 6 階圖形，我發現：

6 階封閉的圖形，(1)有四面對稱（見分析一）。
(2)有點對稱（見分析二）。
(3)沒有線對稱（見分析三）。

6 階不封閉的圖形，(1)沒有四面對稱（見分析四）。
(2)沒有點對稱（見分析五）。
(3)沒有線對稱（見分析六）。

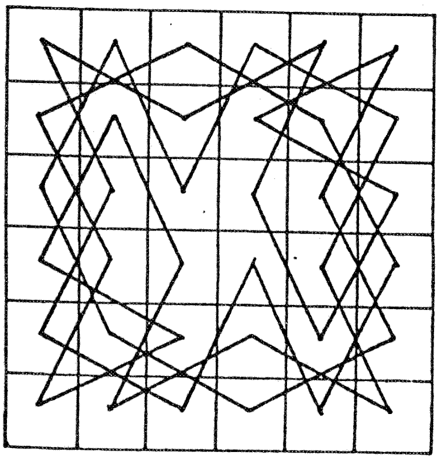


四面對稱

1	24	3	32	35	10
26	31	36	11	4	33
23	2	25	34	9	12
30	27	16	7	20	5
15	22	29	18	13	8
28	17	14	21	6	19

圖(五)

1～9 步
10～18 步
19～27 步
28～36 步
路徑一樣
故36格棋盤
每 9 步循環
一次每一對
稱點的公差
9 。



點對稱

1	24	9	22	35	30
10	15	36	31	8	21
25	2	23	34	29	32
14	11	16	5	20	7
3	26	13	18	33	28
12	17	4	27	6	19

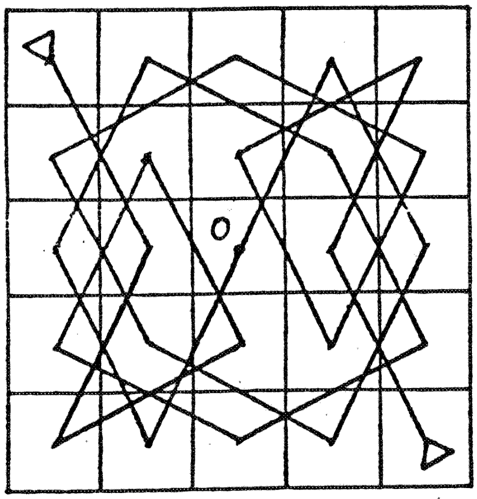
1～18步
19～36步
路徑一樣
故每18步
循環一次
每一對稱
點的差為
18。

圖(六)

因6階的解有很多，所以我只請同學幫我設計程式，由電腦求封閉、不封閉、點對稱、四面對稱的圖形，以驗證6階的各種性質。

(三)五階以上（奇數階）騎士問題的特性

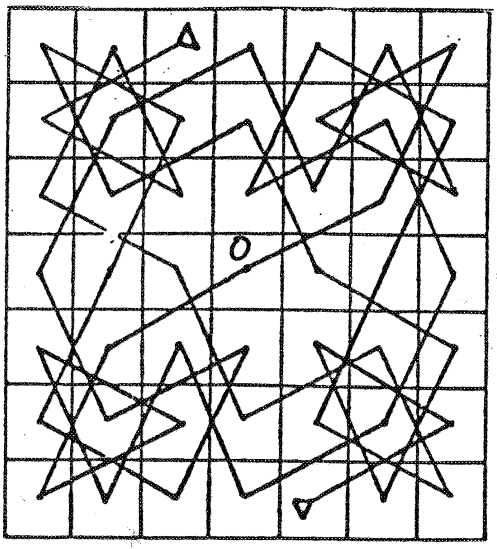
今再回頭看看5階是否有對稱的圖形，如圖(十四)即是5階的點對稱圖形，1～13，25～13是兩段全等的折線段，13為對稱中心，它與6階有所不同，每一對稱點的和為26。



1	10	19	14	23
18	5	22	9	20
11	2	13	24	15
6	17	4	21	8
3	12	7	16	25

圖(十四)

至於7階亦有點對稱圖形，如圖(十五) 1～ 25 ， 50 ～ 25 是兩段全等的折線段， 25 為對稱中心，它與5階均具有相同的特性，同樣的9階、 11 階……亦如此，所以奇數階圖形都具有下列的特性：



41	4	1	32	13	30	27
2	33	40	43	28	15	12
5	42	3	14	31	26	29
34	39	6	25	44	11	16
21	24	19	36	47	8	45
38	35	22	7	10	17	48
23	20	37	18	49	46	9

圖(十五)

1. 圖形不能封閉

若 n 為奇數，則 n^2 必為奇數，所以騎士的起點和終點將同色(第 1 步和第 n^2 步均為奇數步)，故騎士跳到終點後必無法再跳回起點形成封閉圖形。

2. 沒有四面對稱

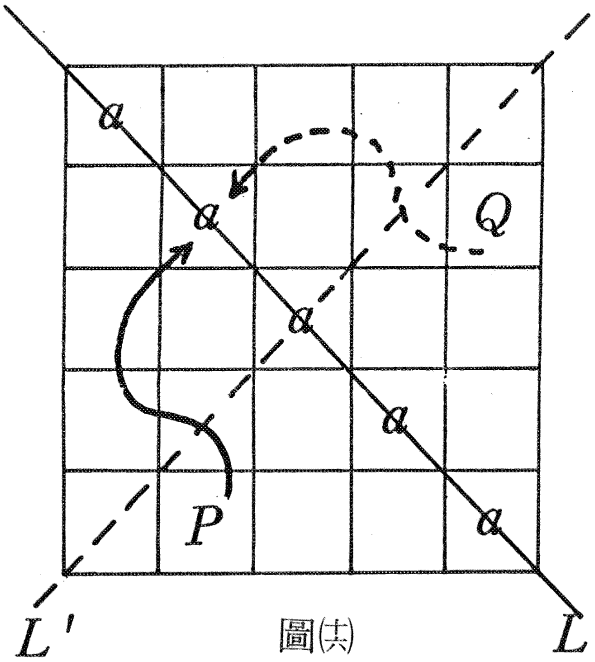
因為奇數階不能封閉，所以就像六階不封閉圖形沒有四面對稱的情形一樣(見分析四)，將形成 4 個起終點，而產生不合理的現象，故它絕不可能四面對稱。

3. 沒有線對稱

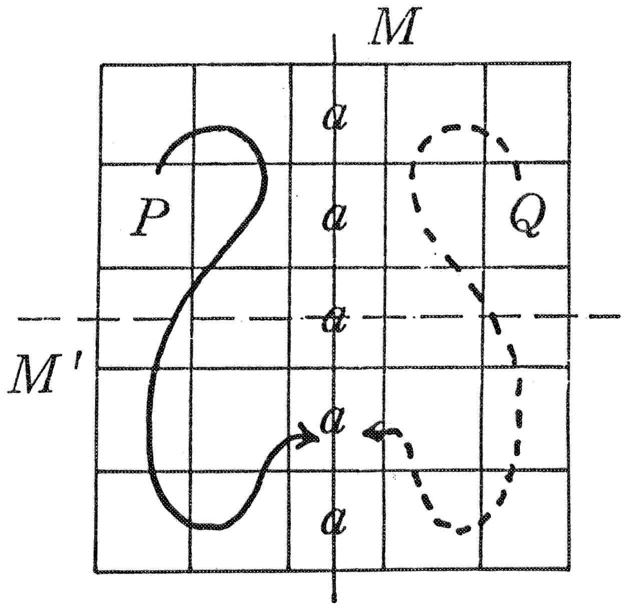
線對稱包括以對角線L或直線M為對稱軸的兩種情形，因為奇數階其對稱軸(不管是對角線L或直線M)，皆在格子上，故兩種情形，可合併成一種來說明。今舉5階為例：

如有以對角線L(或直線M)為對稱軸，由圖(十六)或圖(十七)，L(或直線M)尚有5格，若騎士以P、Q為起終點，經跳過若干點後，若「不幸」，(其實也必定會)落在任一個a上，如圖(十六)或(十七)

，則此兩全等的折線段便連接起來了，那時至少還有（ 5 － 1 ）格（ 4 個 a ）尚未走過，而沒有走完全程，故 5 階絕沒有線對稱。同理，奇數 n 階的情形亦同，將至少有（ n － 1 ）格尚未走過，所以沒有線對稱。



圖(十六)



圖(十七)

4. 有點對稱

由前頁 5 階、7 階的點對稱探討可推得奇數階均有點對稱，其對稱中心 O 點步數為 $\frac{n^2+1}{2}$，兩個全等的折線段應為 $1 \sim \frac{n^2+1}{2}$，$n^2 \sim \frac{n^2+1}{2}$，其每一對稱點的和為 n^2+1（ n 為階數），而每一組對稱點的對稱坐標為（ x ， y ），（ n＋1－x ，n＋1－y ），後來同學幫我利用電腦，亦獲得驗證。

(四) 6 階以上（偶數階）騎士問題的特性

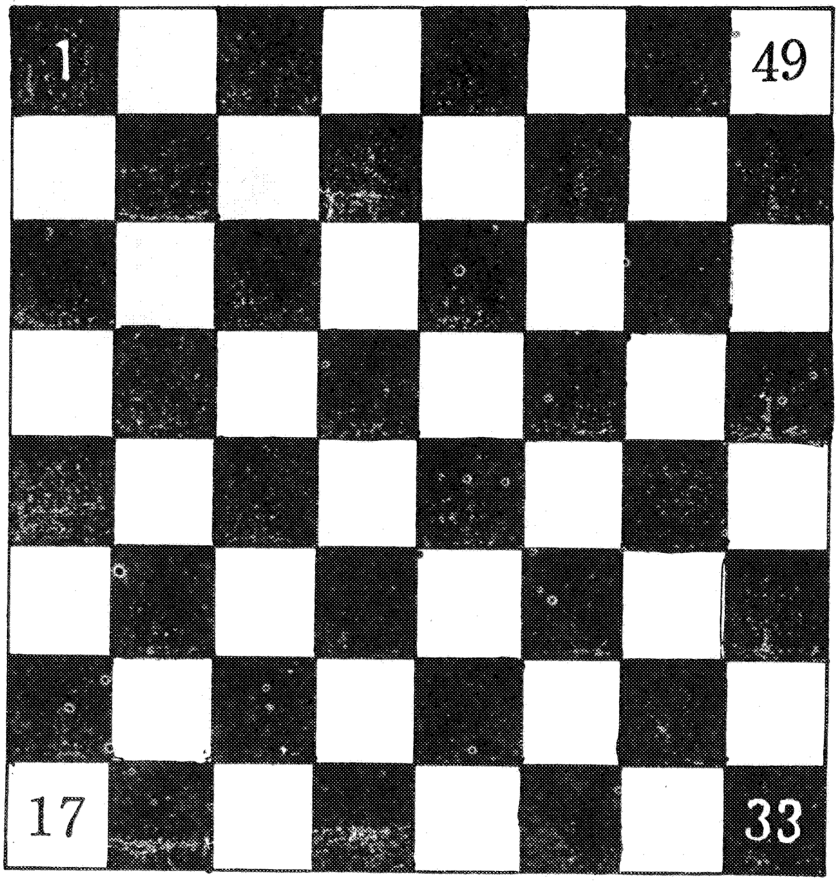
我們已討論過 6 階，現在再來看看 8 階的情形。它和 6 階的情形大致相同，只不過 6 階它有四面對稱而 8 階却沒有，原因如下：

〔1〕8 階——今設角落為第 1 步，則其它 3 個角落應為第 17 、33

、49 步（$\because \frac{8\times 8}{4}=16$，故應差 16），而我們知道騎士所走的奇數步的格子應同色，但將圖㈥畫上顏色後四個角並不同樣顏色，可見8階不可能有四面對稱。

〔2〕6 階——

6 階為何又可以有四面對稱呢？若它具有四面對稱，則 $\frac{6\times 6}{4}=9$ 告訴我們每一角落的步數差應為 9，即角落若為第一步，其餘三個角落的步數應為第 10、19、28 步，顏色應為黑、白、黑、白，與圖㈨著色後，四角並不同色的情形完全吻合，故可以有四面對稱。



圖㈥

同樣的 10 階、14 階……亦能四面對稱，而 12 階、16 階……則沒有四面對稱，因此偶數階歸納出下列各點：

1. 圖形可能封閉

因 n 為偶數，則 n^2 必亦為偶數，故起、終點的步數「1」和「n^2」一為奇數，一為偶數，亦即格子為一黑、一白，若此兩格合在 2×3 的長方形對角線之端點，則騎士可跳回起點而形成封閉曲線，否則就不能形成封閉圖形。

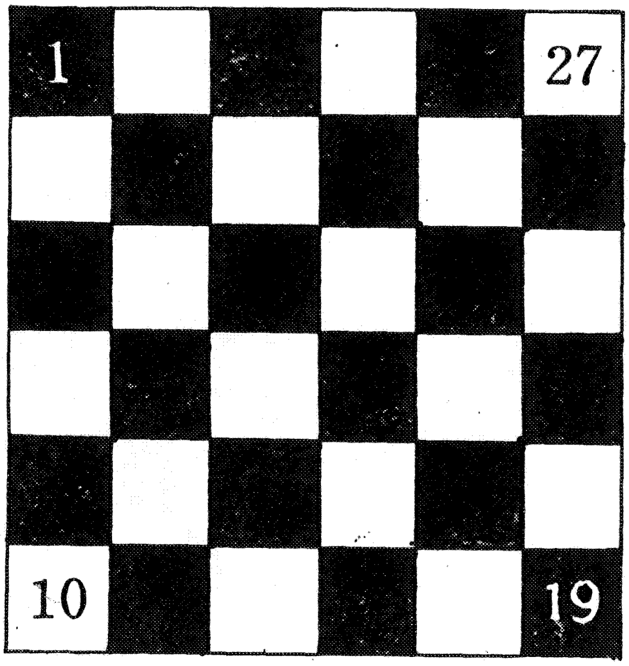
2. 圖形若不封閉，則都沒有點對稱、線對稱、四面對稱。其理由可參見 6 階不封閉圖形的討論。（見分析四、五、六）。

3. 圖形若是封閉，則可以

⑴有點對稱（可參見 6 階封閉圖形對稱形式的討論，分析二、三）。

⑵沒有線對稱。

⑶至於四面對稱：①若階數 n ＝ 4a ＋ 2 時，才可以有四面對稱。②若階數 n 為 4a 時，就沒有四面對稱。

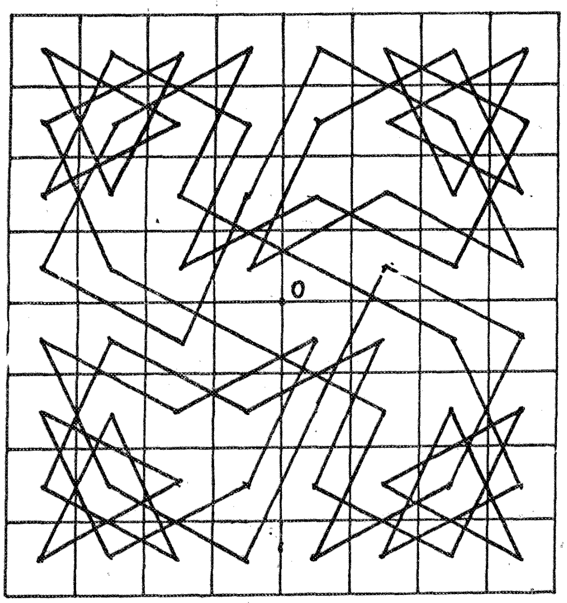


圖(九)

註：a 為正整數當它具有四面對稱時，其對稱點所表示的公差應為 $\frac{n^2}{4}$，它的對稱點坐標分別為（x，y），（y，n＋1－x），（n＋1－x，n＋1－y），（n＋1－y，x）；限於篇幅不再舉例，可參看前面圖(五)。

4. 前面「3」所提，偶數階若封閉，則有點對稱，今舉 8 階為例，分析如下：

圖(十)



1	67	3	40	45	56	51	54
4	41	64	61	50	53	46	57
63	2	39	44	59	48	55	52
42	5	60	49	38	11	58	47
15	26	43	6	17	28	37	10
20	23	16	27	12	7	34	31
25	14	21	18	29	32	9	36
22	19	24	13	8	35	30	33

性質 階數(n)	封閉	不封閉			
		不對稱	對稱		
			點對稱	線對稱	四面對稱
5	×	√	√	×	×
7	×	√	√	×	×
9	×	√	√	×	×
11	×	√	√	×	×
13	×	√	√	×	×
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$4a+1$	×	√	√	×	×
$4a+3$	×	√	√	×	×

性質 階數(n)	封閉				不封閉			
	不對稱	對稱			不對稱	對稱		
		點對稱	線對稱	四面對稱		點對稱	線對稱	四面對稱
6	√	√	×	√	√	×	×	×
8	√	√	×	×	√	×	×	×
10	√	√	×	√	√	×	×	×
12	√	√	×	×	√	×	×	×
14	√	√	×	√	√	×	×	×
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$4a$	√	√	×	×	√	×	×	×
$4a+2$	√	√	×	√	√	×	×	×

圖㈩中兩全等的對稱線段為 1 ～ 32 ， 33 ～ 64 ，它們的每一對稱點的差為 32 ，又由 6 階點對稱的探討，我們做了下面的推論：

偶數階的點對稱，其對稱中心在棋盤的正中央，即O點不在格子上，故騎士不在此處停留而直接跳過，其兩個全等的折線段應為 $1 \sim \frac{n^2}{2}$ ， $\frac{n^2}{2} \sim n^2$ ，其每一個對稱點的公差應為 $\frac{n^2}{2}$ ，而對稱點的坐標分別為（ x ， y ），（ n＋1－x ，n＋1－y ）。

現在我們把 n 階騎士問題的圖形整理如下表，即可推得奇數階和偶數階的特性：

利用以上各階的特性，我們把 $n \geq 5$ 的各階數畫分為 4a＋1 ， 4a+2，4a＋3 ，4a 等四種類型，而開始動手尋找騎士問題的快速解法。

㈣騎士問題的快速解（略）。

㈤結語（略）。

評　　語

(1)騎士問題雖應用數學理論較弱，但作者能夠在指定各種變化條件下（如棋盤中有缺口）說出解決方案，並能緊緻的思考各種可能發生的情況以分類說出是為難得。

(2)對於附件，利用以C語言設計出來的模擬騎士問題的程式，在作者每舉出解決方案時都能模擬來印證其方案的正確，更是突出。