變　動

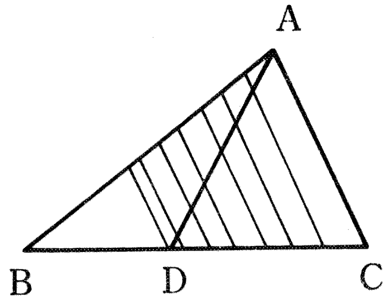
國中組數學科第一名

北縣漳和國民中學

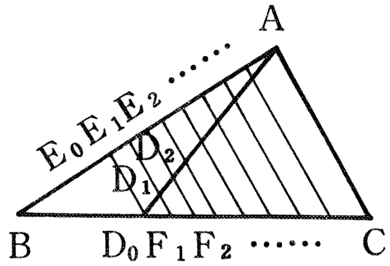
作　　者：謝享季、楊文浪
廖柏強、林志達

指導教師：戴青田、張美雲

一、研究動機



有一次在課堂上，老師在黑板上畫了一個△ABC，及D在$\overline{BC}$上，然後如右圖畫了許多與$\overline{AC}$平的直線，要我們觀察這些平行線移向$\overline{AC}$時，夾在$\overline{AB}$、$\overline{AD}$、$\overline{CD}$間的這些線段長的變化，並提出自己的看法？



我將D改為D_0，在這些平行線與$\overline{AB}$、$\overline{AD_0}$、$\overline{CD_0}$的所有交點標上符號D_0、D_1、D_2……，E_0、E_1、E_2……，F_0、F_1、F_2……我發現：當平行線移向$\overline{AC}$時，第一組線段$\overline{E_0D_0}>\overline{E_1D_1}>\overline{E_2D_2}>\overline{E_3D_3}>$……$>O$當$E_n$移到A時$\overline{D_nE_n}=\overline{AA}=O$，第二組線段$O=\overline{D_0F_0}<\overline{D_1F_1}<\overline{D_2F_2}<\overline{D_3F_3}<$……$<\overline{AC}$，當$D_n$移到A時$E_n$移到C這兩組量的變化特性①有規則　②一組由大變小，另一組由小變大。

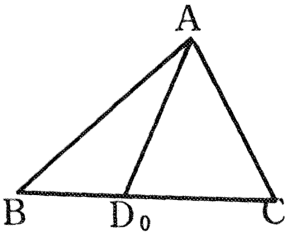
我將觀察的結果向老師報告，老師很高興，除口頭讚許外，又把我平時成績加了2分，並且對我說：「有空，可以想想兩量之間的關係！」而學校的科展又快到了，於是我就以這題目開始，展開了一連串的研究！

二、研究過程

研究 1　比例的控制

(1) Problem 1　[已知] D_0 在 $\overline{BC}$ 上

[求作] $\overline{AD_0}$上一點D，使過D作 $\overline{BC}$ 之垂線分別交 $\overline{AB}$ 於E，交 $\overline{CD_0}$於F則 $3\,\overline{ED}=2\,\overline{FD}$

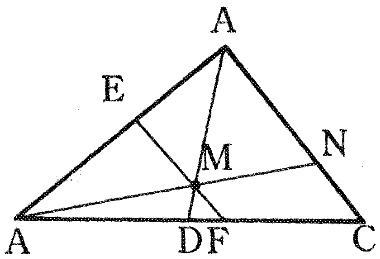


1.觀察：(1)作 $\overline{EF}$ 取M使 $\overline{EM}=2\,\overline{MF}$

$\overline{AC} /\!/ \overline{EF}$

(2)作直線 $\overline{BM}$ 交 $\overline{AC}$ 於N，

$\overline{AN}$ 似乎也等於 2 $\overline{CN}$



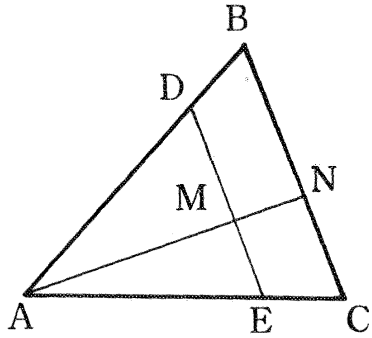
2.假設：若 $\overline{EF} /\!/ \overline{AC}$ 則 $\overline{EM}:\overline{MF}$

$=\overline{AN}:\overline{NC}$

3.引理 1 — 1 [已知] $\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$

[求證] $\overline{DM}:\overline{EM}$

$=\overline{BN}:\overline{CN}$

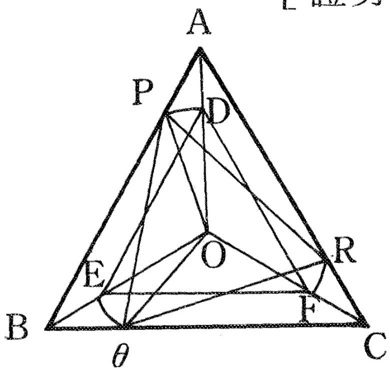


[證明] 1.在△ABN 中

∵ $\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$

∴ $\overline{DM}:\overline{BN}$

$=\overline{AM}:\overline{AN}$



2.同理在△ACN 中，$\overline{EM}:\overline{CN}=\overline{AM}:\overline{AN}$ ∴ $\overline{DM}:\overline{BN}=\overline{EM}:\overline{CN}$ ∴ $\overline{DM}:\overline{EM}=\overline{BN}:\overline{CN}$

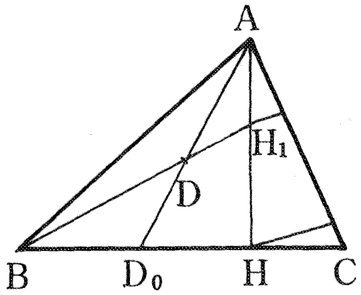
註：我把引理 1 定為“放射線直線型定理”

4.解 Problem

(1)作 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$ 於H

(2)在 $\overline{AH}$ 上取H使 $\overline{AH_1}:\overline{H_1H}=2:3$

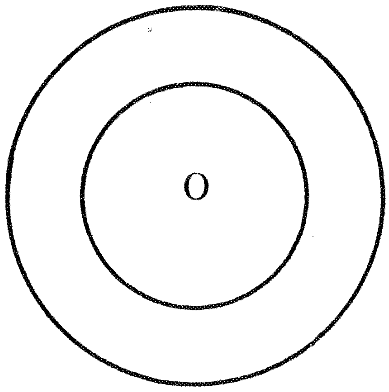
(3)連 $\overline{BH_1}$ 交 $\overline{AD_0}$ 於D則D點為所求



研究 2　相似

(1) Problem 2　[已知] 兩同心圓O，半徑分別為r_1、r_2

[求作] 在兩圓上各取兩點連成一正方形

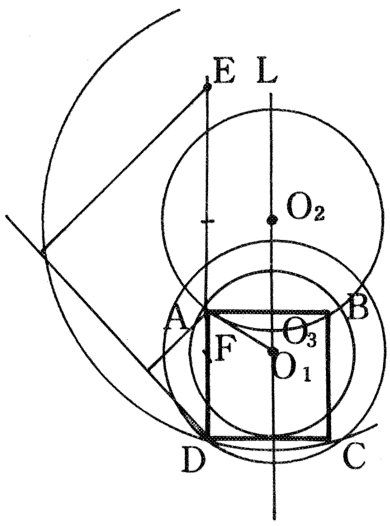


1.觀察：(1)如圖(一)任作正方形ABCD

(2)設A、B在同一圓上，且C、D在一圓上且兩圓同心，所以圓心在$\overline{AB}$中垂線上

(3)作$\overline{AB}$中垂線L

(4)在L上任取O_1、O_2分別以O_1、O_2為圓心作兩組滿足條件的同心圓半徑比不同。



圖(一)

2.思考：(1)欲在L上找一點O使$\overline{OA}$：$\overline{OD}=r_1：r_2$

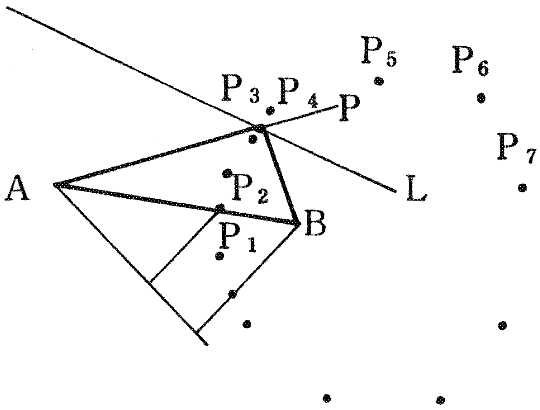
(2)輔助題 [已知] $\overline{AB}$及直線L

[求作] L上一點P使$\overline{PA}：\overline{PB}=2：1$

觀察：(1)作滿足條件之P_1、P_2、P_3、P_4、P_5……，似乎P_n繞著一個圓轉。

(2)此證明超過了國中範圍，於是我去請教老師，老師證明此結果是對的。

(3)所以，P即為P_n所繞出圓與直線L的交點。

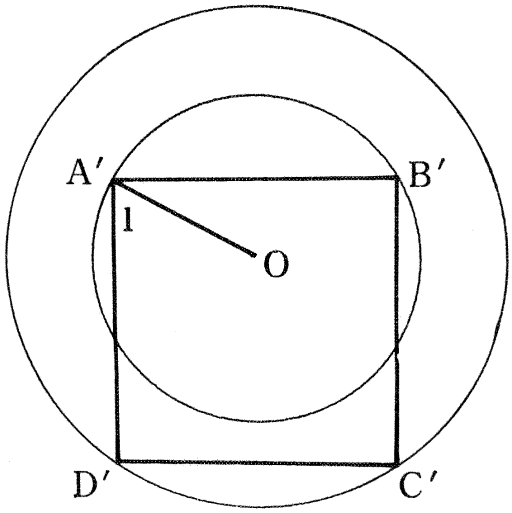


(4)以上法求出圖(二) L 上一點 O_3 使 $\overline{O_3A}:\overline{O_3B}=r_1:r_2$

3.解 Problem 3 (1)任作小圓半徑 OA'

(2)作 $\angle 1=\angle O_3AD$ 使 $\angle 1$ 另一邊交大圓於 D'

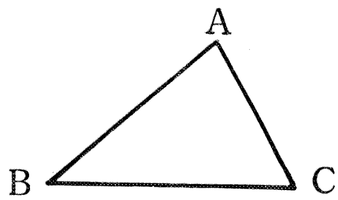
(3)以 $\overline{A'D'}$ 為一邊作正方形 $A'B'C'D'$ 為所求



研究 3　旋轉(一)

(1) Problem 3 [已知] △ABC

[求作] 三邊上各一點 P、Q、R 使 △PQR 為正△



在觀察 3 中，若決定半徑為 r 則圓弧與 AB、BC 的交點同時確定，設為 D、E 則 $\overline{OD}$、$\overline{OE}$ 也同時確定，即 $\angle DOE$ 已經確定，所以我們無法以半徑的大小，來事先控制等腰△的頂角，故此法失敗。

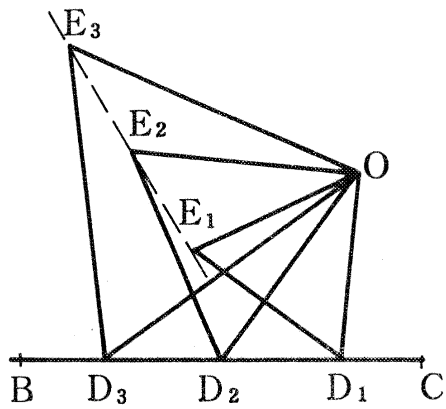
1.觀察：(1)在 $\overline{BC}$ 上任取 D_1、D_2、D_3、D_4、……作正△ OD_1E_1、△OD_2E_2、△OE_3D_3

(2)發現當 D_1、D_2、D_3、D_4 在同一直線上時，E_1、E_2、E_3、E_4 好像也沿著一直線移動。

2.假設：由上面的觀察，我大膽的作了下面的假設

引理 3—1 [已知] △OD_1E_1、△OD_2E_2、△OD_3E_3 均為正△且 D_1、D_2、D_3 在直線 BC 上

[求證] E_1、E_2、

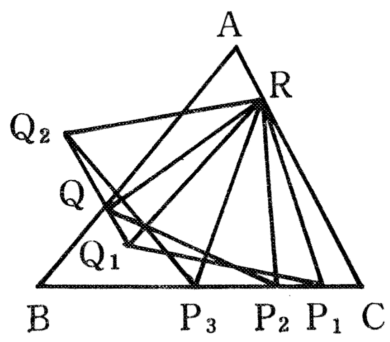


E_3 在同一直
線上。
引理 3－2［已知］△OD_1E_1、
△OD_2E_2 均
爲正△，D_1
、D_2、D_3
共線，E_1、E_2
、E_3 共線且
$\angle D_2OD_3$ ＝
$\angle E_2OE_3$
［求證］△OE_2E_3 爲正△

3. 思考：(1)由引理 3－1 說明當D_1、D_2、D_3……在BC 上移動時，E_1、E_2、E_3……也沿著一直線＜設爲直線M＞移動，由△內部向△外部、若D_n 爲連續移動，則E_n 亦是，所以可以在BC 找到一D_k，使得E_k 恰爲直線M與AB 之交點。

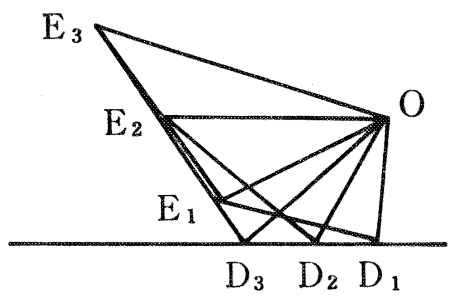
(2)由引理 2 我們可以找到這個位置。

4. 解 Problem3 (1)在 BC 上取P_1、P_2 分別以RP_1、RP_2 爲一邊作正△RP_1Q_1、正△RP_2Q_2 使Q_1 在△ABC 內Q_2 在△ABC 外



(2)連Q_1Q_2 交AB 於Q
(3)以 QR 爲一邊作正△PQR 爲所求

Problem 3的延伸



引理 3－3［已知］D_1、D_2、D_3
均在直線上且
△OD_1E_1 ～△

$OD_2E_2 \sim \triangle OD_3E_3$

［求證］E_1、E_2、E_3 在同一直線上

引理 3－4［已知］D_1、D_2、D_3 共線，E_1、E_2、E_3 共線 $\triangle OD_1E_1 \sim \triangle OD_2E_2$ 且 $\angle D_2OD_3 = \angle E_2OE_3$

［求證］$\triangle OD_3E_3 \sim \triangle OD_2D_3 \sim \triangle OD_1E_1$

研究 4　旋轉(二)

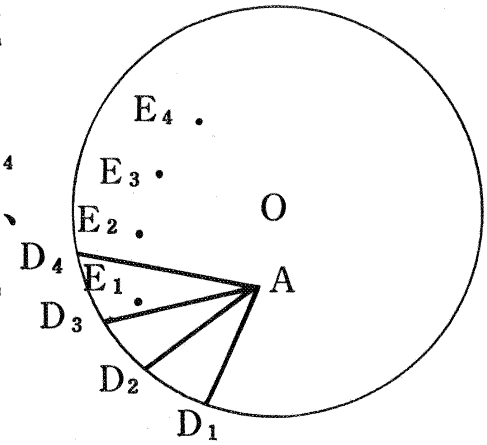
(1) Problem 4［已知］三同心圓

［求作］三圓上各一點 A、B、C 使 $\triangle ABC$ 為正 $\triangle$。

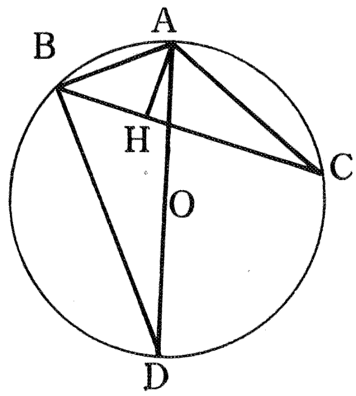
同 Problem3，觀察 3 的想法無法找到所要求的圖形

1. 觀察：(1)我嘗試用 Problem 3 之觀察方法作了右圖

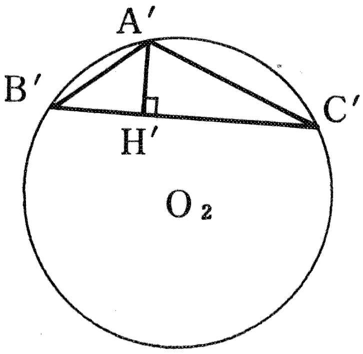
(2)發現當 D_1、D_2、D_3、D_4 ……在圓 O 上移動，則 E_1、E_2、E_3、E_4 ……好像也在一圓移動



2. 假設：由於此問題的假設與證明過於繁雜，所以研究過程所遇的困難分成四段落來處理，詳述如下：



引理 4－1［已知］圓 O_1、圓 O_2 分別為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 之外接圓，且半徑分別為 r_1、r_2，且 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$



［求證］$r_1 = r_2$

引理 4－2［已知］平面上相異四點

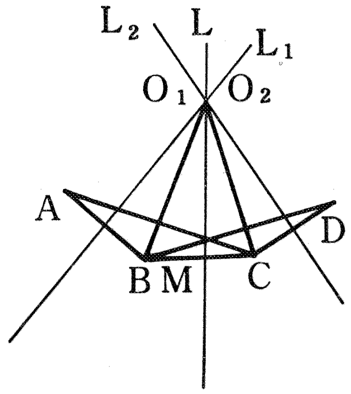
A、B、C、D任三點不共線且△ABC

與△BCD 外接

圓半徑相等。

［求作］A、B、C、D

四點在同一圓上



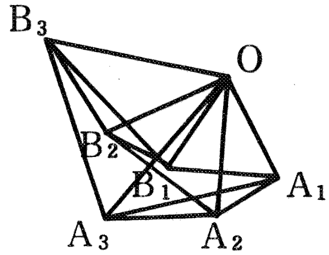
引理 4—3［已知］$\triangle OA_1B_1$、△

OA_2B_2、△

OA_3B_3 均為正△

［求證］$\triangle A_1A_2A_3 \cong$

$\triangle B_1B_2B_3$



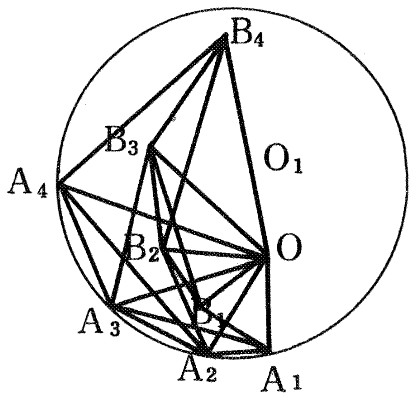
定理 4—4［已知］$\triangle OA_1B_1$、$\triangle OA_2B_2$

、$\triangle OA_3B_3$、△

OA_4B_4 均為正△，

且 A_1、A_2、A_3、

A_4 均在同一圓 O_1上



3.解 Problem 4　(1)在小圓上任取A點

(2)在大圓上任取 B_1、B_2

(3)以 $\overline{AB_1}$、$\overline{AB_2}$ 為一邊

各作正$\triangle AB_1C_1$，

正$\triangle AB_2C_2$

(4)作 C_1、C_2 所在圓 O_2

交中圓於

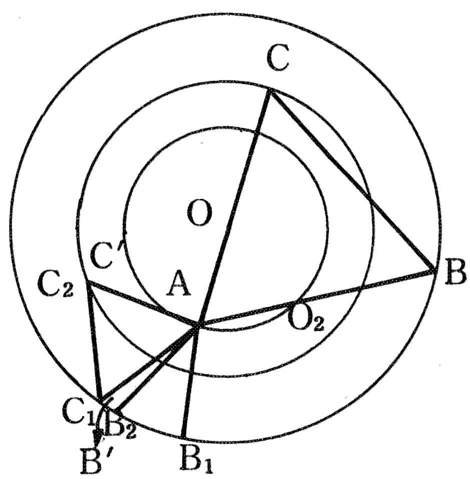
(5)作正△ABC為所求

※事實上另

有一解

$\triangle AB'C'$

如右圖



4.思考 Problem 3、4之第一動

點均為任取所以 Problem 3 與

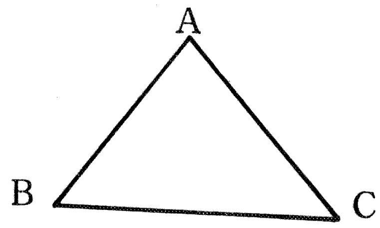
4 均有無限多組解。

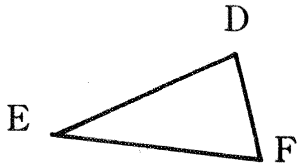
5. Problem 延伸定理：

定理 4 — 5 將定理 4 — 4 的“四個正△”改為“四個相似形”其結果亦成立。

註：因其證明太過繁雜，在此省略。

研究 5 比例與幾何解析

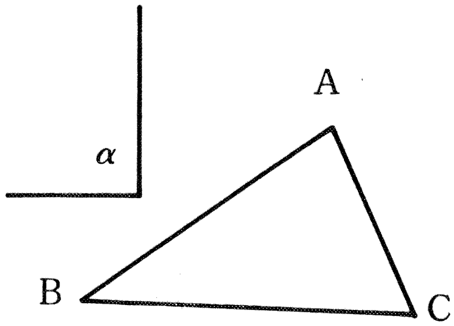




1. Problem 5 [已知] 兩△ABC 與△DEF

[求作] 一三角形△DEF 相似且面積等於△ABC

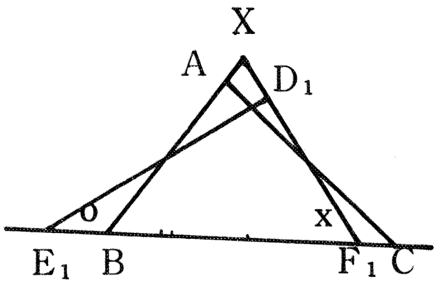
因所求必須滿足①與△DEF 相似 ②面積等於△ABC 兩大條件，故相當困難。



1. 將問題簡化如下題：

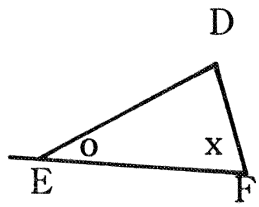
輔助題 [已知] ∠2，及△ABC

[求作] 一直線交 $\overline{AB}$ 於 X，$\overline{BC}$ 於 Y 使∠XYB ＝∠2 且△BXY ＝△ABC



2. 解 Problem 5 (1)利用輔助題法在直線 AB 上取一點 X，BC 上取 F_1 使∠BF_1X ＝∠F——①

且△BXF_1 ＝△ABC ——a



(2)同理，做直線交 $\overline{BC}$ 於 E，$\overline{F_1X}$ 於 D_1 使∠DE_1F_1 ＝∠E——②，且△DE_1F_1 ＝△BF_1X——b

(3)由①、②$\triangle D_1E_1F_1 \sim \triangle DEF$(AA)

由 a 、 b $\triangle D_1E_1F_1 = \triangle BXF_1 = \triangle ABC$

$\therefore \triangle D_1E_1F_1$ 爲所求

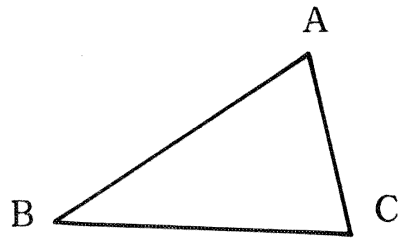
研究 6　面積變動

由於面積的控制非旋轉及相似所能控制，在此僅以我發現的作法提出，致於 Problem 6 的想法及證明內容後再詳述。

在研究另一主題交軌法時，也證出了下題：

[已知]△ABC

[求作]△ABC 之內接△使其與原△ABC 相似且等於 4／9 △ABC

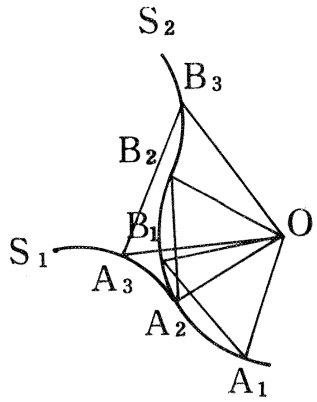


三、歸　　納

我們從觀察圖形變動爲出發點，找出了一種變動規則，構成了“存在性定理”，用此定理說明了 6 個多動點問題的存在，由於尺規作圖無法解決此問題，於是由研究 1～6 的過程中，我們再次以觀察出擊，理出了幾個法則①比例、④幾何解析兩個法則。

四、研究推論

推論 1. A_1、A_2、A_3……在曲線 S_1 上移動且 $\triangle OA_1B_1$、$\triangle OA_2B_2$、$\triangle OA_3B_3$、及 $\triangle OA_4B_4$ ……均爲正△若 A_n 以連續型式在 S_1 上移動則 B_1、B_2、B_n ……所移動路線 S_2 會滿足 $S_2 \cong S_2$ 且 V_A、V_B 均爲相等速，且 $V_A : V_B$ 成定關係。



五、結論

1. 觀察、思考、假設、證明；歸納的科學研究方法可以幫助我們獲得知識。
2. 參看“三歸納”

3. 由研究過程中，我又引出了質點移動對圖形固定或改變的影響，相似圖形經旋轉的路徑問題，及移動速率比對圖形的影響等問題，目前均已解決，且可由此看出知識的發現，起於觀察，知識的累積要靠研究後才能創造更多的知識。

評　語

(1)作者從幾何圖形之各種邊長連續變化下，觀察出其間比值的連續數存在問題，對國中生是難得的數學態度。

(2)作品中利用連續數的存在解決了一系列的數學問題，思考嚴緊而細緻。