

場力的現形

高中組應用科學科第一名

台北市立建國高級中學

作者：金 政

指導教師：李 偉

一、研究動機

高一時，某次交理化作業——繪製電力線與磁力線圖。因而對此種不可見之力線的產生好奇，由於徒手繪製難以準確，乃構思如何得藉電腦之協助，具體而準確地描繪之，並將之落實於自然現象之解釋。

二、研究目的

- (一)場中內蘊物理性質之推導及闡釋。
- (二)將理論方程式藉電腦完成實際之模擬。
- (三)應用與推廣，並驗證理論敘述之真確。

三、基本定義

(一)電力：

1.庫侖靜電定律：
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

2.電場：
$$E = F / q_1 = -\nabla V$$

3.電位：
$$V = W / q_1$$

4.高斯定律：
$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \sigma dv = q / \epsilon_0$$

(二)磁力：

1.庫侖磁力定律：
$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

2.磁場：
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^2}$$

(三)重力：

$$1. \text{萬有引力定律：} F = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$2. \text{重 力 場：} g = G \frac{M}{r^2}$$

$$3. \text{重 力 位 能：} U = -G \frac{Mm}{r}$$

四、研究過程及討論

(一)電力：

1. 電荷之電場：

$\therefore \vec{E}$ 具加成性，且方向與 \vec{r} 相同。

$$\begin{aligned} \therefore \vec{E} = \vec{F} / q_1 &= \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i r_i^{-3} \vec{r}_i \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\sum_i q_i (x-x_i) r_i^{-3} \hat{i} + q_i (Y-Y_i) Y_i^{-3} \hat{j} \right] \end{aligned}$$

$$\text{其中 } r_i = \left[(X-X_i)^2 + (Y-Y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

三度空間者如是

2. 電線之電場（電極板之電場）

座標平面上設一垂直 X 軸，帶均勻電量密度 σ 之無寬度電極板（此平面上形如一線），位於 $(S, Y_1) \sim (S, Y_2)$ ，則：

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int_{Y_1}^{Y_2} \vec{E}_u \, du = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{Y_1}^{Y_2} \left[(X-S)^2 + (Y-u)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \vec{r} \, du \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{u-Y}{X-S} \left[(X-S)^2 + (Y-u)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \hat{i} + \left[(X-S)^2 + (Y-u)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \hat{j} \right\}_{u=Y_1}^{Y_2} \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{u-Y}{(X-S)r} \hat{i} + r^{-1} \hat{j} \right\}_{u=Y_1}^{Y_2} \quad (r \text{ 即表距離}) \end{aligned}$$

當該電線無限長：

$$\vec{E} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{u-Y}{(X-S)r} \hat{i} + r^{-1} \hat{j} \right\}_{u=-n}^n = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0(X-S)} \hat{i}$$

以高斯定律導之：

$$\frac{\sigma l}{\epsilon_0} = \Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}$$

3. 其他形狀之荷電物電場

同上法可導出：

$$(1) \text{無限大荷電平面：} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{r}$$

$$(2) \text{荷電均勻之球：} \vec{E} = \frac{\sigma R}{3\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad (r \geq R)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{3\epsilon_0} \vec{r} \quad (r < R)$$

$$(3) \text{荷電均勻無限長圓柱：} \vec{E} = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 r^2} \vec{r} \quad (r \geq R)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{r} \quad (r < R)$$

$$(4) \text{荷電均勻無限大平板：} \vec{E} = \frac{\sigma H}{2\epsilon_0 r} \vec{r} \quad (r \geq \frac{1}{2}H)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{r} \quad (r < \frac{1}{2}H)$$

4. 電位：

$$V = W/q_0 = - \int_{\infty}^r F dr / q_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$\therefore F$ 具加成性， V 亦具加成性。

$$V = \sum_i V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i r_i^{-1}$$

(二) 模擬：

1. 電力線：

(1) 公式法：

$$\begin{aligned} \text{① 單電荷：} \quad dy / dx &= (Y - Y_1) / (X - X_1) \Rightarrow \ln|Y - Y_1| \\ &= \ln|X - X_1| + C \Rightarrow Y = C(X - X_1) + Y_1 \end{aligned}$$

②雙電荷：設該二電荷分別位於 $(-a, 0), (a, 0)$

$$dy/dx = Ey/Ex \Rightarrow (q_1 y r_1^{-3} + q_2 y r_2^{-3}) dx = (q_1 (x+a) r_1^{-3} + q_2 (x-a) r_2^{-3}) dy$$

解微分方程得：

$$q_1 (x+a) [(x+a)^2 + y^2]^{-\frac{1}{2}} + q_2 (x-a) [(x-a)^2 + y^2]^{-\frac{1}{2}} = C \Rightarrow q_1 (x+a) r_1^{-1} + q_2 (x-a) r_2^{-1} = C$$

③同線上多電荷：設第 i 電荷位 (X_i, S) ，同上解出

$$\sum_i q_i (x-x_i) [(x-x_i)^2 + (Y-S)^2]^{-\frac{1}{2}} = C$$

(2)逐點描繪法：

$$\text{由 } \vec{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} [q_i (X-X_i) r_i^{-3} \hat{i} + q_i (Y-Y_i) Y_i^{-3} \hat{j}]$$

，就 (X, Y) 由 $\Delta Y / \Delta X = Ey / Ex$ 取適當之 $\Delta X, \Delta Y$ ，則 $(X + \Delta X, Y + \Delta Y)$ 近似在該支電力線上，惟會累積誤差。

2.等位面：

(1)公式法：

$$\text{①單電荷：} V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} r^{-1} \Rightarrow r = (q/4\pi\epsilon_0 V)^2 = \text{constant}$$

②雙電荷：可解出八次，近50項之多項式方程式，無利用價值，但因 $r_2 = q_2 r_1 (4\pi\epsilon_0 r_1 - q_1)^{-1}$ ，知 r_1, V 便可求出該點。

(2)逐點偏轉電場描繪法：如逐點描繪法，但 $E = -\nabla V$ ，故將 ΔE 旋轉 $\frac{\pi}{2}$ ，代入模擬即可。

3.場中運動：

(1)單一物體：如運動學中討論無異，略。

(2)雙物體：如行星恆星間運動軌跡：

$$r^{-1} = GMm\mu L^{-2} \{1 - [1 + 2EL^2 G^{-2} M^{-2} m^{-2} \mu^{-1} \frac{1}{2} \cos\theta]\}$$

$$L = \vec{r} \times \mu \vec{v}, E = \frac{1}{2} \mu v^2 - GMmr^{-1}$$

代入模擬即可（摘自李怡嚴著大學物理學）。

(3)多物體：設第 i 個 m_i 位 $\vec{X}_i(t)$ 、速度 $\vec{V}_i(t)$ ，加速度 $\vec{a}_i(t)$

，受力 $\vec{F}_i(t)$ ，則 Δt 時之後：

$$\vec{x}_i(t+\Delta t) = \vec{x}_i(t) + \vec{v}_i(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}_i(t)(\Delta t)^2$$

$$\vec{v}_i(t+\Delta t) = \vec{v}_i(t) + \vec{a}_i(t)\Delta t$$

$$\vec{F}_i(t) = G \sum_{j (i \neq j)} M_j r_{ji}^{-3}(t) \vec{r}_j(t)$$

$$\vec{r}_{ji}(t) = \vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)$$

Δt 愈小，精密度愈高。

4. 其他：

(1) 均勻場偏轉：

若該定向定量 \vec{E}_s 干擾某 \vec{E} ，則總電場，直接表為 $\vec{E} + \vec{E}_s$

(2) 等位丘：

將平面等位面加以代表電位之 Z 軸即成等位丘（亦可用電力線）。

(3) 空間扭曲：

此依傳統“畫格子方式”繪出重力源附近空間之扭曲狀況。

(4) 極性分子之電場。

(5) α 粒子散射實驗及 α 、 β 、 γ 射線電場中之偏轉。

(6) 天體運動：如雙星互繞、太陽系的運轉。

(三) 推廣應用：

1. 驗證理論及敘述之真確。

(1) 電場及電位：由 $E = -\nabla V$ 知電力線 \perp 等位面，但由模擬：

① 繪製電力線等位面同一螢幕。

② 利用逐點偏轉電場描繪法中計算電位。

③ 利用逐點偏轉電位描繪法中計算電場。

均可證實此一敘述。

(2) 角動量守恆及動量守恆：

① 由場中運動各點資料計算此物之角動量。

② 場中運動中若 $\sum_i \vec{p}_i = 0$ ，則模擬時整個系統並不移動。

(3) 物體或荷電物內外電場或重力場之差異：外部所受場力可視該物特性集於一無厚度形式之物體上，如球可視為一點，圓柱可

視爲一線，平板可視爲一平面。

五、結 論

- (一)少數法則決定許多現象的過程，故理論落於實際往往事半功倍。
- (二)電腦——一兼具迅速、正確，高度發展性工具，可將抽象難以想像之圖形呈現眼前，得深入了解理論之內容。

六、發 展

- (一)運動中的場力：
 - 1.電場以光速移動，故荷電物以 $\approx C$ 速度移動，電力線、等位面均會變化。
- (二)電磁感應之模擬。
- (三)電腦模擬之推廣。
- (四)場中運動軌跡探討。
- (五)以近代物理實驗進而以近代物理理論修正模擬。
- (六)電荷密度的影響：諸如感應而帶電之中性物質，電極板密度不均等。

七、參考資料

- (一)Fundamentals of Physics, by Halliday & Renick, Extend third edition, 1988.
- (二)高中物理第三冊，國立編譯館，77年8月。
- (三)電磁場，蘇賢錫著，國立台灣師範大學科學教育中心，77年2月。
- (四)電磁學，周達如著，國立編譯館，71年3月。
- (五)大學物理學，李怡嚴著，東華書局，73年1月。

附 錄

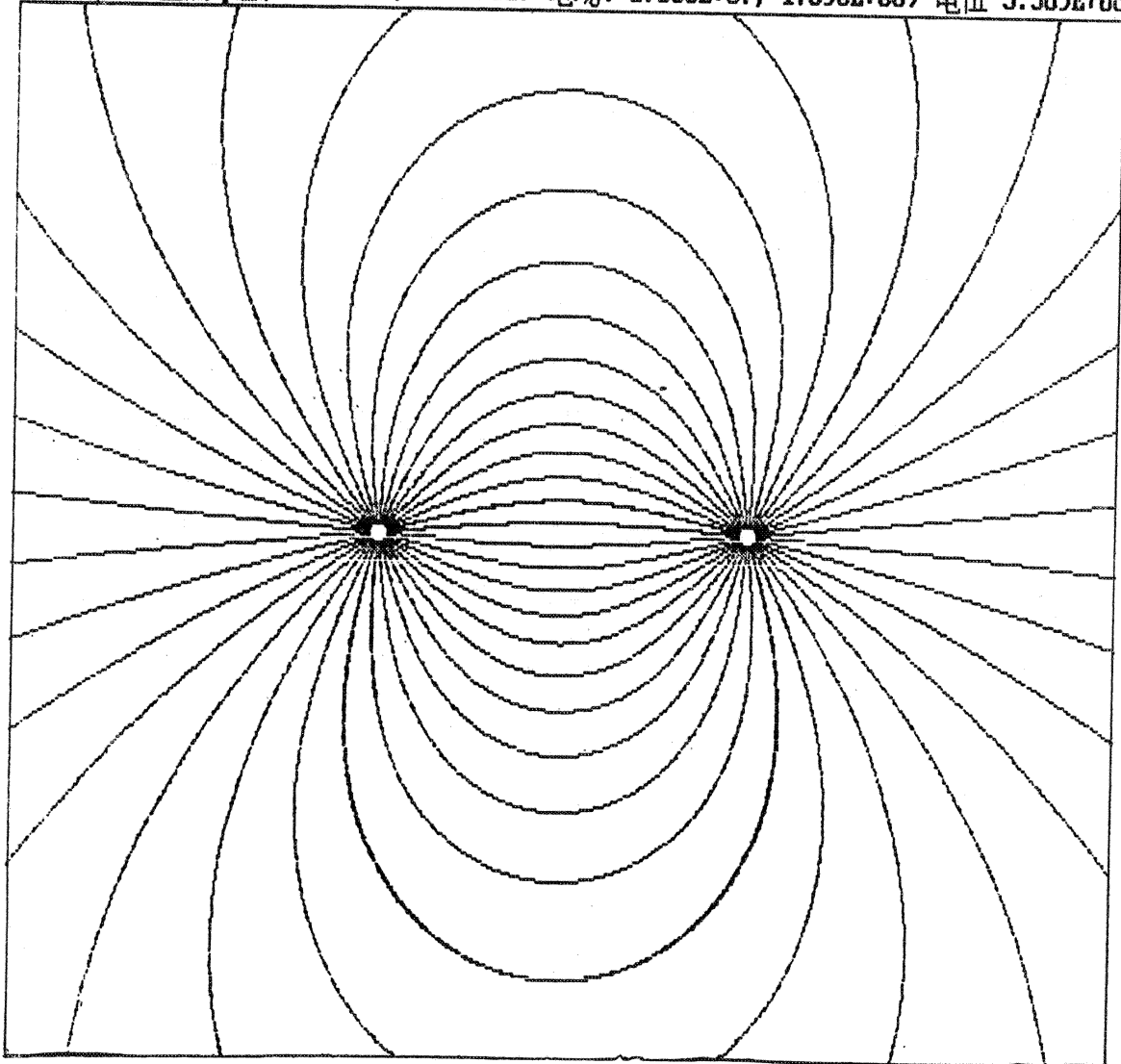
(一)程式製作過程 (BASIC 語言) :

.	<DIR>	1-08-89	2:44a
..	<DIR>	1-08-89	2:44a
ELECTRIC BAS	2064	4-30-88	10:37p

ELEC	BAS	1087	10-02-88	4:32p
A	BAS	1916	10-10-88	6:20p
ELEC2	BAS	1303	10-22-88	4:23p
A2	BAS	2014	10-22-88	8:59p
A3	BAS	2134	10-24-88	11:13p
B1	BAS	3506	10-29-88	12:25p
B2	BAS	5382	11-02-88	3:09a
ROUND	BAS	133	11-05-88	3:30p
C1	BAS	6937	11-08-88	11:18p
D1	BAS	6746	11-09-88	10:33p
E1	BAS	6734	11-12-88	8:35p
E2	BAS	6769	11-23-88	2:42a
E3	BAS	6744	12-14-88	7:45p
E4	BAS	7493	12-22-88	1:13a
F1	BAS	8290	1-03-89	5:54p
F2	BAS	7913	1-08-89	2:30a
F5	BAS	6485	2-24-89	7:51p
F3	BAS	6835	2-05-89	5:00p
F4	BAS	7418	2-12-89	8:52p

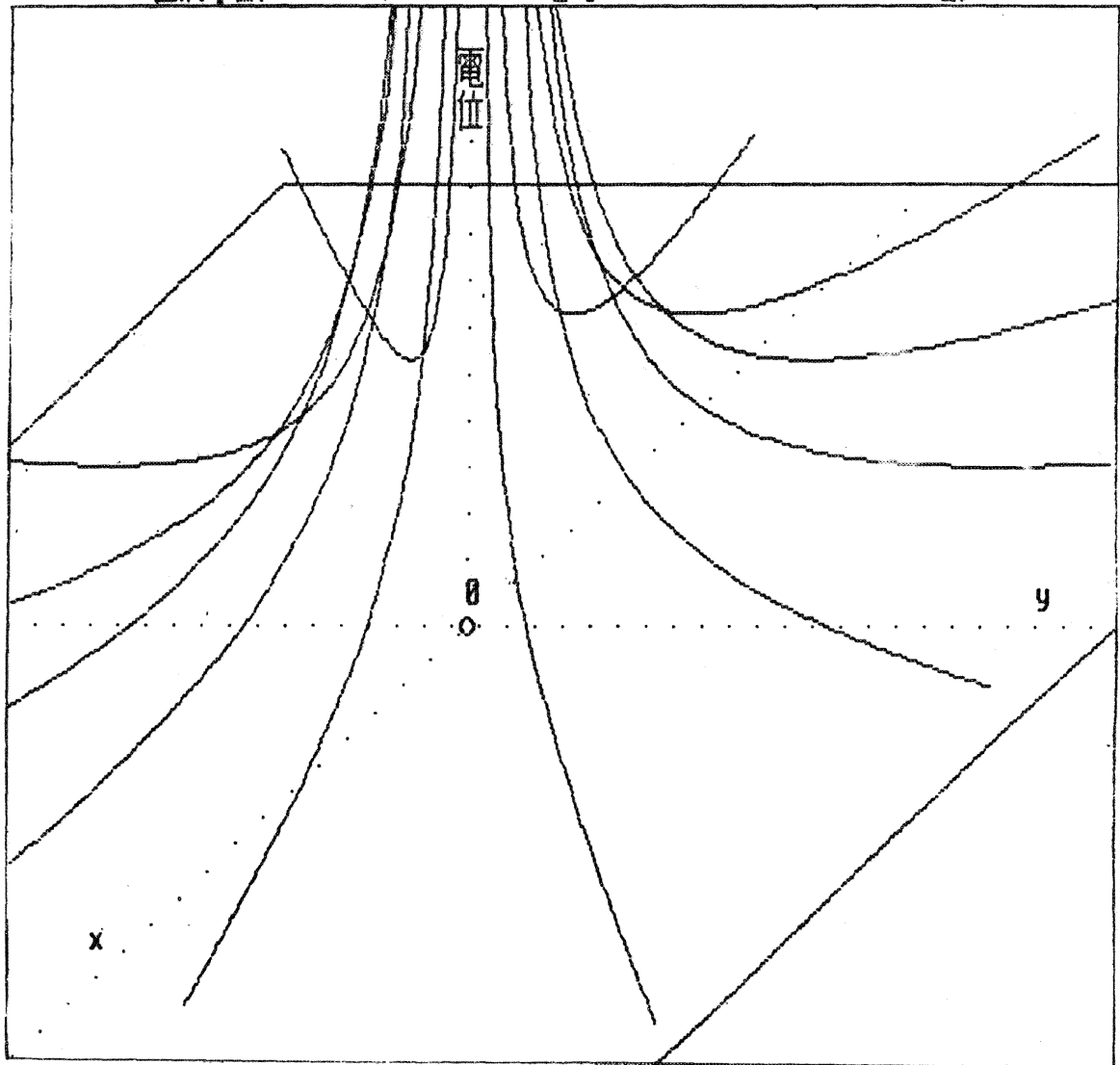
圖一

查詢?點(-78.019, +1.911) 電場(-1.868E+07, -1.596E+06) 電位-3.569E+08



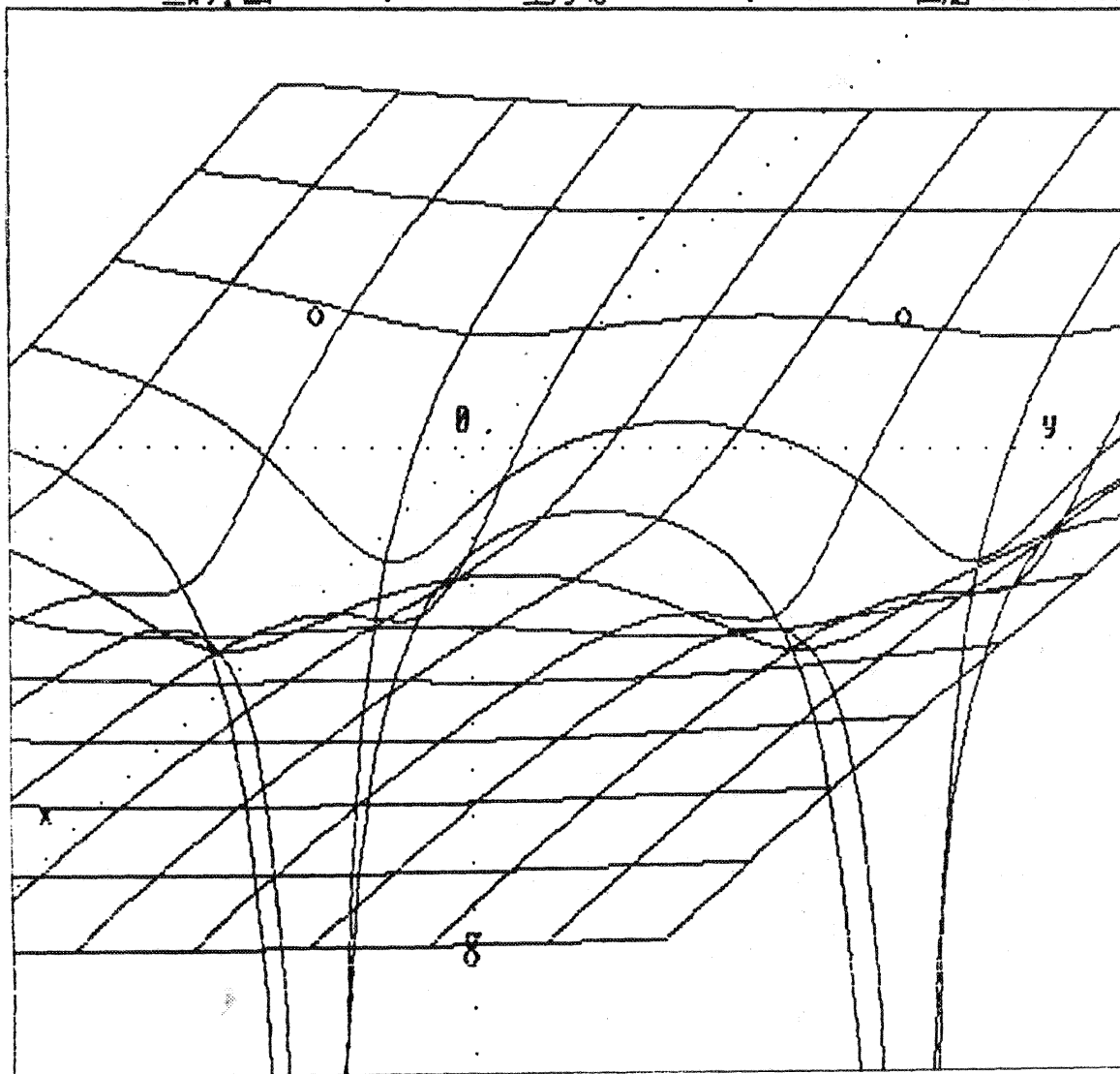
圖二

查詢點(+26.568, +99.153) 電場(+2.208E+05,+8.239E+05) 電位+8.755E+07



圖三

查詢?點(+100.00,+100.00) 重力場(+4.26E-15,+2.61E-15) 位能-0.1503E-13



評 語

- (一) 本作品係作者透過其對重力場及電場理論之認識，由公式推論，程式設計而將各種與力場有關的問題以圖形表現，其精確程度及動態性均有助於對物理現象之了解。
- (二) 作者以一高二學生能對此一問題有深入的了解，並作系統之研究工作，雖創新性不高，但殊為難能可貴，充分展現作者在物理、數學及計算機方面之能力，其研究精神及態度，尤值得嘉許鼓勵。