同心圓、平行線重疊形成曲線的研究

高中組數學科第三名

臺灣省立嘉義高級中學　　作　　者：李志宏、黃書健

指導教師：李文堂、陳獻平

一、研究動機

上基礎理化實驗時，老師利用二片同心圓系之透明片重疊，形成雙曲線的干涉條紋，用以說明水波的干涉現象，引發我們研究其數學性質的興趣。

二、研究目的

(一)推導二組等間隔之同心圓重疊時產生明暗條紋之數學式。

(二)將一組同心圓放大（或縮小）與另一組同心圓重疊之明暗條紋之數學式。

(三)探討同心圓系和平行直線系重疊後之明暗條紋。

(四)佛瑞奈環波紋 (Frensel-Ring Moire's) 與平行直線組之重疊，及二片佛瑞奈環波紋相疊的情形。

三、研究器材設備

(一)反射投影機。

(二)印好同心圓、平行直線之透明片。

四、研究過程、結果

(一) 1.印製好二張等間隔同心圓之透明片，放置投影機上，由銀幕可看出明暗的條紋，且形狀如雙曲線般，改變二圓心距離，可改變亮紋數目。

2.設二圓交點 P，二圓心 S_1, S_2，半徑為 $a, 2a, 3a \cdots\cdots$。

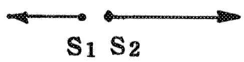
(1) S_1圓系中半徑 ta 之圓和 S_2 圓系中半徑 $(t+n)a$ 之圓相交

，則 $\begin{cases} \overline{PS_1}=ta & \cdots\cdots ① \\ \overline{PS_2}=(n+t)a & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①－② $\overline{PS_1}-\overline{PS_2}=an$ 故P表一雙曲線

且 $|an| \leq \overline{S_1S_2} \Rightarrow |n| \leq \left|\dfrac{\overline{S_1S_2}}{a}\right|$，$n \in z$

故 $\overline{S_1S_2}$ 增大時 n 之個數增多，雙曲線增多。

※特例，當 $|an|=\overline{S_1S_2}$ 時，P表二射線 

(2) Q 爲 S_1 圓系中半徑 ta 之圓與 S_2 圓系中半徑 $(n-t)a$之圓相交

$\Rightarrow \begin{cases} \overline{QS_1}=ta \\ \overline{QS_2}=(n-t)a \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{QS_1}+\overline{QS_2}=na$，表Q爲一橢圓系

且 $|an| \geq d$

(3)上述二情形皆爲以 S_1S_2 爲焦點之二次曲線。

(二) 1.將一組同心圓放大或縮小後，放在投影機上觀察，可看出似心形之曲線，此爲蚶線。

2.設 S_1 圓系中，半徑依次爲 $a, 2a, 3a \cdots\cdots$

設 S_2 圓系中，半徑依次爲 $b, 2b, 3b \cdots\cdots$

以 $S_1(o,o)$ $S_2(d,o)$ 交點 $P(x,y)$

可得 $x^2-2dx+d^2+y^2=\dfrac{b^2}{a^2}(x^2+y^2)+\dfrac{2b^2n}{a}\sqrt{x^2+y^2}+b^2n^2$

取 $x=\gamma\cos\theta, y=\gamma\sin\theta$，在 $\gamma \Rightarrow b^2n^2-d^2$ 時

可得 $\gamma=\dfrac{2a^2b}{a^2-b^2}\cos\theta+\dfrac{2ab^2n}{a^2-b^2}$ 表蚶線

※特例：① $d=0$ 時爲同心圓

② $ad=b^2n$ 時爲心臟線

(三) 1.將同心圓系之透明片與平行直線之透明片相疊放在投影機上，可得雙曲線、拋物線、橢圓等。

2.圓半徑之差爲 a

直線間隔爲 b

則可得以圓心爲焦點，直線爲準線，$e=\dfrac{a}{b}$之二次曲線

且 $0 < e < 1$　　橢圓

$e = 1$　　拋物線

$e > 1$　　雙曲線

(四) 1.佛瑞奈環波紋：爲一半徑依次爲 1、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{4}$、$\sqrt{5}$…之同心圓系。

2.將二片環波紋放在投影機上觀察，可看到下列情形：

設第一個圓之半徑爲 r，$\overline{S_1S_2} = d$

則有

(1)間隔 $\frac{d^2}{r}$ 之平行直線。

(2) $(\frac{d}{2}, 0)$ 爲圓心，半徑平方成 $\frac{1}{2}r^2$ 等差之同心圓。

(3) $(2d, o)(-d, o)$ 爲圓心之同心圓系，半徑平方成等差 $2r^2$。

(4) $(\frac{2}{3}d, o)$ $(\frac{1}{3}d, o)$ 爲圓心之二同心圓系，半徑平方成等差 $\frac{2}{3}r^2$。

(五) 1.將平行直線系與佛瑞奈環波紋相疊，則形成許多個佩瑞奈環波紋之明暗條紋。

2.設第一個圓之半徑爲 r，直線間距 b，圓心爲 o 原點。

可得 $(\pm\frac{m}{b}r^2, o)$ 爲圓心，半徑平方成等差 $(2mr^2)$ 之同心圓系。

五、結論

(一)二同心圓重疊所形成的曲線有：

1.等間隔雙曲線、橢圓。

2.一個放大：蚶線。

3.佛瑞奈環波紋：平行直線、環波紋。

(二)同心圓與平行直線：

1.等間隔：雙曲、拋物、橢圓。

2.佛瑞奈環波紋：許多環波紋。

六、參考資料

(一)教師用：

1.李文堂：放射投影機演示物理實驗，刊載於第21屆中小科學展優

勝作品專輯 P 194 。

2. Scientific American Vol208 No.5

(二)學生用：

1. 高中基礎數學：圓錐曲線。

2. 溫讓珊等三名：直線疊紋的聯想，刊載於第21屆中小科學展覽優勝作品專輯 P 133～139 。

評　　語

(一)從物理學的干涉條紋出發，引出解析幾何方法探究各種二次曲線的生成，極富趣味性。

(二)以投影機呈現結果，方法正確。

(三)因所用數學相當簡單，所以期待有更複雜的曲線紋交點的探討，或者增加更多的物理現象的具體呈現，如聲紋。