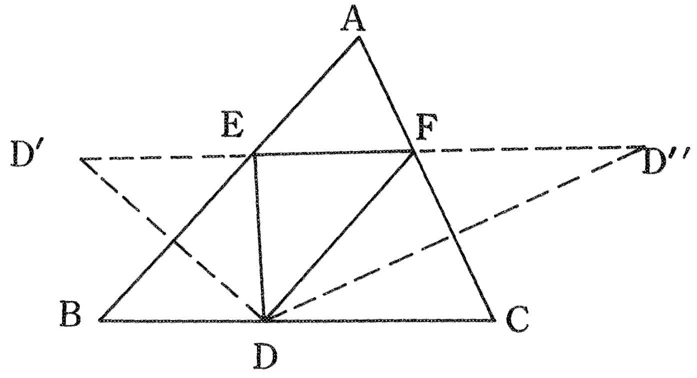
n邊形內具有最小周長的內接n邊形

高中組數學科第三名

省立新竹高級中學　　　　作　　者：劉智龍、莊徐瑞
王偉華
指導教師：許燦煌

一、研究動機

匈牙利數學家L. Fejer 在處理三角形內具有最小周長的內接三角形時，他先在$\overline{BC}$上固定一點D，再由D對$\overline{AB}$、$\overline{AC}$各作對稱點D′及D″，連接$\overline{D'D''}$，依次交$\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於E及F，請看圖(一)，那麼△DEF是在D固定具有最小周長的內接三角形。



（圖一）

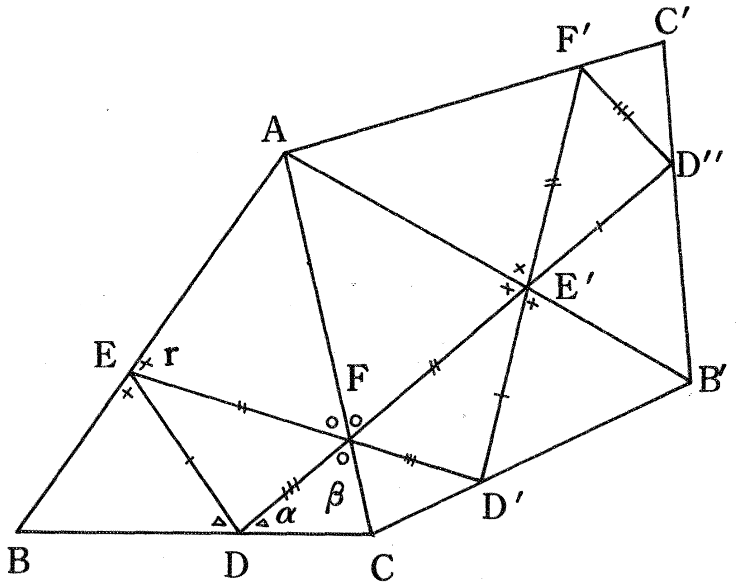
他又觀察得△AD′D″ 為一頂角∠D′AD″＝2∠BAC＝定角，且腰長$\overline{AD'}=\overline{AD''}$的等腰△，當其腰長（$\overline{AD'}=\overline{AD''}=\overline{AD}$）最小時底邊$\overline{D'D''}$（$=\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FD}$）最小所以取$\overline{AD}$為$\overline{BC}$上的高時，△DEF即為內接於△ABC且具有最小周長的三角形。

但想利用這種作法將三角形推展至四邊形、五邊形乃至於n邊形勢必十分困難，所以我們便放棄這種解法而另起爐灶。首先我們還是從最基本的銳角三角形著手，希望從此得到推廣之道，歷經種種困難，最後我們想到了我們賴以生存的光——它具有沿最短路線行進的特性，利用此特性，我們作出了以下的結果。

二、研究內容

㈠三角形的情形：

利用光的反射定律——入射角等於反射角，將△ABC的內接△DEF的周長 $\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FD}$ 改成 $\overline{DF}+\overline{FE'}+\overline{E'D''}=\overline{DD''}$ ，如圖㈡，圖中B與B′對 $\overline{AC}$ 對稱，C與C′對 $\overline{AB'}$ 對稱。



（圖二）

因 $\overline{DF}+\overline{FE}+\overline{ED}=\overline{DD''}$ 成一線段，故確實爲最小周長（因在△ABC內作另一內接三角形，其周長張成一折射），下面我們將求出此內接三角形之周長。

設 $\angle CDF=\alpha$，$\angle CFD=\beta$，$\angle AEF=\gamma$，則 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$（＝△DEF外角和的一半），再設 $\overline{BD}=X$，$\overline{CF}=Y$，$\overline{AE}=Z$，則 $\overline{CD}=a-X$，$\overline{AF}=b-Y$，$\overline{BE}=c-Z$。

由正弦定理：
$$\begin{cases}(a-X)\,\mathrm{Sin}\,\alpha=Y\,\mathrm{Sin}\,\beta\\(b-Y)\,\mathrm{Sin}\,\beta=Z\,\mathrm{Sin}\,\gamma\\(c-Z)\,\mathrm{Sin}\,\gamma=X\,\mathrm{Sin}\,\alpha\end{cases}$$
$$\Rightarrow (a-X)\,\mathrm{Sin}\,\alpha=Y\,\mathrm{Sin}\,\beta=b\,\mathrm{Sin}\,\beta-Z\,\mathrm{Sin}\,\gamma$$
$$=b\,\mathrm{Sin}\,\beta+X\,\mathrm{Sin}\,\alpha-c\,\mathrm{Sin}\,\gamma$$

$$\Rightarrow X=\frac{1}{2\ \mathrm{Sin}\ \alpha}(\ a\ \mathrm{Sin}\ \alpha - b\ \mathrm{Sin}\ \beta + c\ \mathrm{Sin}\ \gamma\ )$$

因 $\alpha=\pi-(\ \beta+\gamma\ )=\angle A$，$\beta=\pi-(\ \gamma+\alpha\ )=\angle B$，$\gamma=\pi(\ \alpha+\beta\ )=\angle C$ 所以

$$X=\frac{1}{2\ \mathrm{Sin}\ A}(\ a\ \mathrm{Sin}\ A - b\ \mathrm{Sin}\ B + c\ \mathrm{Sin}\ C\ )$$

$$=\frac{1}{2}(\ a-\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{a})$$

$$=C\ \frac{c^2+a^2+b^2}{2ca}$$

$$=C\ \cos\ B$$

同上法，亦可解得：$Y=a\ \mathrm{Cos}\ c$，$Z=b\ \mathrm{Cos}\ A$

$$\therefore \triangle DEF\text{ 的周長}=\frac{X\ \mathrm{Sin}\ B}{\mathrm{Sin}\ C}+\frac{Z\ \mathrm{Sin}\ A}{\mathrm{Sin}\ B}+\frac{Y\ \mathrm{Sin}\ B}{\mathrm{Sin}\ A}$$

$$=b\ \mathrm{Cos}\ B + a\ \mathrm{Cos}\ A + c\ \mathrm{Cos}\ C$$

$$=\frac{b(c^2+a^2-b^2)}{2ca}+\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2bc}+\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2ab}$$

$$=\frac{1}{2abc}(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)$$

$$=\frac{1}{2abc}(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)$$

$$=\frac{1}{2abc}2S\cdot 2(S-a)\cdot 2(S-b)\cdot 2(S-c)$$

$$=\frac{8\triangle^2}{abc}$$

式中 $S=\frac{a+b+c}{2}$，$\triangle=\triangle ABC$ 面積 $=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

，又因 $\overline{CD}=a-X=b\ \mathrm{Cos}\ C$，故由餘弦定理（在 $\triangle CAD$ 中）：

$$\overline{AD}^2=\overline{CA}^2+\overline{CD}^2-2\overline{CA}\cdot\overline{CD}\cdot \mathrm{Cos}C$$

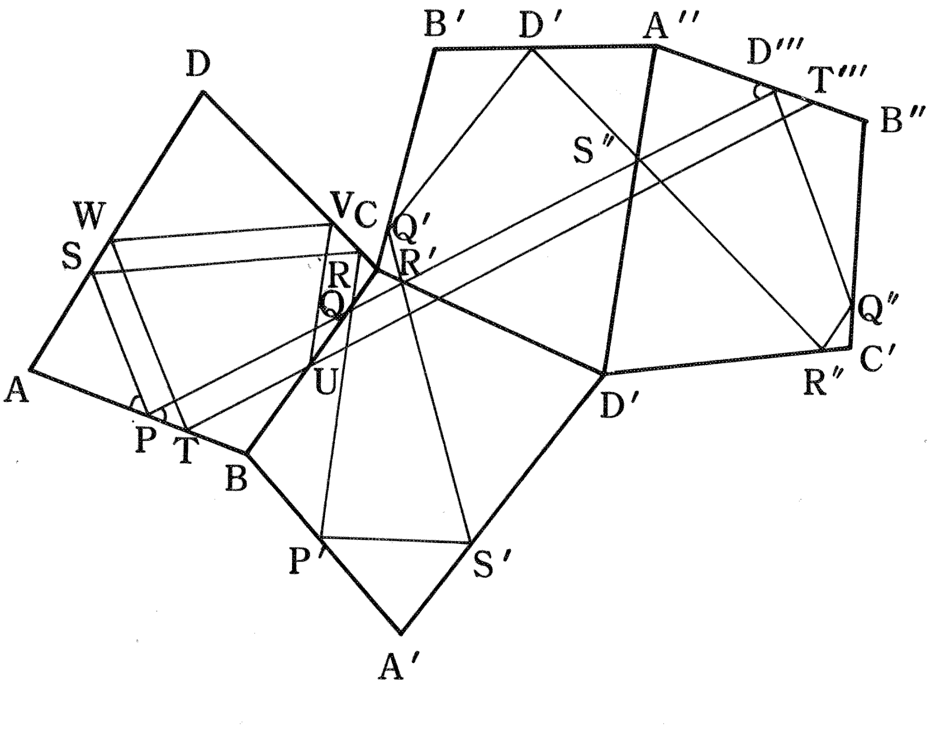
$$=b^2+(\ b\cdot \mathrm{Cos}C\ )^2-2b(\ b\cdot \mathrm{Cos}\ C\ )\mathrm{Cos}\ C$$

$= \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$

$\therefore \overline{AD} \perp \overline{BC}$，同理 $\overline{BF} \perp \overline{CA}$，$\overline{CE} \perp \overline{AB}$。又由光的反射定律知△ABC 之垂心即爲△DEF 之內心。再者若 $\angle A \geq 90^\circ$，則 $\angle BDE + \angle CDF = \alpha + \alpha = 2\angle A \geq 180^\circ$，所以只有在銳角△ABC 內才可能作出最小周長的內接△DEF 來！

㈡四邊形的情形：

仿三角形，將四邊形ABCD的內接四邊形 PQRS 的周長改成 $\overline{PP''''}$，其爲一線段，如圖㈢，同法作另一內接四邊形 TUVW（TUVW與PQRS 的對應邊平行）其周長也可改成 $\overline{TT''''}$，因 $\overline{PT} = \overline{P''''T''''}$，且 $\angle BPQ = \angle APS = \angle A''P''S''$，所以 $PTT''''P''''$ 爲一平行四邊形，故 $\overline{TT''''} = \overline{PP''''}$ 同爲最小周長，所以四邊形內具有最小周長的內接四邊形有無限多個，此點與三角形截然不同。



（圖三）

下面我們將求出具有此等內接四邊形所需之條件。設 $\angle BPQ = \alpha$，$\angle BQP = \beta$，$\angle DRS = \gamma$，$\angle DSR = \delta$，則 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$，再設 $\overline{AP} = X$，$\overline{BQ} = Y$，$\overline{CR} = Z$，$DS = U$。

由正弦定理：$\{(a-X)\cdot \mathrm{Sin}\,\alpha = Y\cdot \mathrm{Sin}\,\beta,\ Z\cdot \mathrm{Sin}\,\gamma = (b-Y)\cdot \mathrm{Sin}\,\beta$

$\{u \cdot \mathrm{Sin}\,\delta = (c-z)\cdot \mathrm{Sin}\,\gamma,\ (d-u)\cdot \mathrm{Sin}\,\delta = X\cdot \mathrm{Sin}\,\alpha$

$\Rightarrow (a-x)\,\mathrm{Sin}\,\alpha = b\,\mathrm{Sin}\,\beta - c\,\mathrm{Sin}\,\gamma + d\,\mathrm{Sin}\,\delta - x\,\mathrm{Sin}\,\alpha$

$\Rightarrow a\,\mathrm{Sin}\,\alpha = b\,\mathrm{Sin}\,\beta - c\,\mathrm{Sin}\,\gamma + d\,\mathrm{Sin}\,\delta$

因想找出 α ，所以將 β 、 γ 、 δ 以 $\angle A$ 、 $\angle B$ 表示：

$\beta = \pi - \alpha - \angle B,\ \delta = \pi - \alpha - \angle A,\ \gamma = \pi - \beta - \angle C = \alpha + \angle B - \angle C$

$\therefore a\,\mathrm{Sin}\,\alpha = b\,\mathrm{Sin}(\pi - \alpha - B) - c\,\mathrm{Sin}(\alpha + B - c) + d\,\mathrm{Sin}(\pi - \alpha - A)$

$= b(\mathrm{Sin}\,\alpha\cdot\mathrm{Cos}\,B + \mathrm{Cos}\,\alpha\cdot\mathrm{Sin}\,B) - c[\mathrm{Sin}\,\alpha\cdot\mathrm{Cos}(B-C)$

$+ \cos\alpha\cdot\sin(B-C)] + d(\mathrm{Sin}\,\alpha\cdot\mathrm{Cos}\,A + \mathrm{Cos}\,\alpha\cdot\mathrm{Sin}\,A)$

$\Rightarrow [a - b\,\mathrm{Cos}\,B + c\,\mathrm{Cos}(B-c) - d\cdot\mathrm{Cos}\,A]\,\mathrm{Sin}\,\alpha = [b\,\mathrm{Sin}\,B - (\mathrm{Sin}($

$B-c) + d\,\mathrm{Sin}\,A]\,\mathrm{Cos}\,\alpha$

$$\therefore \tan\alpha = \frac{b\,\mathrm{Sin}\,B - c\,\mathrm{Sin}(B-c) + d\,\mathrm{Sin}\,A}{a - b\,\mathrm{Cos}\,B + c\,\mathrm{Cos}(B-C) - d\,\mathrm{Cos}\,A}$$

再者因 $\beta = \pi - \alpha - \angle B$ ， $\gamma = \alpha + \angle B - \angle C$ ， $\delta = \pi - \alpha - \angle A$ ，且 $\beta + \gamma + \delta = \pi - \alpha$

所以 $\pi - \alpha = 2\pi - \alpha - \angle A - \angle C \Rightarrow \angle A + \angle C = 2\pi = \angle B + \angle D$

即四邊形ＡＢＣＤ內具有最小周長的內接四邊形之充要條件是ＡＢＣＤ共圓。

再由正弦定理，可求出此等四邊形之周長：

$$\overline{SP} + \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RS} = \frac{X\mathrm{Sin}A}{\mathrm{Sin}\delta} + \frac{Y\mathrm{Sin}B}{\mathrm{Sin}\alpha} + \frac{Z\mathrm{Sin}C}{\mathrm{Sin}\beta} + \frac{U\mathrm{Sin}D}{\mathrm{Sin}\gamma}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Sin}\beta\,\mathrm{Sin}\gamma\,\mathrm{Sin}\delta}[(a\cdot\mathrm{Sin}B\cdot\mathrm{Sin}\gamma\cdot\mathrm{Sin}\delta + b\cdot\mathrm{Sin}C\cdot\mathrm{Sin}\beta\cdot\mathrm{Sin}\delta - a\cdot\mathrm{Sin}C\cdot\mathrm{Sin}\alpha\cdot\mathrm{Sin}\delta + d\cdot\mathrm{Sin}D\cdot\mathrm{Sin}\beta\cdot\mathrm{Sin}\delta) + X(\mathrm{Sin}A\cdot\mathrm{Sin}\beta\cdot\mathrm{Sin}\gamma - \mathrm{Sin}B\cdot\mathrm{Sin}\gamma\cdot\mathrm{Sin}\delta + \mathrm{Sin}C\cdot\mathrm{Sin}\alpha\cdot\mathrm{Sin}\delta - \mathrm{Sin}D\cdot\mathrm{Sin}\alpha\cdot\mathrm{Sin}\beta)]$$

但上式 x 項係數可化爲 0 ，∴最小內接四邊形周長爲：

$$\frac{1}{\mathrm{Sin}\beta\cdot\mathrm{Sin}\gamma\cdot\mathrm{Sin}\delta}[a\cdot\mathrm{Sin}\gamma\cdot\mathrm{Sin}\delta(\mathrm{Sin}\alpha\cdot\mathrm{Cos}\beta + \mathrm{Cos}\alpha\cdot\mathrm{Sin}\beta) - a\cdot\mathrm{Sin}\alpha\cdot\mathrm{Sin}\delta\cdot(\mathrm{Sin}\beta\cdot\mathrm{Cos}\gamma + \mathrm{Cos}\beta\cdot\mathrm{Sin}\gamma) + b\cdot\mathrm{Sin}C$$

$\cdot \mathrm{Sin}\beta \cdot \mathrm{Sin}\delta + d \cdot \mathrm{Sin}D \cdot \mathrm{Sin}\beta \cdot \mathrm{Sin}\delta]$

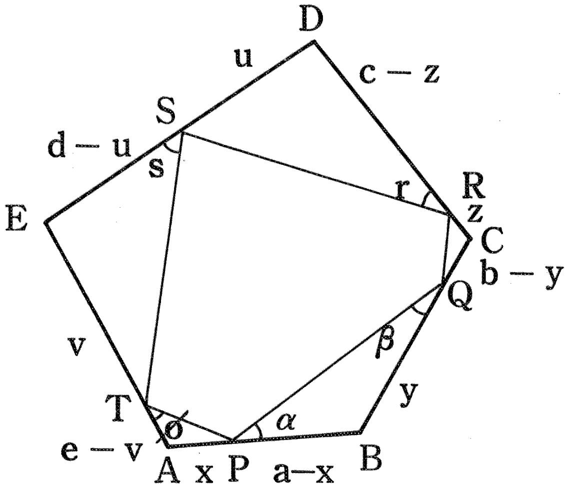
$$= \frac{a \cdot \mathrm{Sin}(B-C) + b \cdot \mathrm{Sin}C + d \cdot \mathrm{Sin}D}{\mathrm{Sin}(\alpha - B + C)}$$

因我們已知 $\tan\alpha$ 之值，故上式之周長亦可求出。

在四個頂點共圓的四邊形內任一點P（P不在對角線上）沿傾斜角 α（其值可由 $\tan\alpha$ 來確定）的方向射出，經各邊反射後即可再回到P，而成爲一完全彈性碰撞。這個原理打過撞球的人一定知道，因爲撞球枱是一個矩形枱面，其四個頂點共圓，所以它便具有此項特性。

(三)五邊形的情形：

利用光的反射定律作出五邊形ABCDE的內接五邊形PQRST，如圖(四)，仿三角形，此內接五邊形的確是具有最小周長的性質。



（圖四）

設 $\angle BPQ=\alpha$，$\angle BQP=\beta$，$\angle DRS=\gamma$，$\angle DSR=\delta$，$\angle STE=\phi$，則 $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\phi=\pi$，再設 $\overline{AP}=x$，$\overline{BQ}=y$，$\overline{CR}=z$，$\overline{DS}=u$，$\overline{ET}=v$，則 $\overline{BP}=a-x$，$\overline{QC}=b-y$，$\overline{RD}=c-z$，$\overline{SE}=d-u$，$\overline{TA}=e-v$。

$\because \beta=\pi-\alpha-\angle B$，$\gamma=\pi-\beta-\angle C=\alpha+\angle B-\angle C$，$\delta=\pi-\gamma-\angle D$
$=\pi-\alpha-\angle B+\angle C-\angle D$，$\phi=\pi-\alpha-\angle A$，且 $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\phi=\pi$

$\therefore \pi-\alpha=3\pi-2\alpha-\angle A-\angle B-\angle D \Rightarrow \alpha=2\pi-(\angle A+\angle B+\angle D)$
$=\angle C+\angle E-\pi$

$\therefore \mathrm{Sin}\alpha = -\mathrm{Sin}(A+B+D) = -\mathrm{Sin}(C+E)$　且 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\therefore 0 < 2\pi - (\angle A + \angle B + \angle D) < \frac{\pi}{2}$

故五邊形ＡＢＣＤＥ內具有最小周長的內接五邊形之充要條件是：

$\frac{3\pi}{2} < \angle A + \angle B + \angle D < 2\pi$。 除了仿三角形用迭代法外，也可用克萊瑪法則（Cramer's rule）解出 x 來。由正弦定理：

$$\begin{cases} (a-x)\mathrm{Sin}\alpha = y\,\mathrm{Sin}\beta，z\,\mathrm{Sin}\,r = (b-y)\mathrm{Sin}\beta \\ u\,\mathrm{Sin}\delta = (c-z)\mathrm{Sin}\gamma，(d-u)\mathrm{Sin}\delta = v\,\mathrm{Sin}\phi \\ (e-v)\mathrm{Sin}\phi = x\,\mathrm{Sin}\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\mathrm{Sin}\alpha)x + (\mathrm{Sin}\beta)y = a\,\mathrm{Sin}\alpha，(\mathrm{Sin}\beta)y + (\mathrm{Sin}\gamma)z = b\,\mathrm{Sin}\beta \\ (\mathrm{Sin}r)z + (\mathrm{Sin}\delta)u = c\,\mathrm{Sin}\gamma，(\mathrm{Sin}\delta)u + (\mathrm{Sin}\phi)v = d\,\mathrm{Sin}\delta \\ (\mathrm{Sin}\alpha)x + (\mathrm{Sin}\phi)v = e\,\mathrm{Sin}\phi \end{cases}$$

而

$$\triangle = \begin{vmatrix} \mathrm{Sin}\alpha & \mathrm{Sin}\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Sin}\beta & \mathrm{Sin}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Sin}\gamma & \mathrm{Sin}\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\delta & \mathrm{Sin}\phi \\ \mathrm{Sin}\alpha & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\phi \end{vmatrix} = 2\mathrm{Sin}\alpha \cdot \mathrm{Sin}\beta \cdot \mathrm{Sin}\gamma \cdot \mathrm{Sin}\delta \cdot \mathrm{Sin}\phi \neq 0$$

$$\triangle_x = \begin{vmatrix} a\cdot\mathrm{Sin}\alpha & \mathrm{Sin}\beta & 0 & 0 & 0 \\ b\cdot\mathrm{Sin}\beta & \mathrm{Sin}\beta & \mathrm{Sin}\gamma & 0 & 0 \\ c\cdot\mathrm{Sin}\gamma & 0 & \mathrm{Sin}\gamma & \mathrm{Sin}\delta & 0 \\ d\cdot\mathrm{Sin}\delta & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\delta & \mathrm{Sin}\phi \\ e\cdot\mathrm{Sin}\phi & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\phi \end{vmatrix} = \mathrm{Sin}\beta\cdot\mathrm{Sin}\gamma\cdot\mathrm{Sin}\delta\cdot\mathrm{Sin}\phi(a\cdot\mathrm{Sin}\alpha - b\cdot\mathrm{Sin}\beta + c\cdot\mathrm{Sin}\gamma - d\cdot\mathrm{Sin}\delta + e\cdot\mathrm{Sin}\phi)$$

$$\therefore x = \frac{1}{2\mathrm{Sin}\alpha}(a\cdot\mathrm{Sin}\alpha - b\cdot\mathrm{Sin}\beta + c\cdot\mathrm{Sin}r - d\cdot\mathrm{Sin}\delta + e\cdot\mathrm{Sin}\phi)$$

同上法可得：$y = \frac{1}{2\mathrm{Sin}\beta}(b\cdot\mathrm{Sin}\beta - c\cdot\mathrm{Sin}\gamma + d\cdot\mathrm{Sin}\delta - e\cdot\mathrm{Sin}\phi + a\cdot\mathrm{Sin}\alpha)$

$$z = \frac{1}{2\mathrm{Sin}r}(c\cdot\mathrm{Sin}r - d\cdot\mathrm{Sin}\delta + e\cdot\mathrm{Sin}\phi - a\cdot\mathrm{Sin}\alpha + b\cdot\mathrm{Sin}\beta)$$

$$u=\frac{1}{2\mathrm{Sin}\delta}(d\cdot\mathrm{Sin}\delta-e\cdot\mathrm{Sin}\phi+a\cdot\mathrm{Sin}\alpha-b\cdot\mathrm{Sin}\beta-c\cdot\mathrm{Sin}\gamma)$$

$$v=\frac{1}{2\mathrm{Sin}\phi}(e\cdot\mathrm{Sin}\phi-a\cdot\mathrm{Sin}\alpha+b\cdot\mathrm{Sin}\beta-c\cdot\mathrm{Sin}\gamma+d\cdot\mathrm{Sin}\delta)$$

所以，五邊形ＡＢＣＤＥ內有唯一的周長最小的內接五邊形，此與三角形相同，在$\overline{AB}$上取一點Ｐ，使$\overline{AP}=x$，然後沿α角射出（$\mathrm{Sin}\alpha=-\mathrm{Sin}(A+B+D)$）即可得出具有最小周長的內接五邊形，而其周長爲：

$$\frac{x\cdot\mathrm{Sin}A}{\mathrm{Sin}\phi}+\frac{y\cdot\mathrm{Sin}B}{\mathrm{Sin}\alpha}+\frac{z\cdot\mathrm{Sin}C}{\mathrm{Sin}\beta}+\frac{u\cdot\mathrm{Sin}D}{\mathrm{Sin}\gamma}+\frac{v\cdot\mathrm{Sin}E}{\mathrm{Sin}\delta}$$

又因 $\frac{\mathrm{Sin}A}{2\mathrm{Sin}\phi\cdot\mathrm{Sin}\alpha}=\frac{\mathrm{Sin}(\pi-\phi-\alpha)}{2\mathrm{Sin}\phi\cdot\mathrm{Sin}\alpha}=\frac{\mathrm{Sin}(\phi+\alpha)}{2\mathrm{Sin}\phi\cdot\mathrm{Sin}\alpha}=\frac{1}{2}(\mathrm{Cot}\phi+\mathrm{Cot}\alpha)$

所以最小內接五邊形周長爲：

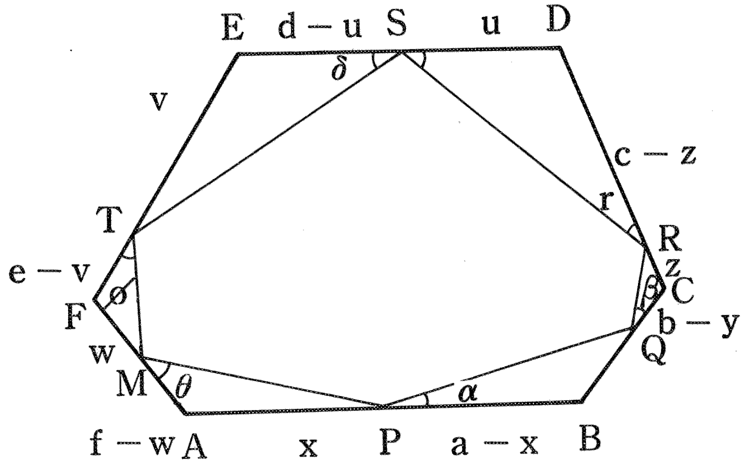
$$\frac{1}{2}(\mathrm{Cot}\phi+\mathrm{Cot}\alpha)(a\cdot\mathrm{Sin}\alpha-b\cdot\mathrm{Sin}\beta+c\cdot\mathrm{Sin}\gamma-d\cdot\mathrm{Sin}\delta+e\cdot\mathrm{Sin}\phi)+\frac{1}{2}(\mathrm{Cot}\alpha+\mathrm{Cot}\beta)(b\cdot\mathrm{Sin}\beta-c\cdot\mathrm{Sin}\gamma+d\cdot\mathrm{Sin}\delta-e\cdot\mathrm{Sin}\phi+a\cdot\mathrm{Sin}\alpha)+\frac{1}{2}(\mathrm{Cot}\beta+\mathrm{Cot}\gamma)(c\cdot\mathrm{Sin}\gamma-d\cdot\mathrm{Sin}\delta+e\cdot\mathrm{Sin}\phi-a\cdot\mathrm{Sin}\alpha+b\cdot\mathrm{Sin}\beta)+\frac{1}{2}(\mathrm{Cot}\gamma+\mathrm{Cot}\delta)(d\cdot\mathrm{Sin}\delta-e\cdot\mathrm{Sin}\phi+a\cdot\mathrm{Sin}\alpha-b\cdot\mathrm{Sin}\beta+c\cdot\mathrm{Sin}\gamma)+\frac{1}{2}(\mathrm{Cot}\delta+\mathrm{Cot}\phi)(e\cdot\mathrm{Sin}\phi-a\cdot\mathrm{Sin}\alpha+b\cdot\mathrm{Sin}\beta-c\cdot\mathrm{Sin}\gamma+d\cdot\mathrm{Sin}\delta)$$

$$=a\cdot\mathrm{Cos}\alpha+b\cdot\mathrm{Cos}\beta+c\cdot\mathrm{Cos}\gamma+d\cdot\mathrm{Cos}\delta+e\cdot\mathrm{Cos}\phi$$

$$=a\cdot\mathrm{Cos}(A+B+D)-b\cdot\mathrm{Cos}(A+D)+c\cdot\mathrm{Cos}(A+C+D)-d\cdot\mathrm{Cos}(A+C)+e\cdot\mathrm{Cos}(A+C+E)$$

㈣六邊形的情形：

利用光的反射定律作出六邊形ＡＢＣＤＥＦ之內接六邊形ＰＱＲＳＴＵ，如圖㈤，仿四邊形，此內接六邊形具有最小周長之性質。



（圖五）

$\because \beta=\pi-\alpha-\angle B$，$\gamma=\pi-\beta-\angle C=\alpha+\angle B-\angle C$，$\delta=\pi-\gamma-\angle D=\pi-\alpha-\angle B+\angle C-\angle D$，$\phi=\pi-\delta-\angle E=\alpha+\angle B-\angle C+\angle D-\angle E$，$\theta=\pi-\alpha-\angle A$，且 $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\phi+\theta=\pi$

$\therefore \pi-\alpha=3\pi-\alpha-\angle A-\angle C-\angle E \Rightarrow \angle A+\angle C+\angle E=2\pi=\angle B+\angle D+\angle F$

故六邊形ABCDEF具有最小周長之內接六邊形的充要條件是：

$$\angle A+\angle C+\angle E=2\pi=\angle B+\angle D+\angle F$$

仿四邊形，利用正弦定理及克萊瑪法則可得六個相依方程組，故 x 有無限多個解，這又與四邊形相同，然利用迭代法得：

$$a\cdot \mathrm{Sin}\alpha=b\cdot \mathrm{Sin}\beta-c\cdot \mathrm{Sin}\gamma+d\cdot \mathrm{Sin}\delta-e\cdot \mathrm{Sin}\phi+f\cdot \mathrm{Sin}\theta$$

再將 $\beta=\pi-\alpha-\angle B$，$\gamma=\alpha+\angle B-\angle C$，$\delta=\pi-\alpha-\angle B+\angle C-\angle D$，$\phi=\alpha+\angle B-\angle C+\angle D-\angle E$ 及 $\theta=\pi-\alpha-\angle A$ 代入上式，可解得：

$$\tan\alpha=\frac{b\cdot \mathrm{Sin}B-c\cdot \mathrm{Sin}(B-C)+d\cdot \mathrm{Sin}(B-C+D)-e\cdot \mathrm{Sin}(B-C+D-E)+f\cdot \mathrm{Sin}A}{a-b\cdot \mathrm{Cos}B+c\cdot \mathrm{Cos}(B-C)-d\cdot \mathrm{Cos}(B-C+D)+e\cdot \mathrm{Cos}(B-C+D-E)-f\cdot \mathrm{Cos}A}$$

又此等內接六邊形的周長為：

$$\frac{x\cdot \mathrm{Sin}A}{\mathrm{Sin}\theta}+\frac{y\cdot \mathrm{Sin}B}{\mathrm{Sin}\alpha}+\frac{z\cdot \mathrm{Sin}C}{\mathrm{Sin}\beta}+\frac{u\cdot \mathrm{Sin}D}{\mathrm{Sin}\gamma}+\frac{v\cdot \mathrm{Sin}E}{\mathrm{Sin}\delta}+\frac{w\cdot \mathrm{Sin}F}{\mathrm{Sin}\phi}$$

$=[\, a\cdot \mathrm{Sin}(B-C+D-E)+b\cdot \mathrm{Sin}(C-D+E)+c\cdot \mathrm{Sin}(D-E)+d\cdot \mathrm{Sin}E+f\cdot \mathrm{Sin}F\,]/\mathrm{Sin}(\alpha+B-C+D-E)$

利用上面的方法可推出一般的情況來。

三、結　論

(一)在 n 邊形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ 內，利用光的反射定律—入射角等於反射角，可以求得具有最小周長的內接 n 邊形的條件與周長：

1.當 $n=2k-1\ (k\geq 2)$ 時，對於不大於 n 的自然數 i，規定 $i+j>n$ 時，$A_{i+j}=A_{i+j-n}$，在 $\frac{(n-2)\pi}{2}>\angle A_i+\angle A_{i+1}+\angle A_{i+3}+\angle A_{i+5}\cdots\cdots+\angle A_{i+n-2}<\frac{(n-1)\pi}{2}$ 的條件下，具有最小周長的內接 n 邊形才會存在，而且是唯一的；當距 A_1，$x=\frac{1}{2\mathrm{Sin}\theta_1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\overline{A_iA_{i+1}}\cdot\mathrm{Sin}\theta_1$（規定 $A_{n+1}=A_1$）處，以 $\theta_1=\frac{(n-1)\pi}{2}-(\angle A_1+\angle A_2+\angle A_4+\angle A_6+\cdots\cdots+\angle A_{n-1})$ 的角度射出，依入射角等於反射角法則，經各邊反射即得具有最小周長的內接 n 邊形 $P_1P_2\cdots P_n$，而其周長為 $\sum_{i=1}^{n}\overline{A_iA_{i+1}}\cdot\mathrm{Cos}\theta_i$，其中 θ_2，$\cdots\cdots\theta_n$ 被 θ_1 及多邊形各內角所決定，如圖(六)。

2.當 $n=2k\ (k\geq 2)$ 時，在 $\angle A_1+\angle A_3+\cdots\cdots+\angle A_{n-1}=\angle A_2+\angle A_4+\cdots\cdots+\angle A_n=\frac{(n-2)\pi}{2}$ 的條件下，具有最小周長的內接 n 邊形存在，而且有無限多個。取

$$\tan\theta_1=\frac{\overline{A_2A_3}\mathrm{Sin}A_2-\overline{A_3A_4}\mathrm{Sin}(A_2-A_3)+\overline{A_4A_5}\mathrm{Sin}(A_2-A_3+A_4)+\cdots\cdots+(-1)^n\overline{A_nA_{n+1}}\mathrm{Sin}(A_2-A_3+A_4-A_5+\cdots\cdots+A_n)}{\overline{A_1A_2}-\overline{A_2A_3}\mathrm{Cos}A_2+\overline{A_3A_4}\mathrm{Cos}(A_2-A_3)-\overline{A_4A_5}\mathrm{Cos}(A_2-A_3+A_4)+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\overline{A_nA_{n+1}}\mathrm{Cos}(A_2-A_3+A_4-A_5+\cdots\cdots+A_n)}$$

（式中 $A_{n+1}=A_1$，且 $0<\theta_1<\frac{\pi}{2}$）

過 $\overline{A_1A_2}$ 上任一點 P_1，以 θ_1 角度射出，依入射角等於反射角經各

邊反射後即得具有最小周長的內接 n 邊形 $P_1P_2 \cdots\cdots P_n$ ，其周長爲：

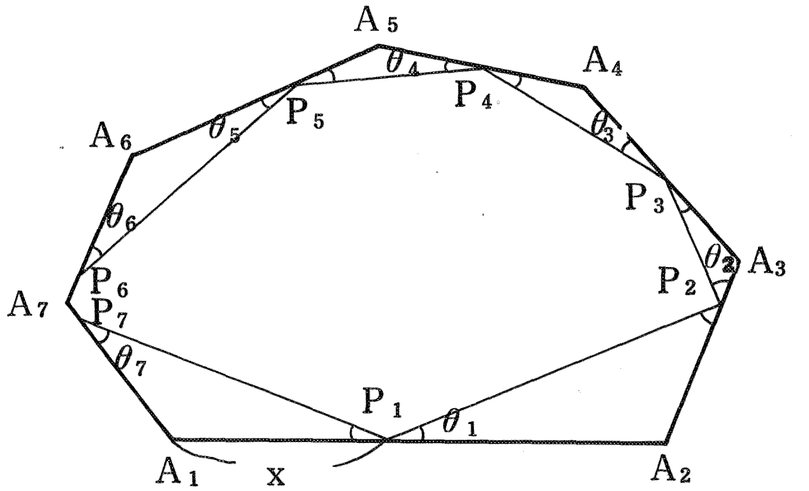
$$\frac{A_1A_2\text{Sin}(A_2-A_3+\cdots+(-1)^{n-1}A_{n-1})+A_2A_3\cdot\text{Sin}(A_3-A_4+\cdots+(-1)^{n-2}A_{n-1}+\cdots+A_{n-2}A_{n-1}\cdot\text{Sin}A_{n-1}+A_nA_1\cdot\text{Sin}A_n}{\text{Sin}(A_1+A_2-A_3+\cdots(-1)^{n-1}A_{n-1}}$$

(二)多邊形 $A_1A_2 \cdots\cdots A_n$ 爲一正多邊形且一邊長爲 a 時：

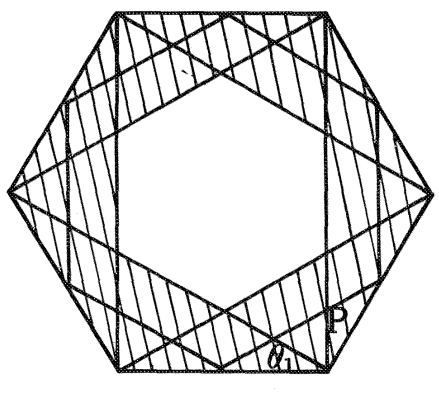
1.當 $n=2k-1$ （ $k\geq 2$ ）時，具有最小周長的內接 n 邊形爲一正 n 邊形，其頂點在各邊中點，入射角均爲 $\frac{\pi}{n}$，其周長爲 $n \cdot a \cdot \text{Cos}\frac{\pi}{n}$。

2.當 $n=2k$ （ $k\geq 2$ ）時，具有最小周長的內接 n 邊形有無限多個，在各邊的入射角均爲 $\frac{\pi}{n}$，且其周長亦爲 $n\cdot a\cdot\text{Cos}\frac{\pi}{n}$ 。

(三)對於 2 k 邊形內及其相鄰二邊的對角線所圍 2 k 邊形外的區域內任一點 P 也可作完全彈性碰撞。如圖(七)



（圖六）



（圖七）

評　　語

㈠從一個著名的三角形內最小周長三角形出發，作了適當的推廣研究至一般的多邊形。

㈡作品完整，有深度。

㈢發揮高中的三角和代數的能力。