矩形中分割方形

高中組數學科第一名

臺灣省立新竹高級中學　　作　　者：葉龍泉、林志浩、莊育信、蔡金進
指導教師：儲啓政

一、研究動機

在某一期牛頓雜誌上有一道將矩形分割後再組成正方形的問題。它的解法深深吸引我們，於是著手研究有關矩形與正方形之間切割的問題。我們發現，其中以"矩形中分割方形"最爲有趣，亦深富價值，這也就是本文所要探討的主題。

二、研究目的

在一個邊長爲整數的矩形中，分割出邊長亦爲整數的正方形，使得正方形恰好將此矩形分完。並且尋求出一種最佳分法，使分割出來的正方形塊數爲最少。

三、研究器材設備

個人電腦、紙、筆。

四、研究內容

㈠符號與定義：

1. $\boxed{n \times m}$ ：表示一長爲 n，寬爲 m 的矩形。（長表直向長度，寬表橫向長度）
2. $\boxed{n}$ ：表示一邊長爲 n 的正方形。
3. f（n,m）：表示在 $\boxed{n \times m}$ 中，分成若干個 $\boxed{P}$（註）的最佳方法，亦即使分割出的正方形塊數爲最小的方法。它具有雙重意義，一爲代數意義，即 $\boxed{P}$ 的個數；

一爲幾何意義，即此種分法的形式。

4. f（n,m）：表示在 $\boxed{n\times m}$ 中，以"輾轉相除法"分出若干個 $\boxed{P}$ 的方法，其亦具有雙重意義，如 f(n,m) 中所述。

所謂輾轉相除法，係指依以下步驟所得之結果：

(1)在 $\boxed{n\times m}$ 中，以 n 爲邊長，做一個 $\boxed{n}$ ，每做一次，m的值就減去 n ，一直做到 n ＞m或m＝0。

(2)如果m＝0就算完成，否則令 n ＝m ，m＝n ，再回到(1)。

聰明的讀者一定會發現，這過程與求最大公因數時用的輾轉相除法相彷。事實上，F(n,m) 的值，就是將 n 與 m 兩數做輾轉相除，所得到所有商之和。

註：$\boxed{P}$ 表含在 $\boxed{n\times m}$ 中所有可能之正方形。

又，本文所有變數均表正整數或零，且當m，n有一爲0時，f(n,m) 與F(n,m) 之值均定爲0 。

(二)利用電腦幫助研究：

求F(n,m) 的值是極其容易的，但 f(n,m) 之情形卻非常複雜，實非人腦所能想像，因此我們利用電腦處理資料的能力與快速運算的特性，以一種有效率的方法來處理 f(n,m) 。以下是利用PASCAL語言所寫的一個程式：

```
PROGRAM PARTION ;

TYPE MATRIX = ARRAY [1..20,1..20] OF INTEGER;
VAR A, TA : MATRIX;
       M , N  I , J : INTEGER ;
       MIN , TP : INTEGER ;
PROCEDURE BLOCK(A:MATRIX;H,K,C:INTEGER);
       VAR L : INTEGER ;

BEGIN
```

```
C:=C+1;
IF C<MIN THEN
  BEGIN
    L:=0;
    WHILE(H+L<=M)AND(K+L<=N)AND(A[H+L,K=0)DO
      BEGIN
        L:L+1;
        FOR I:=0 to L-1 do
          FOR J:=0 to L-1 do
            A[H+I,K+J]:=L;
    IF(H+L<=M)AND(A[H+L,K]=0) THEN
      BLOCK(A,H+L,K,C)
  END;
 IF(H+L=M+1)OR(A[H+L,K]<>0) THEN
  BEGIN
    WHILE(A[H,K]<>0)AND(K<=N)DO
      BEGIN
        H:=H+A[H,K];
        IF H=M+1 THEN
          BEGIN
            H:=1;K:=K+1
          END
      END;
    IF K<=N THEN BLOCK(A,H,K,C)
    ELSE
      BEGIN
        IF C<MIN THEN
          BEGIN
            MIN:=C;
            TA:=A
```

```
                        END
                    END
                END
            END
END;

FUNCTION F(A,B:INTEGER):INTEGER;
VAR Q,R,SUM:INTEGER;
BEGIN
    SUM:=0;
    WHILE B<>0 DO
        BEGIN
            Q:=A DIV B;
            R:=A MOD B;
            SUM:=SUM+Q;
            A:=B;
            B:=R
        END;
    F:=SUM
END;

BEGIN {MAIN}
    FOR J:=1 to N DO
        FOR I:=1 to M DO
            A[I,J]:=0;

READLN(N);READLN(M);
    TP:=F(M,N);
    WRITELN('F=',TP);
    MIN:=TP;
```

```
BLOCK(A,1,1,0);
 IF MIN=TP THEN
   WRITELN('NEVER BETTER')
 ELSE
 BEGIN
   WRITELN('MIN=',MIN);
   WRITELN('THE MATRIX IS');
   WRITELN;
   FOR J:=1 to N DO
     BEGIN
       FOR I:=1 to M DO
         WRITE(TA[I,J]:3);
       WRITELN
     END
 END
END.
```

執行結果：

```
6
5
F = 6
MIN= 5
THE MATRIX IS
  2  2  3  3  3
  2  2  3  3  3
  2  2  3  3  3
  2  2  3  3  3
  2  2  3  3  3
  2  2  3  3  3

Press any key to return to Turbo Pascal
```

```
15
8
F = 9
MIN = 8
THE MATRIX IS
    1 1 3 3 3 3 3 3
    2 2 3 3 3 3 3 3
    2 2 3 3 3 3 3 3
    4 4 4 4 4 4 4 4
    4 4 4 4 4 4 4 4
    4 4 4 4 4 4 4 4
    4 4 4 4 4 4 4 4
    8 8 8 8 8 8 8 8
    8 8 8 8 8 8 8 8
    8 8 8 8 8 8 8 8
    8 8 8 8 8 8 8 8
    8 8 8 8 8 8 8 8
    8 8 8 8 8 8 8 8
    8 8 8 8 8 8 8 8
    8 8 8 8 8 8 8 8
Press any key to return to Turbo Pascal
8
6
F = 4
NEVER BETTER
Press any key to return to Turbo Pascal
```

主程式在第62行～86行，負責輸入與輸出。在執行結果中，數字表示它所在的正方形邊長。

第7行到第45行是本程式的靈魂，這是一個遞迴性呼叫的副程式，名爲BLOCK 。它的基本工作原理是：

每呼叫一次BLOCK ，就產生一個樹的節點，分出許多分支。接著遊歷（travelling） 這棵樹，利用左序處理法遊歷每一個葉，每一個葉代表一種分法。葉的高度就是所分割正方形的塊數，即C，在所有C中最小的就是MIN的值，即 f(n,m) 的值。

BLOCK的四個參數，A表分割的方法，以陣列型態存起來。H與K分別代表橫座標與縱座標，以左上角爲(1,1)，右下角爲(m,n)，(H,K) 表示執行下一次BLOCK時的起始位置。C是目前已分割的正方形塊數。

每進入一次BLOCK，C的值就加1，L則設爲0。第15行到第23行，將所能塡入的數字，以最小到最大的順序塡上，因爲遞迴的關係，每塡一個數字，其後仍重覆此工作。程式執行的順序是將(H,K)由左到右，由上往下逐列處理。當H＞M或H所在位置已塡過數字，24行～33行就判斷該跳過或換列。當列數超過n時，就停止工作，比較C與MIN的大小關係。MIN的值一開始便設爲TP(70行)，而TP是F(n,m) 的值(第47行～60行)，一旦遇有比MIN小的C值，就取而代之，且將其內容存到TA。

由於第12行的緣故，BLOCK只尋找比輾轉相除法好的分法，在樹的結構中，越往下層，分支越多，成次方關係成長。第12行的加入無異大大縮短遊歷的時間，而增加執行的速度。在主程式中，如果找到比輾轉相除法好者，就印出它的內容，否則印出“NEVER BETTER”。

㈢ f 的基本性質：

利用電腦，我們可以正確無誤地找到最佳的分割法，以下是我們分析結果所得到一些關於 f 的性質：（限於篇幅無法一一列出證明過程）

1. $f(n,m) = f(m,n)$

2. $f(nk,mk) \leq f(n,m)$

$\boxed{n \times m}$ 的分法一定可以是 $\boxed{nk \times mk}$ 的分法（只要將 $\boxed{n \times m}$ 分法中的每一個正方形每邊乘上K倍即可）。而 $\boxed{nk \times mk}$ 的分法則不一定是 $\boxed{n \times m}$ 的分法（將 $\boxed{nk \times mk}$ 分法中的每一個正

方形每邊除以k倍後，其邊長不一定是整數），故 $f(nk,mk) \leq f(n,m)$。

3. $f(1,n) = n$

4. $f(2,2n+1) = n+2$ ， $f(2,2n) = n$

5. $f(a+b,n) \leq f(a,n) + f(b,n)$

   $f(a+b,n)$ 一定不會比 $f(a,n)+f(b,n)$ 大（只要將 $\boxed{(a+b)\times n}$ 分成 $\boxed{a\times n}$ 與 $\boxed{b\times n}$ ，再分別依照 $f(a,n)$ 與 $f(b,n)$ 的分法處理，則二者相等）。但 $f(a+b,n)$ 卻有可能比 $f(a,n)+f(b,n)$ 小（當 $\boxed{(a+b)\times n}$ 的最好分法中，有任何一個正方形跨在 $\boxed{a\times n}$ 與 $\boxed{b\times n}$ 上，無法順利將 $(a+b)\times n$ 分成 $a\times n$ 與 $b\times n$ 而不破壞原來的分法時，$f(a+b,n)$ 將會比 $f(a,n)+f(b,n)$ 小）。所以 $f(a+b,n) \leq f(a,n)+f(b,n)$。

6. $k \geq 1$ 時， $f(k,nk) = n$

7. $f(n,n) = 1$

(四) F 的基本性質：

利用電腦的幫助，加上本身的探索，我們也發現一些關於F的性質：（限於篇幅，僅能選數則加以證明，無法一一列出證明過程）

1. $F(n,m)=F(m,n)$

2. $F(nk,mk)=F(n,m)$

3. $F(1,n)=n$

4. $F(2,2n+1)=n+2$；$F(2,2n)=n$

5. $F(na+b,a)=F(a,b)+n$

令 $h=na+b$

若b是h除以A的餘數，則 $F(na+b,a)$ 自然等於 $F(a,b)+n$

否則令 $b=n'a+b'$ ，其中 n'、b' 分別為b除以a的商及餘數

則 $h=(n+n')a+b'$

$F(a,b)+n$

$=F(a,n'a+b')+n$

$=n'+F(a,b')+n$

$=(n+n')+F(a,b')=F([n+n']a+b',a)$

$=F(h,a)=F(na+b,a)$

6. $a+b=n \Rightarrow F(n,a)=F(n,b)$

$F(n,a)=F(a+b,a)=F(a,b)+1$

同理

$F(n,b)=F(a,b)+1$

$\therefore F(n,a)=F(n,b)$

7. $F(n+1,n)=n+1$

$F(n+1,n)=F(n+1,1)=n+1$

8. $F(n,m)\leq n\cdot m$

(五) f 與 F 的關係：

1. $f(n,m)\leq F(n,m)$

F 只是一種較爲直觀、簡便的方法，而 f 則表示最佳方法，其所分出的正方形塊數必爲最少。二者可能相同，也可能不相同。因此 $f(n,m)\leq F(n,m)$

2. $f(1,n)=F(1,n)$

由(三)～3 與(四)～3 可知 $f(1,n)=n=F(1,n)$

3. $f(2,n)=F(2,n)$

由(三)～4 與(四)～4 可知

4. $f(3,n)=F(3,n)$

令 $f(3,n)$ 的分法中恰有 m 個 $\boxed{3}$ ，令 $n=3m+\ell$

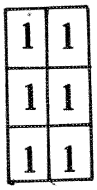
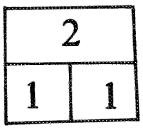
則 $f(3,n)=m+f(3,\ell)$

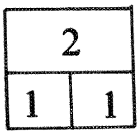
若 $\ell=0$ ，則 $f(3,n)=m=F(3,\ell)$

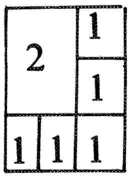
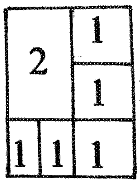
若 $\ell>0$ ，則 $f(3,\ell)>0$，此時若 $f(3,\ell)$ 的分法中含有 2 個 $\boxed{2}$ ，則含有 2 個 $\begin{array}{|c|c|}\hline \multicolumn{2}{|c|}{2} \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$ ，即含有 $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \multicolumn{2}{|c|}{2} & \multicolumn{2}{c|}{2} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$ 不如

但含有 $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \multicolumn{2}{|c|}{2} & \multicolumn{2}{c|}{2} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$ 不如含有 $\begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \\ \cline{2-2} & 1 \\ \hline\end{array}$ ，故 $f(3,\ell)$ 中至多含一個 $\boxed{2}$ ，且沒有 $\boxed{3}$ 。

(1)若 $f(3,\ell)$ 中沒有 $\boxed{2}$ ，則 $f(3,\ell)$ 中全是 $\boxed{1}$ 。可得 $\ell=1$

，否則  不如  。故 $f(3,\ell)=F(3,\ell)$ 。

(2)若 $f(3,\ell)$ 中恰含 1 個 $\boxed{2}$ ，則 $f(3,\ell)$ 中除含 1 個 

外必不含 $\boxed{1}$ ，否則 $f(3,\ell)$ 含  ，但  不如 3

。故 $\ell=2$ ， $f(3,\ell)=F(3,\ell)$ 。

由(1)、(2)知

$$
\begin{aligned}
& f(3,n)\\
&= m+f(3,\ell)\\
&= m+F(3,\ell)\\
&= F(3m+\ell,3)\\
&= F(3,n)
\end{aligned}
$$

5. $f(4,n)=F(4,n)$

證明方法大致與證明 $f(3,n)=F(3,n)$ 相仿，爲省篇幅，略。

6. 2 ～ 5 可併爲

$\mathrm{Min}(n,m)\leq 4\Rightarrow f(n,m)=F(n,m)$

7. $n\geq 5\Rightarrow f(n,n+1)<F(n,n+1)$

(1) $n=4k+1$ ， $k\in N$ 時

$$
\begin{aligned}
& f(n,n+1)\\
&= f(4k+1,4k+2)\\
&\leq f(2k+1,4k+2)+f(2k,4k+2)\\
&\leq f(1,2)+F(2k,4k+2)\\
&= 2+2+F(2k,2)\\
&= 4+k
\end{aligned}
$$

又 $F(n,n+1)=F(4k+1,4k+2)=4k+2$

$(4+k)-(4k+2)=-3k+2<0$ 所以 $f(n,n+1)<F(n,n+1)$

(2) $n=4k+2$，$4k+3$，$4k+4$ 的情形大致相仿，不再列出證明過程。

8. $n\geq 10 \Rightarrow f(n,n+2)<F(n,n+2)$

(1) n 是偶數時，令 $n=2k$, $k\geq 5$

$$
\begin{aligned}
& f(n,n+2) \\
&= f(2k,2k+2) \\
&\leq f(k,k+1) \\
&< F(k,k+1) \\
&= F(2k,2k+2) \\
&= F(n,n+2)
\end{aligned}
$$

(2) n 是奇數時，限於篇幅無法列出，請原諒。

9. $n\geq 6 \Rightarrow f(n,kn\pm 1)<F(n,kn\pm 1)$，$k\geq 2$

$$
\begin{aligned}
& f(n,kn\pm 1) \\
&\leq f(n,(k-1)n)+f(n,n\pm 1) \\
&= k-1+f(n,n\pm 1) \\
&< k-1+F(n,n\pm 1) \\
&= F(n,kn\pm 1)
\end{aligned}
$$

10. $n\geq 12 \Rightarrow f(n,kn\pm 2)<F(n,kn\pm 2)$，$k\geq 2$

證明方法與上相同，從略。

五、結論

在“$\mathrm{Min}(n,m)\leq 4$”及“$f(k,nk)$”的情形下，我們可以直接指出 $f(n,m)$ 的分法。則餘則間接說明確實存在著比輾轉相除法好的分法，這是我們的缺憾，也是今後努力的重點！

話雖如此，在每一個證明中，就表示一種分法，這在應用上或許有些價值。

評　　語

(一)研究題目的選取，問題的提出，富有創意，是組合學中有意義的問

題，絕非一般高中教學習題。

(二)以輾轉相除法做爲一種比較很恰當。

(三)利用電腦來找尋假說，符合電腦協助數學研究的潮流。

(四)研究學生互相切磋。

(五)可惜所得結果仍屬初步探索階段，我們期待重要的突破，如 $F(m, n) \leq f(m, n) + \sigma(m, n)$ 其中 $\sigma(m, n)$ 爲可確定函數。