互補集合——從黃金分割比值及平方開始

高中組數學科第一名

台灣省立鳳山高級中學　　作　　者：許秉凱、江中宙

指導教師：吳柏林、王武長

一、引　　言

威索夫（wythoff）遊戲是一個兩人輪流取兩堆火柴的遊戲，遊戲規則每人取火柴時，需依下列三種取法之一：(I) 從第一堆任取若干支火柴；(II) 從第二堆任取若干支火柴；(III) 從兩堆中各取相同數目的火柴，能取最後一支火柴者獲勝。我們研究威索夫遊戲時，發現遊戲的致勝關鍵在於黃金分割比值 (G) 及其平方（G^2）若干倍數後的整數部份所構成的兩個數列，此乃因這兩個數列存在的奇妙關係—互補關係。我們由黃金分割比值及其平方兩數所構成的數列以及一些關於互補關係的性質，找出另外兩數所構成的兩個數列也具有互補關係，並歸納得到凡兩數構成具有互補關係的數列，此兩數必備的條件。我們將具有互補關係的數列推廣也改變威索夫遊戲，在所有具有互補關係的數列中找出致勝關鍵數列。我們更廣泛地繼續討論任意兩個具有互補關係的數列，找出它們之間的關係，並以此關係舉出一個有趣的應用。

二、基本定義及性質

2-1　互補的定義：考慮兩數列$\langle a_n \rangle$及$\langle b_n \rangle$，令集合$A=\{a_n\}$，$B=\{b_n\}$，若$A\cap B=\phi$，$A\cup B=N$，此時我們稱A和B互補。

2-2　黃金分割比值及其平方的一些基本性質：

通常我們以$G=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\fallingdotseq 1.618$ 表示黃金分割比值，G為

$X^2-X-1=0$ 之一根，而下列黃金分割比值的基本性質在證明中常利用：

(1) $G^2=G+1$，(2) $\frac{1}{G}=G-1$，(3) $\frac{1}{G^2}=1-\frac{1}{G}=2-G$

2-3　高斯符號的一些基本性質：設 $q\in N$，$P>0$，$r>0$

(1) $[p]=q \Leftrightarrow q\leq p<q+1$

(2) $[p]=[r]$，$p>r \Leftrightarrow p-1\leq r<p$

(3) $[p+r]-[p]=[r]+1 \Leftrightarrow (p-[p])+(r-[r])\geq 1$

(4) $[p+r]-[p]=[r] \Rightarrow (p-[p])+(r-[r])<1$

(5) $[p+q]=[p]+q$

2-4　逆數列的定義：設 $<a_n>$ 爲一遞增數列，定義 $<a_n>$ 的逆數列 $<a_n{}^*>$　$a_n{}^*=(a_m$ 中 $<n$，m之最大值)

若所有 $<a_m>$ 均大於或等於 n 時，定義 $a_n{}^*=0$

例如：$a_1=2$，$a_2=3$，$a_3=3$，$a_4=5$，$a_5=5$，$a_6=9$……

$<a_n>$ 爲一遞增數列，所有 $a_n>1$，故 $a_1{}^*=0$，所有 $a_n\geq 2$，故 $a_2{}^*=0$。

$a_2=3$，$a_1<3$，故 $a_3{}^*=(a_n$ 中 <3，n 的最大值$)=1$

$a_4=5$，$a_3<4$，故 $a_4{}^*=(a_n$ 中 <4，n 的最大值$)=3$

$a_4=5$，$a_3<5$，故 $a_5{}^*=(a_n$ 中 <5，n 的最大值$)=3$

$a_6=9$，$a_5<6$，故 $a_6{}^*=(a_n$ 中 <6，n 的最大值$)=5$

⋮　　　⋮　　　⋮

三、黃金分割比值和威索夫遊戲

3-1　黃金分割比值及其平方的互補性質推測及證明：

考慮兩數列 $<a_n>$，$a_n=[nG]$；$b_n=[nG^2]$；集合 $A=\{a_n\}$ $B=\{b_n\}$ 我們可列出 $<a_n>$ 及 $<b_n>$ 的前20項：　(3-1.1)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27	29	30	32
b_n	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44	47	49	52

由上表我們推測若將表繼續列下去，有下列二性質：

(1) $<a_n>$ 和 $<b_n>$ 中任兩項均不相等，即 $A \cap B = \phi$ 。

(2)所有自然數皆可在 $<a_n>$ 或 $<b_n>$ 中找到，即 $A \cup B = N$ •

所以我們推測A和B互補。

【定理1】若 $<a_n>$、$<b_n>$ 集合A、B如3-1.1所定義，則 $A \cap B = \phi$

【定理2】若 $<a_n>$、$<b_n>$ 集合A、B如3-1.1所定義，則 $A \cup B = N$

3-2 判斷是否屬於集合A或B：

【定理3】數列 $<Cn>$，$Cn = [n\alpha]$，$\alpha > 1$，α 爲定值，令 $C = \{Cn\}$

P爲C中的元素 $\Leftrightarrow \frac{P}{\alpha} - [\frac{P}{\alpha}] \geq 1 - \frac{1}{\alpha}$

所以在定義3-1.1中，$a \in A \Leftrightarrow \frac{a}{G} - [\frac{a}{G}] \geq 1 - \frac{1}{G} = 1 - G + 1 = 2 - G$

$b \in B \Leftrightarrow \frac{b}{G^2} - [\frac{b}{G^2}] \geq 1 - \frac{1}{G^2} = 1 - 2 + G = G - 1$。即欲判斷給定 $P \in N$，屬於A或是B，祇需視 $\frac{P}{G}$ 或 $\frac{P}{G^2}$ 之小數部份大於 $2 - G$ 或 $G - 1$ 即可。

3-3 威索夫遊戲：在以下的定理中，設兩堆火柴分別爲a、b個，以（a、b）表示之，其中 $a \leq b$，定義"安全局"爲己方取完後穩操勝算的情況。

【定理4】（a、b）爲安全局 $\Leftrightarrow a = [mG]$，$b = [mG^2]$，其中m、$n \in N$。

四、推廣一

4-1 推廣的限制：我們將定義3-1.1推廣爲：該兩數列 $<a_n>$ $a_n = [n\alpha]$，$<b_n>$，$b_n = [n\beta]$，$\alpha \leq \beta$、α，β 均爲定值，令 $A = \{a_n\}$，$B = \{b_n\}$（4-1.1）。

由定理1和定理2，我們知在定義4-1.1之下，若 $\alpha = G$，$\beta = G^2$ 時，集合A和B互補，我們嘗試以擧出 α 值來逼近 β 值，

發現α值受二個限制：

【定理5】若$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$集合A，B如4-1.1所定義，且集合A和B互補則（Ⅰ）$1<\alpha<2$（Ⅱ）α爲無理數

4-2　找出另一組互補集合：由定理5，在定義4-1.1中取$\alpha=\sqrt{2}$，可利用$\langle a_n\rangle$的前19項缺少的數來逼近β值。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$[n\sqrt{2}]$	1	2	4	5	7	8	9	11	12	14	15	16	18	19	21	22	24	25	26

由上表知$\langle a_n\rangle$中缺3、6、10、13、17、20、23……即$b_1=3$，$b_2=6$，$b_3=10$，$b_4=13$，$b_5=17$，$b_6=20$，$b_7=23$，

$[\beta]=3\Rightarrow 3\leq\beta<4$

$[2\beta]=6\Rightarrow 6\leq 2\beta<7\Rightarrow 3\leq\beta<3.5$

$[3\beta]=10\Rightarrow 10\leq 3\beta<11\Rightarrow 3.33\leq\beta<3.67$

$[4\beta]=13\Rightarrow 13\leq 4\beta<14\Rightarrow 3.25\leq\beta<3.5$

$[5\beta]=17\Rightarrow 17\leq 5\beta<18\Rightarrow 3.4\leq\beta<3.6$

$[6\beta]=20\Rightarrow 20\leq 6\beta<21\Rightarrow 3.33\leq\beta<3.5$

$[7\beta]=23\Rightarrow 23\leq 7\beta<24\Rightarrow 3.28\leq\beta<3.43$

$\Rightarrow 3.4\leq\beta<3.43$

由以上的逼近，我們知n值越大，β的範圍就越小，而以上的逼近，顯得太慢了！取了19項a_n才確定出β值的小數下一位，因此我們希望能找到夠大的m，使得$bm\leq m\beta<bm+1\Rightarrow$

$$\frac{bm}{m}<\beta<\frac{bm}{m}+\frac{1}{m}$$

而能看出β的值。$U\in A\Leftrightarrow\frac{U}{\sqrt{2}}-[\frac{U}{\sqrt{2}}]\geq 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\fallingdotseq 0.293$

取$U_1=10000$，$\frac{U_1}{\sqrt{2}}=7071.068$，故$10000\in B$，取$U_2=10001$ $\frac{U_2}{\sqrt{2}}=7071.775$，故$10001\in A$，設$[m\sqrt{2}]=10001\Rightarrow 10001\leq m\sqrt{2}<10002\Rightarrow 7071.7\leq m<7072.5$，即$m=7072$

設$10000=b_n$，即$10000=[n\beta]$

m	1	2	3	……	n	……	7071	7072
$[m\alpha]$	1	2	4	……	$[n\alpha]$	……	9999	10001
$[m\beta]$	3	6	10	……	10000	……		

由表中知 $10001 = a_{7072}$，$10000 = b_n$，因 A 和 B 互補，故 $7072 + n = 10001 \Rightarrow n = 2929$，即 $10000 \leq 2929\beta < 10001 \Rightarrow 3.4141 < \beta < 3.4145$，$\beta$ 可確定至小數下四位，$\beta \doteqdot 3.414$，由 $\alpha = \sqrt{2} \doteqdot 1.414$，$\beta \doteqdot 3.414$，推測 $\beta = 2 + \sqrt{2}$

【定理 6】設兩數列 $\langle a_n \rangle$，$a_n = [\sqrt{2}n]$，$\langle b_n \rangle$，$b_n = [(2+\sqrt{2})n]$ 令 $A = \{a_n\}$，$B = \{b_n\}$，則集合 A 和 B 互補。

證明：只需證出所有屬於 A 的元素，均不屬於 B，反推亦成立即可，$U \in A \Leftrightarrow \frac{U}{\sqrt{2}} - [\frac{U}{\sqrt{2}}] > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ (4-2.1)

若 $U \in B$，由定理 3 $\Leftrightarrow \frac{U}{2+\sqrt{2}} - [\frac{U}{2+\sqrt{2}}] > 1 - \frac{1}{2+\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$ (4-2.2)

若 $U \notin B$，由 4-2,2 $\Leftrightarrow \frac{U}{2+\sqrt{2}} - [\frac{U}{2+\sqrt{2}}] < 1 - \frac{1}{2+\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$ (4-2.3)

其中“＝”無法成立，因若 $\frac{U}{2+\sqrt{2}} - [\frac{U}{2+\sqrt{2}}] =$

$$1 - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \Rightarrow 2+\sqrt{2} = \frac{U+1}{1+[\frac{U}{2+\sqrt{2}}]} \in Q$$

而 $\frac{U}{\sqrt{2}} + \frac{U}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}U + 2U - \sqrt{2}U}{2} = U \in N$

(4-2.4) 不合

因 $\frac{U}{\sqrt{2}}$ 和 $\frac{U}{2+\sqrt{2}}$ 的小數部份皆不爲 0，故 $\frac{U}{\sqrt{2}}$ 和 $\frac{U}{2+\sqrt{2}}$

的小數部份和1即$\left(\frac{U}{\sqrt{2}}-\left[\frac{U}{\sqrt{2}}\right]\right)+\left(\frac{U}{2+\sqrt{2}}-\right.$

$$\left.\left[\frac{U}{2+\sqrt{2}}\right]\right)=1 \qquad (4\text{-}2.5)$$

由(4-2.1)和(4-2.5)故$\frac{U}{2+\sqrt{2}}-\left[\frac{U}{2+\sqrt{2}}\right]<$

$1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow U\notin B$故集合A、B互補。

4-3 推廣至一般情形：在定義4-1.1之下，由定理1、2、6我們知$\alpha=G$，$B=G^2$和$\alpha=\sqrt{2}$，$\beta=2+\sqrt{2}$時，集合A和B互補，在定理6的證明中，我們利用4-2.4將"$U\in A$"和"$U\notin B$"銜接上，而$\frac{U}{G}+\frac{U}{G^2}=U(G-1+2-G)=U\in N$，亦有此性質，因此我們推出了定理7：

【定理7】數列$\langle a_n\rangle$，$\langle bn\rangle$，集合A、B如(4-1.1)所定義，且α、β均為無理數，$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1\Leftrightarrow$ A B互補

4-4 應用——威索夫遊戲的推廣：

由定理4我們知道威索夫遊戲的安全局為$([mG],[mG^2])$，設$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$為兩遞增數列，$A=\{a_n\}$，$B=\{b_n\}$。(4-4.1) (a_n,b_n)為安全局時，必需滿足(Ⅰ)乙方無法直接取至安全局；(Ⅱ)無論乙方如何取，甲方皆有辦法取至安全局。而當我們將取法修改為(Ⅰ)可在第一堆中取偶數個火柴(Ⅱ)可在第二堆中取偶數個火柴(Ⅲ)可在兩堆中同取相同數目的火柴。在$a_n=\sqrt{2}n$，$b_n=(2+\sqrt{2}n)$時，我們發現乙方無法從(a_n,b_n)(定義4－4.2)取至(a_m,b_m)，且乙方取完後甲方却可取至(ap,bp)，因此我們推測此時$([\sqrt{2}n],[(2+\sqrt{2})n])$為安全局，並推出何時可取至安全局。

【定理8】若威索夫遊戲中，兩人的取法改為4-4.2所示，則在$([\sqrt{2}m],[(2+\sqrt{2})m])$時為安全局，其中$m\in N$。

【定理9】在(a,b)的情況下(a,b)非安全局，$a\leq$

b，下列三種情形：(Ⅰ) 兩堆差額爲奇數；(Ⅱ)（ a ， b′) 或（ b′， a ）爲安全局，b′> b ，或 b − b′爲奇數；(Ⅲ)（ b ， a′) 或（ a′， b ）爲安全局，a′> a 或 a − a′爲奇數時。

若三者同時成立，則無法取至安全局。若有任一不成立，則必可取至安全局。在定理 9 中的三種情況必需同時成立，才無法取至安全局，而祇要有一種不成立，便可取至安全局，而在定理 8 中，我們知道只要取至安全局，對方便無法再取至安全局，且不論對方如何取，己方皆可取至安全局。同理，若取法改爲單堆規定取 3 的倍數，則其安全局 (a_n, b_n) 差爲 3_n即 $a_n = [n\alpha]$，$b_n = [(\alpha+3)n]$，$b_n - a_n = [(\alpha+3)n] - [\alpha n] = 3n$

令 $A = \{a_n\}$，$B = \{b_n\}$，集合 A 和 B 互補，故 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+3} = 1$

$\Rightarrow \alpha + \alpha + 3 = \alpha(\alpha+3) \Rightarrow \alpha_2 + \alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

推而廣之，若取法改爲取單堆時，規定爲 P 的倍數，則

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+p} = 1 \Rightarrow \alpha + \alpha + p = \alpha(\alpha+p) \Rightarrow \alpha^2 + (p-2)\alpha$$

$$-p = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-p+2+\sqrt{(p-2)^2+4p}}{2} = \frac{-p+2+\sqrt{p^2+4}}{2}$$

（其中另一根不合）

此時安全局爲 $(a_n, b_n) = ([n\alpha], [n(\alpha+p)])$

五、推廣二

5-1　推廣至一般嚴格遞增數列的互補集合：在定義 3-1.1 中集合 A 、B 互補，設兩數列 (a'_n) 及 (b'_n)，$a'_n = a_n - n$，$b'_n = b_n - n$。

我們可列出<a_n>和<b_n>的則20項：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27	29	30	32
b_n	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44	47	49	52
a'_n	0	1	1	2	3	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	11	11	12
b'_n	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27	29	30	32

$b'_1=1$，$a'_1=0$，$a'_2=1$，$\Rightarrow a'_n$中<1，n之最大值爲1

$b'_2=3$，$a'_3=1$，$a'_4=2$，$\Rightarrow a'_n$中<2，n之最大值爲3

$b'_3=4$，$a'_4=2$，$a'_5=3$，$\Rightarrow a'_n$中<3，n之最大值爲4

$b'_4=6$，$a'_6=3$，$a'_7=4$，$\Rightarrow a'_n$中<4，n之最大值爲6

$b'_5=8$，$a'_8=4$，$a'_9=5$，$\Rightarrow a'_n$中<5，n之最大值爲8

我們取$\langle a'_n\rangle$的逆數列$\langle a'^{*}_n\rangle$，可得$a'^{*}_1=1$，$a'^{*}_2=3$，$a'^{*}_3=4$，$a'^{*}_4=6$，$a'^{*}_5=8$……而和$\langle b'_n\rangle$的前五項均相同，所以我們推測$\langle a'^{*}_n\rangle=\langle b'_n\rangle$ 然而在定義4-1.1中$\alpha=\sqrt{2}$，$\beta=2+\sqrt{2}$時，我們列出$\langle a_n\rangle$和$\langle b_n$前20項：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n	1	2	4	5	7	8	9	11	12	14	15	16	18	19	21	22	24	25	26	28
b_n	3	6	10	13	17	20	23	27	30	34	37	40	44	47	51	54	58	61	64	68
a'_n	0	0	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8
b'_n	2	4	7	9	12	14	16	19	21	24	26	28	31	33	36	38	41	43	45	48

由上表可發現和前一表相同的性質：$\langle a'^{*}_n\rangle=\langle b'_n\rangle$，甚至我們任取一嚴格遞增數列$\langle a_n\rangle$，並取$\langle a_n\rangle$的互補數列$\langle b_n\rangle$，再設$\langle a'_n\rangle$, $a'_n=a_n-n$，$\langle b'_n\rangle$, $b'_n=b_n-n$，如下表便是一例：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n	1	3	5	6	8	9	12	13	14	17	21	22	25	27	28	29	30	32	36	40
b_n	2	4	7	10	11	15	16	18	19	20	23	24	26	31	33	34	35	37	38	39
a'_n	0	1	2	2	3	3	5	5	6	7	10	10	12	13	13	13	13	14	17	20
b'_n	1	2	4	6	6	7	9	10	10	10	12	12	13	17	18	18	18	19	19	19

我們亦發現$\langle a'^{*}_n\rangle=\langle b'_n\rangle$

【定理10】$\langle a_n\rangle$，$\langle b_n\rangle$爲兩嚴格遞增數列，設$\langle a'_n\rangle$，$\langle b'_n\rangle$，$a'_n=a_n-n$，$b'_n=b_n-n$，$A=\{a_n\}$，$B=\{b_n\}$，則集合A、B互補$\Leftrightarrow\langle a'^{*}_n\rangle=$

$=<b'_n>$所以我們祗要知道一嚴格遞增數列$<a_n>$，欲知其互補的數列，只需取另一數列$<a'_n>$，$a'_n=a_n-n$，可得$<a'^*_n>$，並令$<b_n>$，$b_n=<a'^*_n>+n$，則此時由兩數列構成的兩個集合必互補，此有助於求互補數列的一般項，以下舉出一實例作爲應用。

5-2 應用——非完全平方數的數列一般項表示法：

在定義4-4.1中，設$a_n=n^2$，而$<a_n>$和$<b_n>$兩數列分別構成之集合互補，我們想求出$<b_n>$的一般項用n表示之。

設$<a'_n>$，$<b'_n>$，$a'_n=a_n-n$，$b'_n=b_n-n$，我們可列出$<a_n>$、$<a'_n>$及$<b_n>$的前15項：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
a'_n	0	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132	156	182	210
b_n	2	3	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15	17	18	19

因$<a_n>$和$<b_n>$互補，由定理10，故$<a'^*_n>=<b'_n>$，$a'_n=n^2-n$，$b_n=b'_n+n=a'^*_n+n$。$a'^*_n=$($a'm$中$<n$，m之最大値)＝($m^2-m<n$，m之最大値)，由$m^2-m<n$。

$\Rightarrow m^2-m+\frac{1}{4}<n$（因m, n皆爲自然數）$\Rightarrow (m+\frac{1}{2})^2<n$

$\Rightarrow m<\sqrt{n}+\frac{1}{2}$，即m的最大値爲$[\sqrt{n}+\frac{1}{2}]$，即$a'^*_n=[\sqrt{n}+\frac{1}{2}]$

$\Rightarrow b_n=a'^*_n+n=n+[\sqrt{n}+\frac{1}{2}]$，故$a_n=n^2$時，$b_n=n+[\sqrt{n}+\frac{1}{2}]$

亦即b_n爲n值再加上$\sqrt{n}$的四捨五入至整數位之值。

六、結　　論

在推廣一中，由定理7所述：設兩數列$<a_n>$ $a_n=[n\alpha]$，$<b_n>$，$b_n=[n\beta]$，令$A=\{a_n\}$，$B=\{b_n\}$，若$0<\alpha<\beta$，α、β爲無理數，且$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$，則集合A和B互補。當$\alpha=G$，$\beta=G^2$時

，集合A和B互補，表示$A \cap B = \phi$，$A \cup B = N$，也就是定理1及定理2所敍述的。當$\alpha = \sqrt{2}$，$\beta = 2+\sqrt{2}$時，集合A、B亦互補，亦即定理6所敍述。所以我們可以任取一正無理數P，若$0 < P < 1$時，令$\alpha = 1+P$，$\beta = 1+\frac{1}{P}$，則$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = 1$，符合定理7所敍述，故此時集合A、B互補。而若$P > 1$時，令$\alpha = 1+\frac{1}{P}$ $\beta = 1+P$，亦可符合定理7所述，故此時集合A和B亦互補。

我們更改變威索夫遊戲的取法，致爲取單堆時，必取偶數，而我們找到的另一組互補集合：$A = \{a_n\}$，$B = \{b_n\}$，其中$a_n = [\sqrt{2}\, n]$，$b_n = [(2+\sqrt{2})\, n]$的(a_n, b_n)就是此時的安全局，而遊戲更能推廣至取單堆時，爲P的倍數，此時安全局爲$([\alpha n], [(\alpha+P)n])$，其中$\alpha = \frac{-P+2+\sqrt{P^2+4}}{2}$，在推廣二中，以$a_n = [n\alpha]$，$b_n = [n\beta]$之型式去討論互補，更廣泛地研究一般嚴格遞增數列形成的互補集合之間的性質，並由此求得非完全平方數列一般項。

七、參考資料

㈠如何利用黃金分割取勝　1988年高屛澎三縣科展數學科，作者：許秉凱

㈡數學及數學家的故事　1984年　作者：曹蘭英　六藝出版社

㈢代數學發展史　1987年　作者：王懷權　協進圖書公司

㈣數學中的智巧　1987年　作者：R.亨斯貝爾格 凡異出版社

㈤高雄區教學研習班課程資料 1988年中山大學應用數學研究所主辦

內　容	參考書目
威索夫遊戲	㈠㈡ P. 85，㈣ P. 101 ～ 102，㈤
2-2.1 ～ 2-2.3	㈢ P. 81
定理1，2	㈠㈤
定理3，4	㈠
定理7，10	㈣ P. 93 ～ 96
5-2 應用	㈣ P. 97 ～ 98

評　語

㈠本作品係繼續作者去年的科展作品，將威索夫遊戲和互補數列有關

的定理繼續作了探討。
(二)作品的呈現嚴謹，層次井然。
(三)作者的研究態度正確認眞。