共振之研究

高中組物理科第三名

臺灣省立板橋高級中學　　作　　者：周榮華、李建邦
林子堯、秦宇康
指導教師：陳天益

一、研究動機

在自然界中，共振的現象幾乎是無所不包，無所不至，不僅涵蓋了物理界以及化學界，也遍及於我們日常生活當中，其重要性自不待言。所謂「桃李不言，下自成蹊」，「共振」猶如桃李之甜美，激發了作者研究的決心。

二、研究目的

試著從共振現象中，找出其一般的通性，並予以定義，使得共振能應用到廣泛的科學領域。

三、研究器材設備

1.示波器　2.音頻發生器　3.麥克風　4.螺線管　5.電容　6.電阻　7.三用電表　8.麪包板

四、研究過程或方法

(一) 1.電感L的值是以馬克士威電橋的方法來測定；而電容值在元件上有標示，故不必測定。
2.選定一組L、R、C元件，慢慢由小而大改變信號發生器的頻率，測量R兩端電壓，作電壓一頻率圖。
3.將示波器接線到電路上，以利薩如圖形求其共振頻率。
4.將所測得的 f_r 與電路系統的自然頻率相比較。

5.再取別組R、L、C重覆上述實驗。

6.將L、C兩元件並聯，重覆上述步驟。

(二) 1.測量每一個彈簧的彈性係數K值。

2.選取砝碼掛於彈簧下，用手將砝碼往下移動一段距離後放手。

3.改變砝碼的質量，重覆2.步驟，直到彈簧出現左右擺動爲止。

4.測量振動周期以及擺動周期。

5.改變彈性係數K值，重覆上述步驟。

五、實驗結果

(一)利用馬克士威電橋測定電感值。

R_2 (Ω)	R_3 (Ω)	L（亨利）	R_2 (Ω)	R_3 (Ω)	L（亨利）
23	1520	0.00349	31	1205	0.003735
21	1620	0.00340	23	1625	0.003737
23	1520	0.00349	23	1630	0.003749
26	1480	0.003406	25	1500	0.00375
28	1310	0.003402	24	1500	0.0036
30	1215	0.003405	24	1550	0.00372
總 平 均		0.003404	總 平 均		0.00373

(二)共振頻率之測定

R_L：電感內電阻值爲 2 Ω　L：0.003404 亨利

利薩如之 f_r	C（法拉）	自然頻率 f_n	利薩如之串聯 f_r
8805	0.1	8626	8702
6290	0.2	6099	6198
5106	0.3	4980	5105
2854	1.0	2728	2805
2107	2.0	1929	2090

(三)彈簧擺之共振結果

T表振動周期，T′表擺動周期

質量（g）	K dyne/cm	T（測量值）	T′(測量值)	T′/T
600	6.1895×10^4	6.34×10^{-1}	1.420	2.24
700	6.2364×10^4	6.86×10^{-1}	1.485	2.16
800	6.0308×10^4	7.38×10^{-1}	1.512	2.06
900	6.000×10^4	7.81×10^{-1}	1.64	2.10

六、討　　論

(一)從巴東擺中可看出：無阻尼時 $f_{外} = f_n$，則系統將一直從外界吸收能量而致使振幅變大，此乃共振的標準形式；若無阻尼時，$f_{外} \cong f_n$ 時，系統將呈現近似共振的現象，由電腦模擬圖可看出：起初系統吸收能量，但由於頻率配合不當，使得外界作負功，系統振幅便降低，就如此反覆不已。而最值得外仔細研究的乃是含有阻尼的施力振盪。由模擬圖可知：當 $f_{外} = f_n$ 時，系統振幅（或能量）並不是最大的，而是在小於 f_n之處，但隨著阻尼的減小，發生最大振幅的頻率便趨近於 f_n。若是在系統的振幅（或能量）響應爲最大時謂之共振，那麼 $f_{外} \neq f_n$ 時也可能發生共振，所以重要的是系統的整體表現，而非侷限在某一特定頻率。

(二)我們必須知道：當 $\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = F_0 \cos \omega t$ 所表示的系統受到一阻尼作用時，受作用者在經過一段時間後所表示出的位移一時間式爲：$y_p(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$

然後我們再對此受迫的系統導出A，振幅大小平方：$Y^2 = A^2 + B^2$，消耗功率P，以及元件之儲藏能量E。得結果如下：

共振量① $\dfrac{A(\omega)}{A(\omega_0)} = \dfrac{r^2\omega_0\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + r^2\omega^2}$

共振量② $\dfrac{|Y(\omega)|^2}{|Y(\omega_0)|^2} = \dfrac{r^2\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + r^2\omega^2}$

共振量③ $\dfrac{P(\omega)}{P(\omega_0)}=\dfrac{r^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+r^2\omega^2}$

共振量④ $\dfrac{E(\omega)}{E(\omega_0)}=\dfrac{\frac{1}{2}r^2(\omega^2+\omega_0^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+r^2\omega^2}$

其中 r 定義爲單位慣性質量之阻尼。

我們如果欲尋求一共振方程式，則必須對上面四式仔細分析。上面四式皆有相同的分母，姑且稱它爲共振分母。

$D=(\omega_0^2-\omega^2)^2+r^2\omega^2=(\omega_0-\omega)^2(\omega_0+\omega)^2+r^2\omega^2$，當 ω 接近 ω_0 時，D 隨 ω 做快速的變化。

爲了統合四大共振式，我們必須把共振的發生限制在弱阻尼的情形，而且外加輸入函數之頻率必須於 $\omega_0\pm10$ r 之間，那麼在 ω 接近 ω_0 時，我們可以近似地把所有的 ω 以 ω_0 代替，再令四大共振式的 $\omega=\omega_0$，如此一來我們便可使四式合而爲一，也就是使四式在 $\omega=\omega_0$ 時皆有相同比值的極值反應。

$$\frac{A(\omega)}{A(\omega_0)}=\frac{|Y(\omega)|^2}{|Y(\omega_0)|^2}=\frac{P(\omega)}{P(\omega_0)}=\frac{E(\omega)}{E(\omega_0)}=\frac{(\frac{1}{2}r)^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\frac{1}{2}r)^2}$$
$$\equiv P(\omega)$$

但是如此的共振方程式是十分狹隘的，我們把它稱爲狹義共振方程。因爲實際現象或多或少都存在不可忽視的阻尼。所以不得不加以考慮。

可是若着眼於功率項③時，將會有令人驚喜的發現，因爲不論是在力學上阻尼所消耗的功率，或是聲學上的阻抗以及電磁學上的電阻所消耗的功率，都將在外加輸入函數頻率等於系統自然振盪頻時達到一最大值，我們可說 $\omega=\omega_0$ 時產生了共振。但平常功率的消耗是無法看見的，反而是那些位移、振幅等等是一般可見的，倘若我們偏袒了功率部分，那麼就顯得有些顧此失彼了。所以我們定義——廣義的共振，如結論②。

七、結　　論

(一)〔狹義的共振〕定義爲：外加輸入函數的頻率等於系統自然頻率時

，謂之共振。

(二)〔廣義的共振〕定義爲：使系統內某一組成次系產生極值反應時，謂之共振。

八、參考資料

(一)大學物理學：曉園出版社。

(二)高等微積分。

(三)電路學：三民書局。

評　　語

本作品針對力學系統及電磁系統的共振現象，作相當詳盡的探討，充分顯示作者對微積分、電腦以及電子學知識的熟諗，對高三學生而言，誠屬難能可貴。惟本作品內容無不涵蓋於大學一、二年級物理課程範疇內，作者只是重覆已知的結果而已。本作品缺乏原創內容，是最大缺點。