

投射與圖形的變化

高小組數學科第二名

台北縣中和市興南國小

作 者：沈芳如、許婷婷

陳忻媛、郭昌妮

指導教師：張政義、吳金標

一、研究動機

有一次，我們看到陽光照射在走廊圍牆時，發現圍牆的圓洞，隨陽光變換而有不同（圓的變成扁的），難道形狀和陽光有關嗎？它的影響是怎樣呢？我們結合圖形與比例的關係，動手做做看有那些變化。

二、研究目的

- (一)想要了解形狀大小的變化。
- (二)認知形狀、角度與比例的關係。

三、研究設備器材

卡紙、鉛筆、木板、燈泡、電池、牙籤、方格紙、保麗龍板、尺。

四、研究過程或方法

- (一)物體有一定的形狀嗎？

實驗 1：方法(1)收集各種不同的罐子，加以編號為①～⑯。

- (2)把罐子放在距牆 10 公分，距手電筒前 30 公分。
- (3)勺直射及斜射，並記錄觀察如下：

形 狀														
直 射														
高(公分)	15	13	11	7	13.5	20	17.5	13	11	10	9	10	12	5.5
斜 射														
高(公分)	12	9	7	3.5	10	16	13.5	7	7	5.5	5	5.5	7	1
圖形變化 有○無×	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

結果各物體經投射後有平面形狀出現；斜射形狀變小。

實驗 2：方法(1)將寬 45 公分，長 90 公分木板，切割成①～⑩
形狀。

(2)距牆 10 公分置木板，40 公分置手電筒。

(3) 勿直射勿斜射，觀察記錄圖形如下：

編 號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
直 射 後 形										
斜 射 後 形										
形狀改變	直	斜	直	斜	直	斜	直	斜	直	斜
有○無×	×	×	×	×	○	×	○	×	×	○

結果直射後形狀不改，斜射會因角度改變大小。

(二)點線面會對應嗎？

實驗 3：方法(1)製作測影儀（如圖）

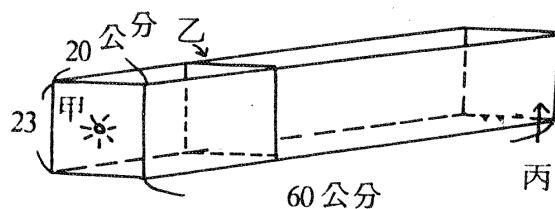
(2)以圓規在卡紙點上ㄅ・ㄉ・ㄇ・ㄤ・ㄦ・ㄔ・ㄕ・ㄔ・ㄕ

(3) 卡紙放在測影儀（光距卡 10 公分，卡距影幕 30 公分，觀察並記錄如下：

(如圖) 測影儀

記錄：甲：光，乙：卡，丙：影像。

形 狀	•
對 應	!	!!	!!	!!	!!	!!
形狀改變 有√無×	×	×	×	×	×	×



結果圖形擴大，形狀不改。

實驗 4：方法(1)同測影儀，將卡切割成編號①～⑥號圖形。

(2) 將卡放在測影儀中（如實驗 3 方法(3)）記錄如下

形 狀				—	—	—
對 應				—	—	—
形狀改變 有√無×	×	×	×	×	×	×

結果圖形擴大，形狀不改變。

方法(1)同實驗 3 儀器，並以鐵絲摺成①～⑤形狀。

(2)將鐵絲放在測影儀，距離同上實驗，觀察並記錄

形 狀	+	*	+	+	*
對 應	+	*	+	+	*
形狀改變 有√無×	×	×	×	×	×

結果不規則線形，形狀不改變；只是形狀擴大。

實驗 5：方法(1)同測影儀，以卡切割成編號①～⑩形狀。

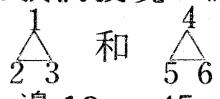
(2)將卡放在測影儀中。(卡片光源距離同實驗 3)

(3)觀察並記錄如下：

形 狀	△	□	△	○	○	○	○	○	○	○
投 射 後 狀	△	□	△	○	○	○	○	○	○	○
有無對應 有√無×	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√
形狀改變 ○ ●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

結果(1)規則和不規則圓形，形狀不改變。圖形會擴大。

(2)我們發現，點一點，邊一邊的對應關係如圖形：

和  點 $1 - 4$ ，點 $2 - 5$ ，點 $3 - 6$ ，
邊 $12 - 45$ ，邊 $23 - 56$ ，邊 $13 - 46$ 等。

(三)圖形的形狀大小有一定關係嗎？

實驗 6：方法(1)同測影儀，將卡切割成邊或直徑 2 公分的①△②□③○。

(2)甲光源乙卡片丙影幕，固定甲丙(距40公分)，
移動乙(10公分1單位)從甲、乙距10公分開始記錄

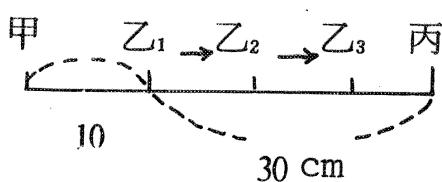
結 形 狀 卡 距光距離	正 方 形			三 角 形			圓 形		
	原邊長	投影後平均邊長	為原邊長倍數	原邊長	投影後平均邊長	為原邊長倍數	原邊長	投影後平均邊長	為原邊長倍數
10	2	8	4	2	8	4	2	8	4
20	2	4	2	2	4	2	2	4	2
30	2	2.7	1.35	2	2.7	1.35	2	2.7	1.35
形狀改變 有√無×	×			×			×		

結果(1)乙距甲愈近圖形愈大

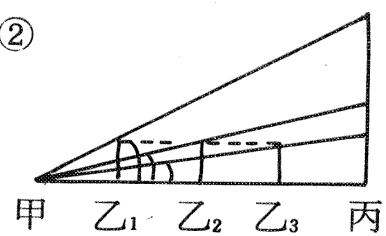
(2)可歸納一個計算方法：甲、乙間距：甲丙間距 =
乙(原邊長)：丙(投影邊長)

(3)圖形以正比方式擴大，如①②：

①



②



實驗 7：方法(1)同測影儀，固定乙、丙(間距10公分)，移動甲(10公分1單位)，從甲丙40公分處開始。

(2)觀察並記錄

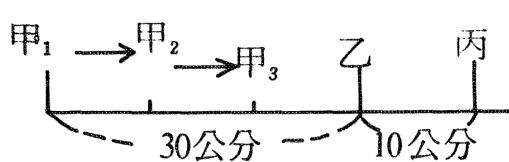
結 形 狀 果 光 距光距離	正 方 形			三 角 形			圓 形		
	原邊長	投影後平 均 邊長	爲原邊 長倍數	原邊長	投影後平 均 邊長	爲原邊 長倍數	原邊長	投影後平 均 邊長	爲原邊 長倍數
10	2	4	2	2	4	2	2	4	2
20	2	3	1.5	2	3	1.5	2	3	1.5
30	2	2.7	1.35	2	2.7	1.35	2	2.7	1.35
形狀改變 有√無×	×			×			×		

結果(1)甲距乙愈近，圖形愈大。

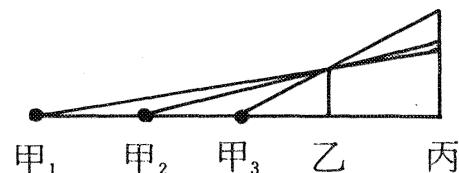
(2)可歸納一個方法：甲乙間距：甲丙間距 = 乙 (邊長)：丙 (投影後邊長)。

(3)仍以正比方式變大小如①②：

①



②



實驗 8：方法(1)同測影儀，固定甲乙 (間距 10 公分)，甲丙距 40 公分，移動丙 (10 公分 1 單位)

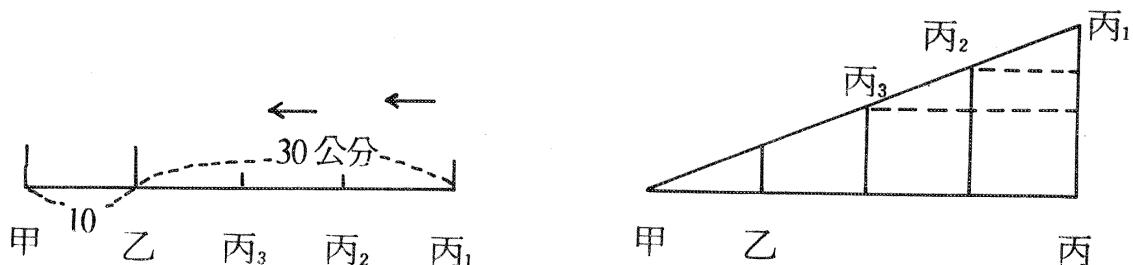
(2)觀察記錄如下：

結 形 狀 果 影 距光距離	正 方 形			三 角 形			圓 形		
	原邊長	投影後平 均 邊長	爲原邊 長倍數	原邊長	投影後平 均 邊長	爲原邊 長倍數	原邊長	投影後平 均 邊長	爲原邊 長倍數
10	2	4	2	2	4	2	2	4	2
20	2	6	3	2	6	3	2	6	3
30	2	8	4	2	8	4	2	8	4
形狀改變 有√無×	×			×			×		

結果(1)丙距乙愈遠，圖形愈大，距乙愈近，圖形較小。

(2)可歸納一個方法：甲乙間距：甲丙間距 = 乙(原邊長)：丙(投影後邊長)

(3)仍以正比方式變大小，如①②



(四)角度轉換對圖形有影響嗎？

實驗9：方法(1)製作卡片角度為 $15^\circ \sim 90^\circ$ （每 15° 增加）

(2)利用測影儀，將卡放入（光距影幕40公分）移動卡片（每10公分1單位）觀察並記錄。

角 度 改 變 有 ○ 無 ×	15°	30°	45°	60°	75°	90°
距光距離 10	A	A	A	A	A	A
20	A	A	A	A	A	A
30	A	A	A	A	A	A

結果：角度沒有改變，圖形會因距離而改變大小。

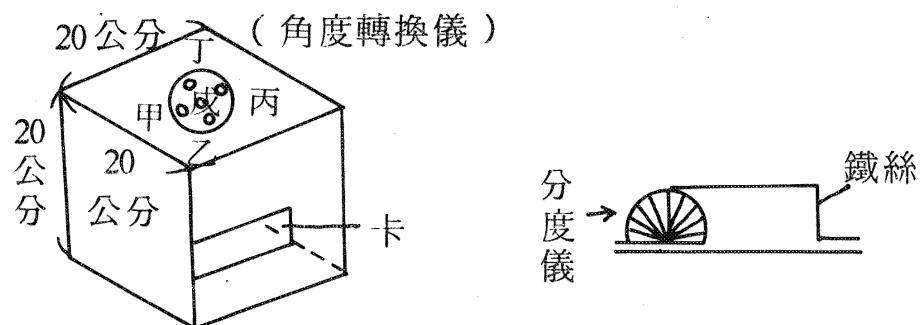
實驗10：方法(1)利用長、寬、高各20公分木板製成角度轉換儀（

內置分度儀、鐵絲）（如圖）

(2)保麗龍（長寬各20公分）上取五個方位（甲、乙、丙、丁、戊）置燈泡各乙個放在儀器上。

(3)以卡紙切割成邊長2公分的①圓②正三角形③正四邊形。

(4)將儀器內置分度儀，將卡放入儀器中，觀察變化



結果 角 度 位 置 置	15°				30°				45°
	甲丙	乙	丁	戊	甲丙	乙	丁	戊	甲丙
△	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽	×
□	□	□	□	□	□	□	□	□	△△
○	⊕	⊕	⊕	⊕	○	⊕	⊕	⊕	○

45°			60°				75°		
乙	丁	戊	甲丙	乙	丁	戊	甲丙	丁	戊
▽	▽	▽	×	▽	▽	▽	×	▽	▽
□	□	□	△△	□	□	□	△△	□	□
⊕	⊕	⊕	○	⊕	⊕	⊕	○	⊕	⊕

結果(1)圖形隨位置變換而變化如圓形變橢圓等。

(2)圖形近 90° 變化較大，角度愈小變化較少。

實驗11：方法(1)利用角度轉換儀，製作卡片切割為邊長4公分的

①正方形②三角形③圓形。

(2)將卡放入角度轉換儀上，觀察變化並記錄。

位 置	甲	乙	丙	丁	戊
正 方 形					
三 角 形					
圓 形					
形狀改變 有√無×	×	×	×	×	×

結果位置不同，形狀却一樣，只隨位置轉變移動位置。

(五)立體圖形可以看出點、邊嗎？

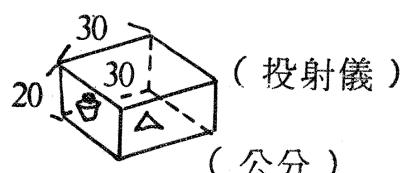
實驗12：方法(1)製作投射儀(如

右圖)

(2)以牙籤製作①～
⑥形狀。

(3)放入投射儀中投
射，觀察記錄。

結果(1)圖形經投射後成平面。



(2) 都能由投射看出它們的頂點、線和構成的面。

編號	①	②	③	④	⑤	⑥
投射後圖形						
點線計算可否	√	√	√	√	√	√

五、討論

(一) 我們用投射觀察圖形的變化，如果是立體的，我們覺得至少須三個方向投射，才能看清物體，否則易生錯誤的判斷。

(二) 圖形和角度，似乎還有三度空間的奧妙變化，比較抽象，但不易觀察，缺少這部分的深入研究，我們覺得可惜。

(三) 日常生活中，可以運用研究所得的比例，計算高度的大小。

(四) 利用投射方法，可以看出立體形狀的點、線，然而必須移動模型，投射才能更清楚，要怎樣去做，才更清晰，須再嚐試。

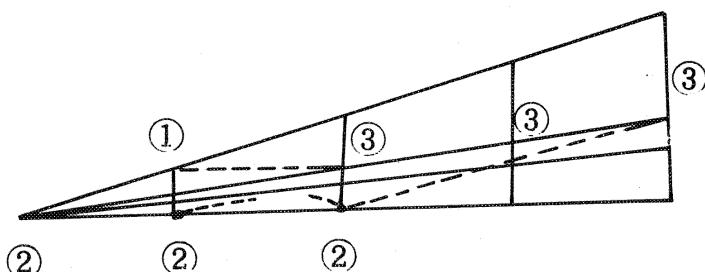
六、結論

(一) 物體形狀投射後，形狀沒有改變，只是大小改變。

(二) 點、線、面實驗結果後，形狀沒有變化，只有點與點、線與線等形成對應的關係。

(三) 形狀的大小會成一定比例，可以用這個方法去計算，如：卡片距光源單位：光源距影像單位二卡片（原邊長）：投射後邊長

- (1) 實驗六
- (2) 實驗七
- (3) 實體八



(四) 角度不同，形狀也隨著改變，如圓形變橢圓（角度近直角變化較大）

(五) 立體形狀，可以利用投射作用，看出它們的頂點和邊。

七、參考資料

(一)什麼是圖形	李正宏編著	建興書局 75. 12
(二)數學課文	(五、六年級)	國立編譯館
(三)從 1 到 2	作者：呂冠穎等	全國科展作品
(四)數的世界	薛維格譯	國校教師研習會 65. 6
(五)簡明數學百科全書	陳碧真編著	九章出版社 68. 3

評 語

- (一)由操作中，瞭解點投影對平面上由直線組成的圖形，保持直線相交關係不變。
- (二)在操作中會控制變因。
- (三)操作純熟。
- (四)教師指導適切。
- (五)學生學到了立體和圖形的概念。