

不可思議的數學——位相學基本概念的探討

高小組數學科第一名

台中市國光國民小學

作者：盧建智等六人

指導教師：王秀英、沈完

一、研究動機

國立自然科學博物館，是我們假日常去的地方。科學中心四樓右方「位相學」展示臺有九套鐵環與繩索的設置，每一套都令我們百思莫解，於是邀集六位志同道合的好友，了解中高年級破解情形。我們設計問卷，實施調查，統計結果後發現：九套都不會解的比率高達 41%，所有同學都沒有發現規則性，但有 82% 以上的同學有研究興趣。因此我們立下決心。聯手研究破解及恢復方法，進而探討「位相學」。

表一 問卷調查統計表

調查項目	四年級 (362人)		五年級 (379人)		六年級 (420人)		合計 (1,161人)	
	人數	百分率 (%)	人數	百分率 (%)	人數	百分率 (%)	人數	百分率 (%)
去過自然科學博物館者	179	49.45	207	54.62	246	58.57	632	54.44
玩過位相學遊戲者	78	43.58	83	40.10	78	31.71	239	37.82
能破解 5 個者	2	2.56	1	1.20	0	0	3	1.26
能破解 4 個者	2	2.56	4	4.82	2	2.56	8	3.35
能破解 3 個者	19	24.36	15	18.07	14	17.95	48	20.08
能破解 2 個者	16	20.51	11	13.25	15	19.23	42	17.57
能破解 1 個者	9	11.54	17	20.48	11	14.10	37	15.48
都不能破解者	27	34.62	35	42.17	36	46.15	98	41.00
發現規則性者	0	0	0	0	0	0	0	0
感興趣者	67	85.90	67	80.72	63	80.77	197	82.43
無興趣者	11	14.10	16	19.28	15	19.23	42	17.57

二、研究目的

- (一)能破解及恢復九套位相學教具。
- (二)探討「位相學」的含意。
- (三)設計及製作位相學教具。
- (四)運用「位相學」教具於日常生活中。

三、研究器材

- 1.「金蟬脫殼」等九套位相學教具模型（自製）。
- 2.鐵絲、曼波繩、童軍繩、木板、保麗隆等。

四、研究過程

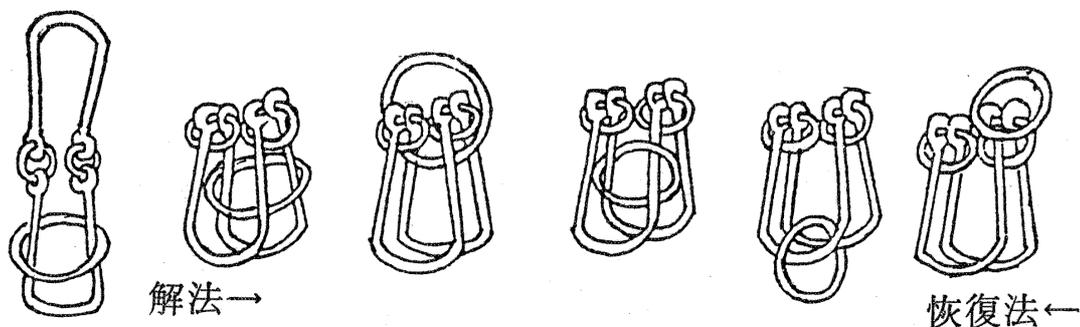
(一)尋找資料，請教師長

到省立台中圖書館、台中縣、市文化中心及自然科學博物館，發現科學中心展示說明書（國立自然科學博物館）等有相關資料。經探討，對“同胚”等概念不甚了解，再度前往科博館參觀劉老師的“位相學演示”。回來後長時間研究與操作，發現當環繞數為零時即可解開（參看表二）。

(二)探討位相學教具的破解、恢復方法及規則性。

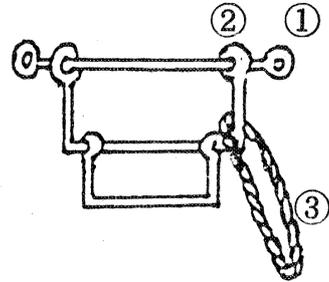
1.金蟬脫殼

蟬身和蟬翼彼此是獨立個體，用“同胚”看：兩者被擠壓變形，顯然環繞數為零。幾經摸索，獲得下面圖解：



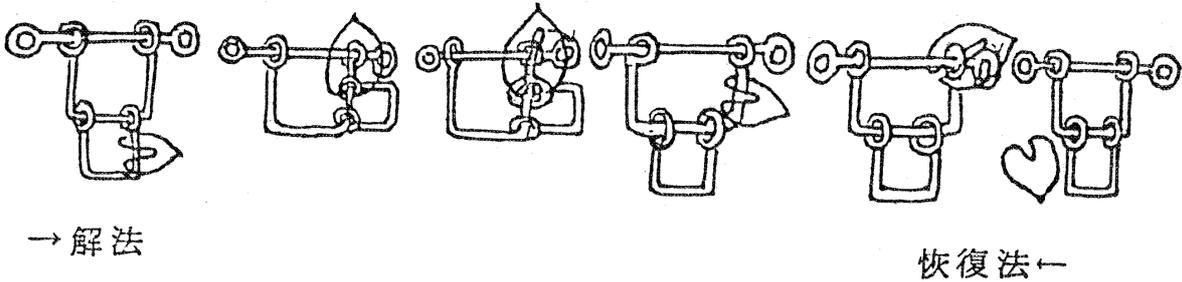
2. 玉連環

以同胚觀點，「玉連環」的原理就如“位相學演示”中「警察捉小偷」的變形。①象徵小偷的手；②象徵小偷的手銬；③象徵警察及其手銬和鐵鍊。手銬和手之間有一條“出路”而形成環繞數為零的狀況。第二層只是拳頭改變，但解法相同，以此類推，即可解完五層。



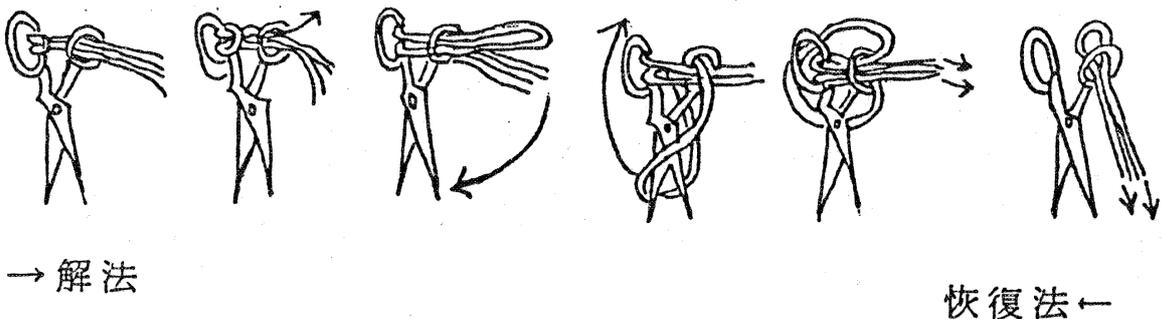
3. 開心遊戲

以同胚觀點，「開心遊戲」和「玉連環」是相同的，只是繩索改變為心形鐵環，並減少三層。參考圖解：



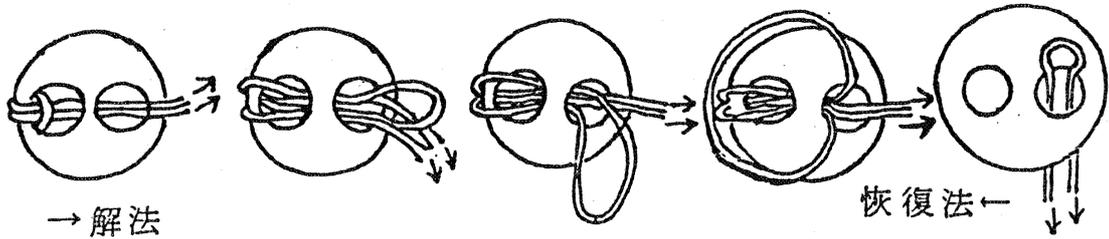
4. 捆仙繩

繩子與剪刀沒有緊密結合，製造環繞數為零後即可。參考：



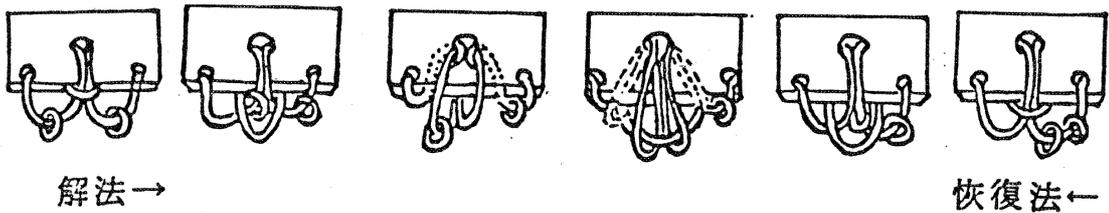
5. 脫繩困

和「捆仙繩」同胚，解及恢復同。參考圖解：



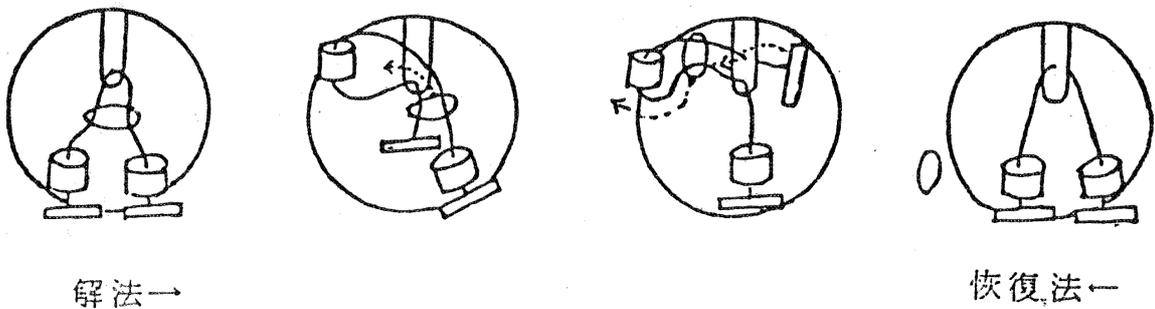
6. 神仙擺渡

摸索很久，同胚及環繞數觀念，仍無法理解。經討論及請教老師，須再加“相對運動”觀念才可解。參考圖解：



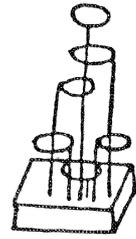
7. 仙人開鎖

結構限制是  形無法通過 U 形， 形無法通過  形，而  可以通過 U 形。以同胚觀點判斷出解的存在。參考圖解如下：



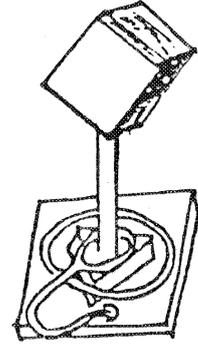
8. 玉女穿梭

表面看像「玉連環」，但始終解不開，研究許久，班長盧建智終於解開了。他說，要到達最後一格必須分二路“前進”，才進得去，再反方向便能解開。大家試了試，又發現從那一邊都可以解，便將解法畫在研究筆記上。



9. 移花接木

其解法是「玉連環」的第一層解法，只是“拳頭”（環）變成大正方體，及將扣在“拳頭”上的鐵環變成繩子而已。因此破解及恢復都最容易。



(三)分析、歸納原理及規則，並獲致位相學基本概念。

1. 九套教具破解及恢復後發現：

- (1)「搥仙繩」和「脫繩困」結構相同，解及恢復法完全相同。
- (2)「玉連環」、「開心遊戲」、「玉女穿梭」及「移花接木」破解和恢復法相仿，結構類似。
- (3)「神仙擺渡」以位相學觀點判斷外，解法上須加入簡單的“相對運動”觀念，由此似看出，位相學和其他自然理論可互相結合，此有待往後再深入探討。

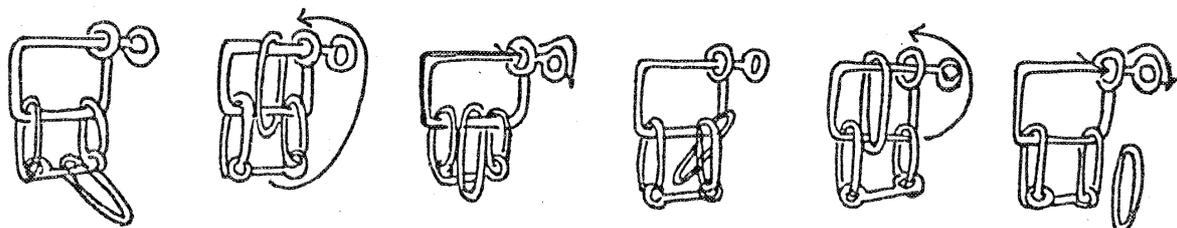
2. 九套教具看似錯綜複雜，但所用閉曲線（鐵環、繩索）並不相交，因此存在分離的路線；此正好可用位相學的基本概念——迴數（環繞數）的直觀定義，求判斷解的存在。

表二 環繞數直觀定義

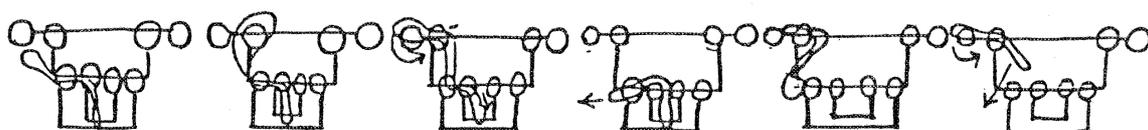
環繞數	0	1	2	4	0
曲線 曲面 關係圖					

(四)運用原理及概念，設計位相學教具，並應用在日常生活中。

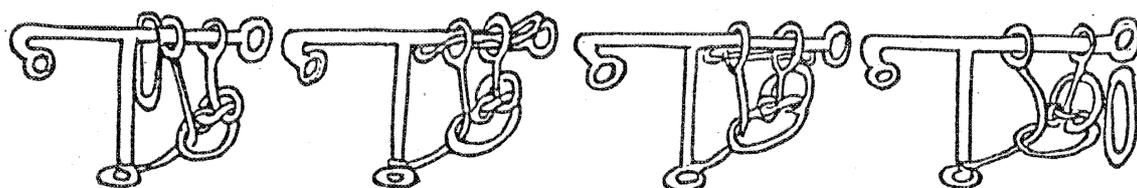
1.設計



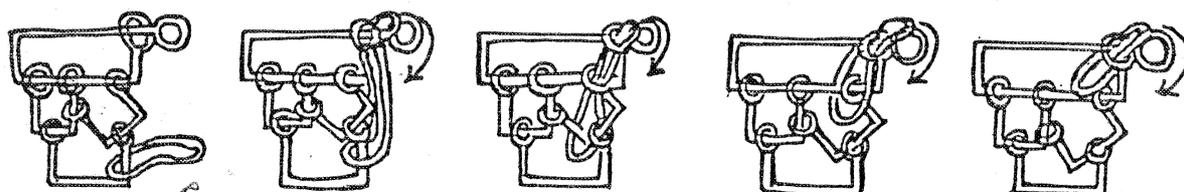
解法→ 穿梭精靈（黃婉菁設計、命名） 恢復法←



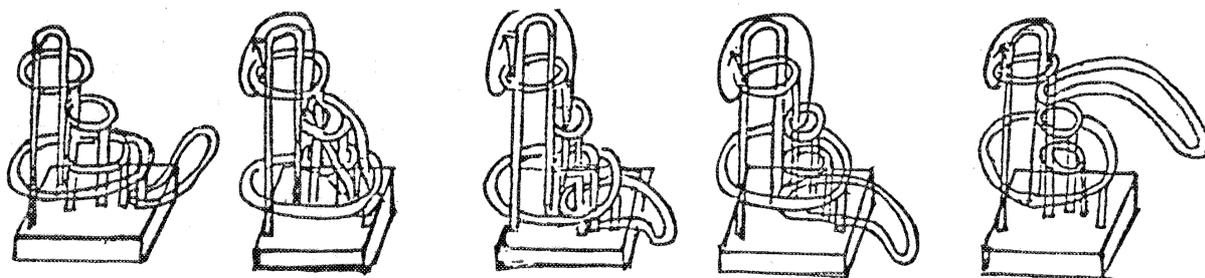
解法→ 死裡逃生（廖惇孟設計、命名） 恢復法←



解法→ 槓桿躍門（盧建智設計、命名） 恢復法←



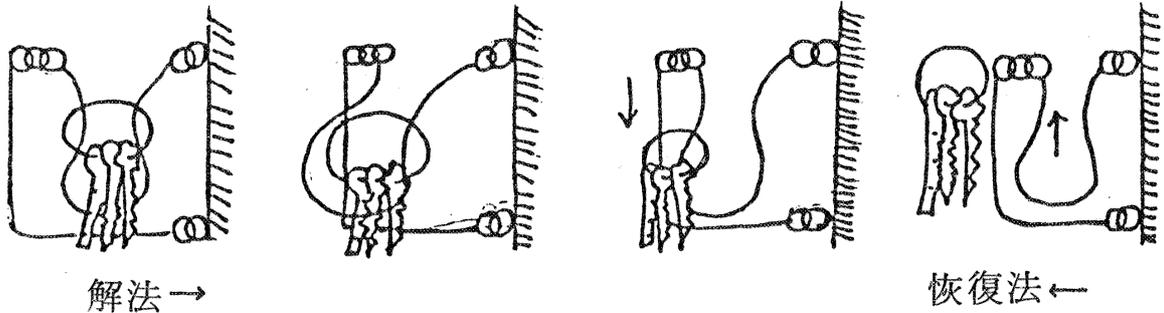
解法→ 猛龍過江（掌慶維設計、命名） 恢復法←



解法→ 峰迴路轉（掌慶維設計、命名） 恢復法←

2. 應用

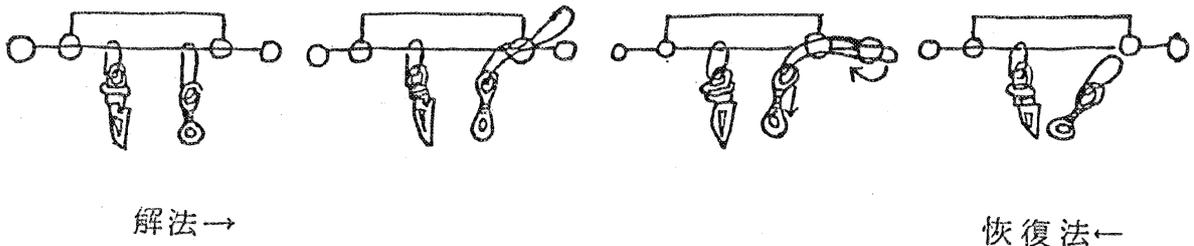
- (1) 普通釘子或掛鉤有危險性，以「金蟬脫殼」可掛多種物品，只要有圓環即可；用「金蟬脫殼」解法即可輕易取出。



安全掛鉤（盧建智設計、命名）

- (2) 剪刀是日常用品，但具危險性，收入抽屜尋找不易，用「捆仙繩」方法懸掛，不但明顯，幼兒也不會拿取，大人則取用方便。

- (3) 菜刀放置木槽或流理台上，常因規格不同，重心不穩、架子發黴等情形及孩童拿取的危險性，而不知所措。現在，以第一層「玉連環」倒掛（如圖一）可懸掛多種用具，也降低危險性。



簡易掛架（廖惇孟設計、命名）

五、結 論

- (一) 國立自然科學博物館的設立，提供我們廣博的科學知識精華，引領青年學生探求科學奧妙的領域，更是假日最佳去處。
- (二) 以「環繞數」的直觀定義可判斷任何教具“解”的存在性。在破

解過程中，盡量使閉曲線間環繞數達於零，如此即可分離；而製造環繞數為零的方法很多，亦即同一情況，並非只有一個解；希望借此拋磚引玉，提高大家研究的興趣。

(三)位相學是一門幾何學，主要在探討各種幾何形體的內在性質。和我們所學的數學不大同，但是並沒有推翻過去的數學，只是擴充理論，而我們的解法也只是在常態中做變化，並沒有破壞或違反常態。

(四)運用位相學教具，可使生活更舒適、安全、方便，值得大家繼續研究。

(五)操作位相學教具既新鮮又有趣，使我們思考靈活，更讓我們有成就感。

六、我們的建議

位相幾何學可培養思考力和創造力，使我們突破過去平面幾何的“看法”，實為良好的益智器材。因此我們建議：各校普遍設置位相學“遊樂設施”，達到潛移默化、寓教於樂的效果；並經常舉辦操作及創作競賽，以期開擴更高、更廣的數學領域。

七、參考資料

(一)拓撲學的基本概念 W. G. CHINN、N. E. STEENROD 原著 賴建業編譯 中央書局 63年6月再版

(二)神秘有趣的數學 孫文先編譯 九章出版社 73年5月初版

(三)數學魔術館 沈永嘉譯 大夏出版社 75年9月初版

(四)位相學與中國童玩 劉宗賢

(五)益智童玩專輯 李孫敏、蔡文合編

評語

(一)學生掌握九連環等益智玩具之設計的原理，並進而能夠設計新玩具。

(二)瞭解位相學的基本的變形的直覺想法對國小程度而言是很好的。

(三)視覺上的空間感很強。