

「切」的世界真奇妙

初小組數學科第三名

台北市民權國民小學

作者：王宣斯、張鈞
陳彥廷

指導教師：王淑真、林志忠

一、研究動機

有一次上美勞課時，要把色紙分成五等分，起先並沒有去測量它，就拿剪刀大約的剪下去，剪完後一比較，才發現每塊都不一樣大，「哎！真慘！白白浪費了一張色紙。」因此引起我和同學研究等分圖形的興趣，並且擴大範圍，研究一切有關切割的問題，還請老師從旁指導。

二、研究過程

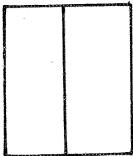
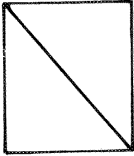
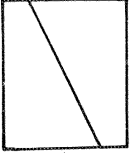
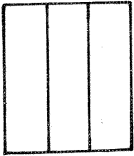
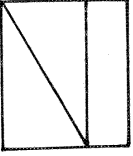
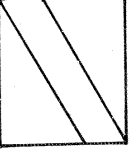
(一)我們怎樣等分圖形

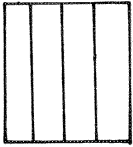
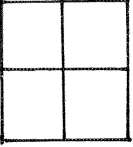
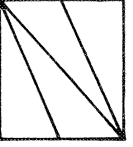
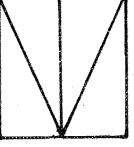
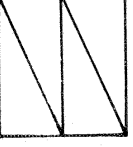
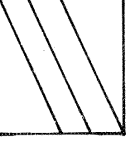
我們先確定所謂的等分是面積等分的原則

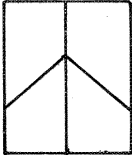
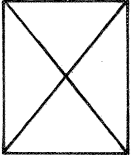
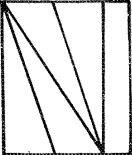
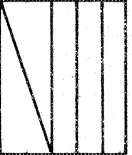
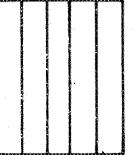
步驟 1. 我們怎樣等分正方形

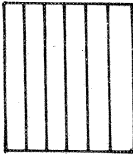
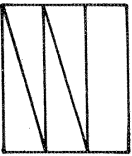
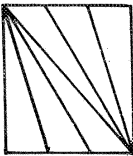
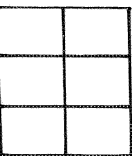
方法：用正方形色紙摺出各種等分，由 2 等分、3 等分…
…以找出等分的規則。

結果：

等 分	2	3
圖 形	  	  

等 分	4
圖 形	     

4	5
 	   

等 分	6
圖 形	    

(圖表一)

討論：

1. 把正方形相對的二個邊各幾等分，再相對的二點連接，就可以幾等分正方形了。
2. 正方形的一條對角線平分正方形，二條對角線四等分正方形。
3. 把正方形相對的兩邊各分爲 x 等分，取其中 2 份當底，由對邊等分點當頂點畫出三角形，餘者取一份當邊畫出長方形或平行四邊形就可以 x 等分其圖形。
4. 偶數等分可以一刀橫切，其餘的刀數以本討論 1. 的方式直切，可以刀數 $\times 2$ 等分正方形。

步驟 2：我們怎樣等分長方形

方法：用長方形的色紙分分看。

結果：長方形的等分法與正方形相同。

步驟 3：我們怎樣等分菱形

方法：我們用菱形色紙分分看，再加以討論。

結果：(1) 採用正方形等分法都可以等分菱形。

(2) 菱形的兩條對角線四等分菱形，並且互相垂直。

步驟 4：我們怎樣等分平行四邊形

方法：我們用自己切割的平行四邊形色紙分分看，並加討論。

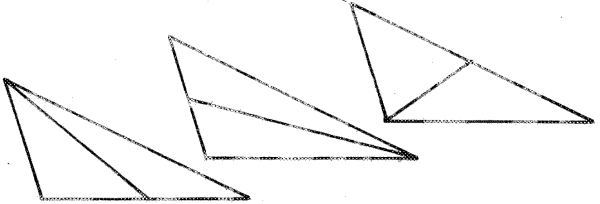
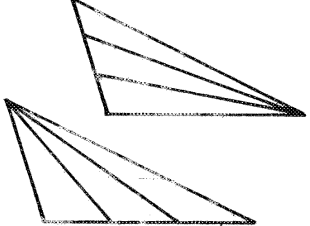
結果：(1) 採用正方形的等分法也可以等分平行四邊形。

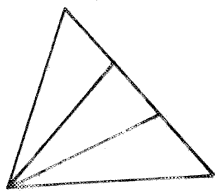
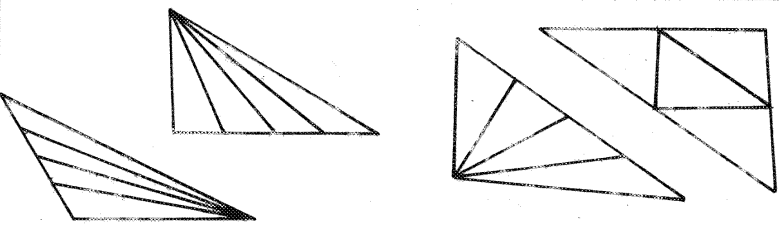
(2) 平行四邊形的一條對角線平分其圖形，兩條對角線四等分其圖形。

步驟 5：我們怎樣等分三角形（任意三角形、直角三角形、等腰三角形）

方法：我們用任意三角形、正三角形、直角三角形、等腰三角形分分看，並加以討論。

結果：

等分	2	3
圖形		

3	4
	

(圖表二)

討論：1. 將三角形的任何一邊等分成 x 段，再由相等的頂點做連線，就可以將三角形等分為 x 份。

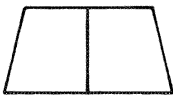
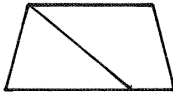
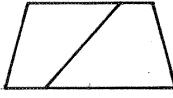
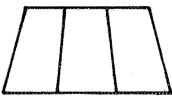
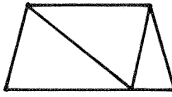
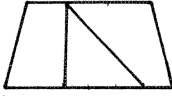
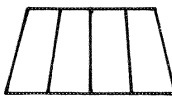
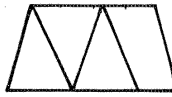
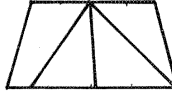
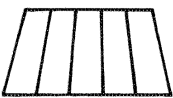
2. 取三角形三邊的中點，並將其中兩點分別做連線，所構成的四個三角形面積都相等。

3. 本討論 1. 2. 的方法適用於任何三角形。

步驟 6：我們怎樣等分梯形

方法：我們用自己切割的色紙分分看，並加以討論。

結果：

等分	2	3	4	5
圖形	  	  	  	  

(圖表三)

討論：1. 將梯形的上底和下底各分為 x 等分，再將兩個相對的點做連線，就可以將梯形分為 x 等分。

2. 底 $\div x = x$ 等分後每一等分的底長。

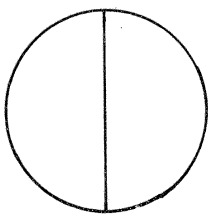
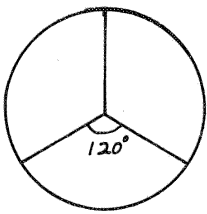
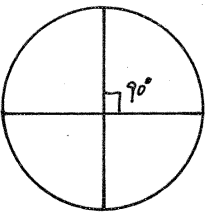
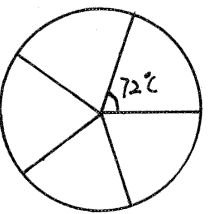
配合原來的高即可 x 等分梯形。

3. 本討論 2. 的方法可擴大適用於規則四邊形與任意三角形。

步驟 7：我們怎樣等分圓形

方法：我們用圓形的色紙分分看，並加以討論。

結果：

等分	2	3	4	5
圖形				

(圖表四)

- 討論：1. 圓形中任何一條直徑都能平分圓形。
 2. 二條互相垂直的直徑，四等分圓形。
 3. 如果要將圓形分爲 x 等分，只要將圓心角取做 $360 \div x$ 度，就能將圓形 x 等分。

(二) 找出切割各種圖形時，刀數、交點數及所切出的塊數等之間的關係。

步驟 1：切割時，所切的刀數和切出的塊數會受形狀的影響嗎？

方法：用正方形、長方形、三角形、菱形、梯形、圓形、多邊形等圖形切切看。

結果：

塊數 \ 刀數 \ 形狀	正方形		長方形		三角形		梯 形		圓 形		多 邊 形	
1		2		2		2		2		2		2
2		4		4		4		4		4		4
3		4		4		4		4		4		4

(圖表五)

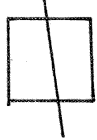
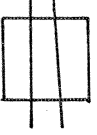
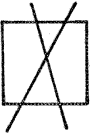
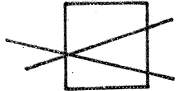
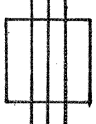
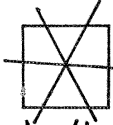
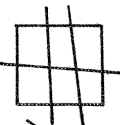
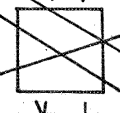
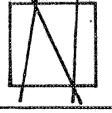
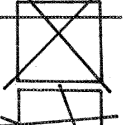
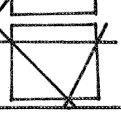
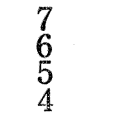
討論：1. 只要是切的方式相同，切的刀數相同，所切出的塊數也就相同，因此切的刀數和切出的塊數並不會受到形狀的影響。

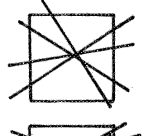
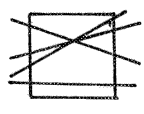
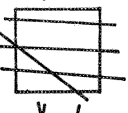
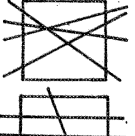
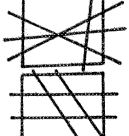
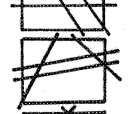
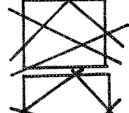
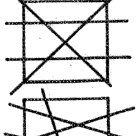
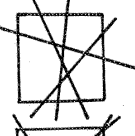
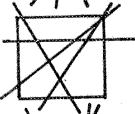
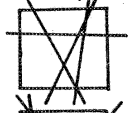
2. 以下的研究都以四邊形爲範例。

步驟 2：一刀、二刀、三刀……各種刀數有幾種不同的切法？

方法：用四邊形的色紙切切看，並做記錄。

結果：

刀數	1	2		3			
圖形		 		  	 	  	
塊數	2	3	4 3	4	6 5 4	6 5 4	7 6 5 4
交點數	0	0	1	0	1	2	3

4						
	 	 	  	  	  	  
5	8 7 6 5	9 8 7 6	9 8 7 6 5	10 9 8 7 6 5	10 9 8 7 6	11 10 9 8
0	1	2	3	4	5	6

(圖表六)

討論：由圖六我們發現

1. 相同的刀數可以切出不相同的塊數來。
2. 一般說來交點數越多塊數也越多，但是有例外，例如切四刀有四個交點時可以切出10塊，而

五個交點卻可能只切出 6 塊。

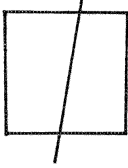
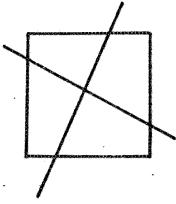
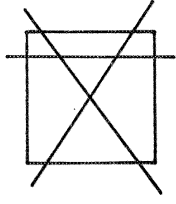
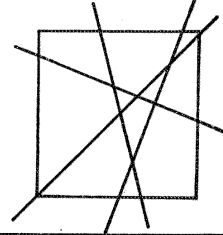
3. 一般說來切的刀數越多塊數也越多，但是並不會成為倍數增加的關係。
4. 同樣交點數，交點若在邊上，每多一點，則塊數比交點在圖形內的少一塊。
5. 同一刀數交點皆在圖形內且數目最多時，所切出的塊數也最多，因此我們想知道每一種刀數最多有幾個交點？最多可以切多少塊？

步驟 3：每一種刀數中最多有幾個交點？

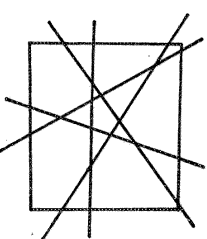
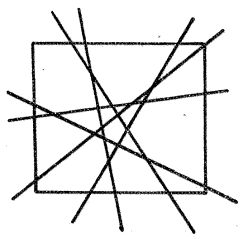
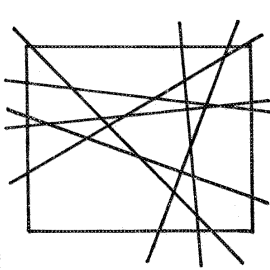
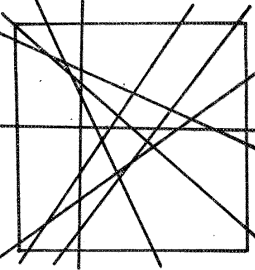
方法：我們以四邊形色紙切切看。

結果：

(圖表七)

刀 數	1	2	3	4
圖 形				
最多交點數 $\gamma(x)$	0	1	3	6
最多塊數 $\delta(x)$	2	4	7	11

(圖表七)

5	6	7	8
			
10	15	21	28
16	22	29	37

討論：我們以 $u(x)$ 代表切 x 刀數時，最多的交點數。

1. 我們發現二條直線最多只有一個交點。

2. 三條直線最多有三個交點。

3.

刀數 x	1	2	3	4	5	6	7	8
最多交點 數 $u(x)$	0	1	3	6	10	15	21	28

$\diagdown$ $\diagup$ $\diagdown$ $\diagup$ $\diagdown$ $\diagup$ $\diagdown$ $\diagup$ $\diagdown$ $\diagup$ $\diagdown$ $\diagup$ $\diagdown$ $\diagup$ $\diagdown$ $\diagup$ $\diagdown$ $\diagup$

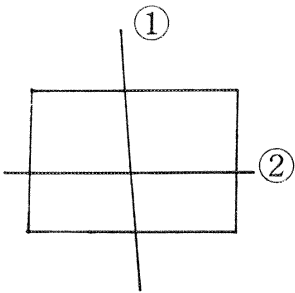
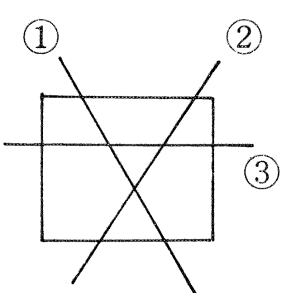
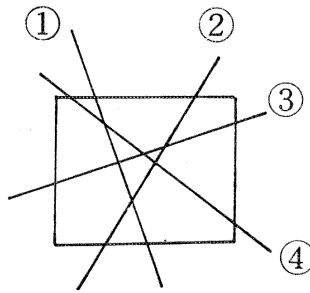
$$\because u(2) \text{ 比 } u(1) \text{ 多 } 1 \quad \therefore u(2) = u(1) + 1$$

$$\because u(3) \text{ 比 } u(2) \text{ 多 } 2 \quad \therefore u(3) = u(2) + 2$$

$$\therefore u(x) \text{ 比 } u(x-1) \text{ 多 } (x-1),$$

$$\therefore u(x) = u(x-1) + (x-1)。$$

4.

刀數	2	3	4
圖形			
說明	① ② 二線 都各有一交點	① ② ③ 三線 都各有二個交點	① ② ③ ④ 四線 各有三個交點
算式	$u(2) = 1 \times 2 \div 2 = 1$	$u(3) = 2 \times 3 \div 2 = 3$	$u(4) = 3 \times 4 \div 2 = 6$

(圖表八)

$$\text{ㄅ}(2) = 1 \times 2 \div 2 = 1$$

$$\text{ㄅ}(3) = 2 \times 3 \div 2 = 3$$

⋮

⋮

$$\text{所以：}\text{ㄅ}(x) = (x-1) \times x \div 2$$

5. 由 3. 4. 知：

$$\text{ㄅ}(2) = \text{ㄅ}(1) + 1 = 0 + 1 = 1 \times 2 \div 2$$

$$\text{ㄅ}(3) = \text{ㄅ}(2) + 2 = 0 + 1 + 2 = 2 \times 3 \div 2$$

⋮

⋮

$$\begin{aligned} \text{ㄅ}(x) &= \text{ㄅ}(x-1) + (x-1) = 1 + 2 + 3 + \cdots \\ &\quad + (x-1) = (x-1) \times x \div 2 \end{aligned}$$

6. 我們所得到的交點數與刀數的公式為：

$$\text{最多交點數} = (\text{刀數} - 1) \times \text{刀數} \div 2$$

7. 另外我們由討論 5 知道

$$\because 1 + 2 = 2 \times 3 \div 2 = 2 \times (2 + 1) \div 2$$

$$\because 1 + 2 + 3 = 3 \times 4 \div 2 = 3 \times (3 + 1) \div 2$$

$$\because 1 + 2 + 3 + 4 = 4 \times 5 \div 2 = 4 \times (4 + 1) \div 2$$

⋮

⋮

$$\therefore 1 + 2 + 3 + \cdots + x = x \times (x + 1) \div 2$$

步驟 4：在每一種刀數中最多能切多少塊？

方法：我們以四邊形色紙切切看。

結果：同圖七

推理：以 $f(x)$ 表示切 x 刀時最多的塊數

刀 數 x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
最多塊 數 $f(x)$	1	2	4	7	11	16	22	29	37	46	

(1)

$$\because f(1) \text{ 比 } f(0) \text{ 多 } 1 \quad \therefore f(1) = f(0) + 1$$

$$\because f(2) \text{ 比 } f(1) \text{ 多 } 2 \quad \therefore f(2) = f(1) + 2$$

$\vdots$

$\vdots$

$$\because f(x) \text{ 比 } f(x-1) \text{ 多 } x \quad \therefore f(x) = f(x-1) + x$$

(2)

$$f(1) = f(0) + 1 = 1 + 1$$

$$f(2) = f(1) + 2 = 1 + 1 + 2$$

$\vdots$

$\vdots$

$$f(x) = f(x-1) + x = 1 + 1 + 2 + 3 \cdots (x-1) + x$$

(3) 由步驟 3 的討論(7)知道

$$\because 1 + 2 + 3 + \cdots + x = x \times (x+1) \div 2$$

$$\text{所以：} f(1) = 1 + 1$$

$$f(2) = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 \times (2+1) \div 2$$

$$f(3) = 1 + 1 + 2 + 3 = 1 + 3 \times (3+1) \div 2$$

$\vdots$

$\vdots$

$$\therefore f(x) = 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + x = 1 + x \times (x+1) \div 2$$

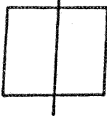
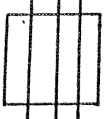
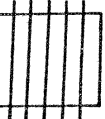
討論：1. 切 n 刀比切 $n-1$ 刀多 n 塊。

$$2. \text{ 公式：最多塊數} = 1 + \text{刀數} \times (\text{刀數} + 1) \div 2$$

步驟 5：每一刀都不相交的切法中，所切刀數和所切出的塊數有關嗎？

結果：

(圖表九)

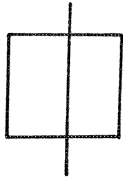
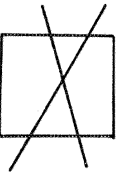
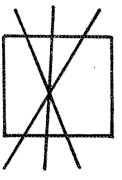
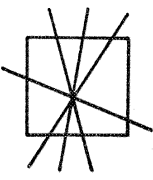
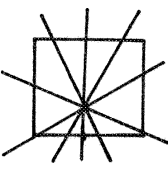
刀數	1	2	3	4	5
圖形					
塊數	2	3	4	5	6
算式	$2 = 1 + 1$	$3 = 2 + 1$	$4 = 3 + 1$	$5 = 4 + 1$	$6 = 5 + 1$

討論：1. 這種切法交點數最少。

2. 切 n 刀時，塊數 $= n+1$ 即塊數 $=$ 刀數 $+ 1$ 。

步驟 6：如果每一刀都交於圖形內的一點時，情形又如何？

(圖表十)

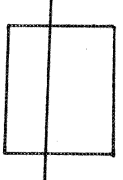
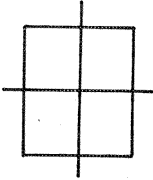
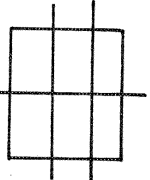
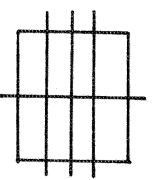
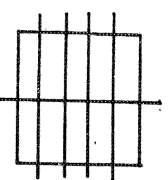
刀數	1	2	3	4	5
圖形					
塊數	2	4	6	8	10
算式	$2 = 1 \times 2$	$4 = 2 \times 2$	$6 = 3 \times 2$	$8 = 4 \times 2$	$10 = 5 \times 2$

結果：每一刀都相交於圖形內的一點的切法中，切 n 刀時所得塊數為 $n \times 2$ 即刀數 $\times 2$ 。

步驟 7：在不相交的數刀再畫一刀，通過每一條線，此時情形又如何？

結果：

(圖表十一)

刀數	1	2	3	4	5
圖形					
塊數	2	4	6	8	10
算式	$2 = 1 \times 2$	$4 = 2 \times 2$	$6 = 3 \times 2$	$8 = 4 \times 2$	$10 = 5 \times 2$
交點數	0	1	2	3	4
算式	$0 = 1 - 1$	$1 = 2 - 1$	$2 = 3 - 1$	$3 = 4 - 1$	$4 = 5 - 1$

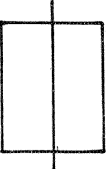
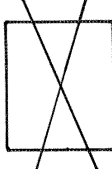
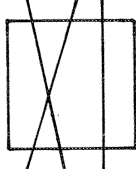
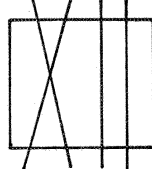
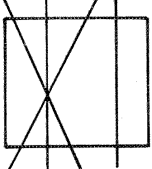
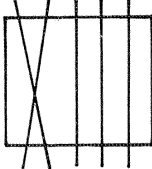
討論：切 n 刀時

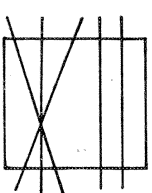
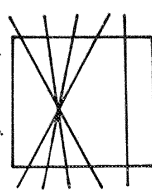
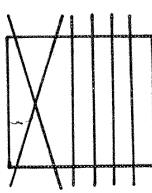
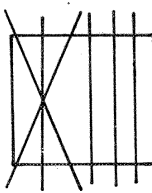
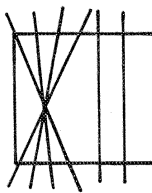
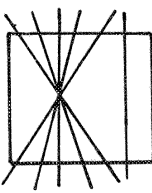
塊數 $= n \times 2$ ，交點數 $= n - 1$ 即

塊數 $=$ 刀數 $\times 2$ ，交點數 $=$ 刀數 $- 1$

步驟 8：研究有的刀數交於圖形內的一點，有的不相交的切法中，情形是如何？

結果：

刀數	1	2	3	4		5
圖形						
塊數	2	4	5	6	7	7
算式			$5=2\times 2+1$	$6=2\times 2+2$	$7=3\times 2+1$	$7=2\times 2+3$

5		6			
					
8	9	8	9	10	11
$8=3\times 2+2$	$9=4\times 2+1$	$8=2\times 2+4$	$9=3\times 2+3$	$10=4\times 2+2$	$11=5\times 2+1$

(圖表十二)

討論：切 n 刀時，塊數 $= m \times 2 + (n - m)$ ， m 為交於圖形內一點的刀數即

塊數 $=$ 相交刀數 $\times 2 +$ 不相交刀數

步驟9：研究兩組不相交的刀數互相切割時情形是如何？

結果：

刀數	4	5	6		7
圖形					
塊數	9	12	16	15	20
算式	$9 = (2+1) \times (2+1)$	$12 = (2+1) \times (3+1)$	$16 = (3+1) \times (3+1)$	$15 = (4+1) \times (2+1)$	$20 = (3+1) \times (4+1)$
交點數	4	6	9	8	12
算式	$4 = 2 \times 2$	$6 = 2 \times 3$	$9 = 3 \times 3$	$8 = 2 \times 4$	$12 = 4 \times 3$

7	8		
18	25	24	21
$18 = (2+1) \times (5+1)$	$25 = (4+1) \times (4+1)$	$24 = (3+1) \times (5+1)$	$21 = (2+1) \times (6+1)$
10	16	15	12
$10 = 5 \times 2$	$16 = 4 \times 4$	$15 = 5 \times 3$	$12 = 6 \times 2$

討論：切 n 刀時，塊數 $= (m+1) \times (n-m+1)$

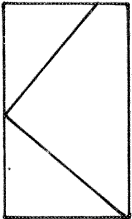
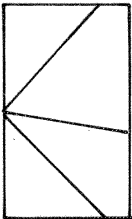
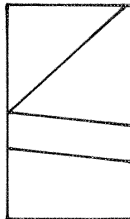
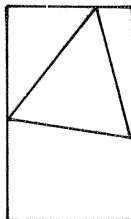
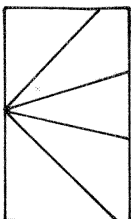
交點數 $= m \times n$

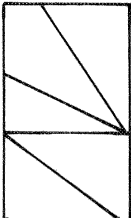
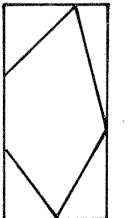
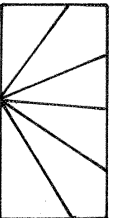
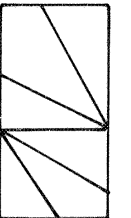
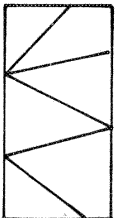
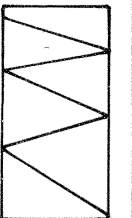
即塊數 $= (\text{一邊的刀數} + 1) \times (\text{另一邊的刀數} + 1)$

交點數 $= \text{一邊的刀數} \times \text{另一邊的刀數}$

步驟 10: 交點在圖形的邊緣時，刀數、塊數的關係。

結果：

刀 數	2	3			4
圖 形					
塊數	3	4	4	4	5
算 式	$3=2+1$	$4=3+1$	$4=3+1$	$4=3+1$	$5=4+1$

4			5			
						
5	5	5	6	6	6	6
$5=4+1$	$5=4+1$	$5=4+1$	$6=5+1$	$6=5+1$	$6=5+1$	$6=5+1$

(圖表十四)

討論：交點在圖形邊緣時

塊數＝刀數＋1

三、結 論

(一)在等分圖形的研究中，使我們很容易等分各種三角形，有規律的四邊形和圓形，但是對沒有規律的圖形就不容易找出等分的方法

1. 我們發現四邊形當中，一條對角線能平分其圖形，二條對角線能四等分圖形的有正方形、長方形、菱形、平行四邊形。

2. 規則四邊形與任意三角形的等分方法：

底 $\div n$ = 新的底長……（公式一）

所得的新底配合原來的高就可以 n 等分該圖形。

3. 圓形的等分法：

取圓心角 $\frac{360}{n}$ 度畫扇形……（公式二）

(二)在圖形的切割中發現

1. 任何圖形只要切的刀數與切的方法相同，切出的塊數也相同。

2. 同一刀數交點在圖形內且數目最多時所切出的塊數也最多。

3. 每一種刀數能切出的最多交點數為：

（刀數 -1 ） $\times$ 刀數 $\div 2$ ……（公式三）

4. 每一種刀數能切出的最多塊數為：

1 + 刀數 $\times$ （刀數 $+1$ ） $\div 2$ ……（公式四）

5. 每一刀都不相交的切法中：

塊數 = 刀數 $+1$ ……（公式五）

6. 每一刀都相交於圖形內的一點時

塊數 = 刀數 $\times 2$ ……（公式六）

7. 其中一刀通過彼此不相交的數刀時：

塊數 = 刀數 $\times 2$ ……（公式七）

交點數 = 刀數 -1 ……（公式八）

8. 有的刀數相交於一點，有的不相交時：

塊數 = 相交刀數 $\times 2$ + 不相交刀數……（公式九）

9. 兩組不相交的刀數互相切割時：

塊數 = （一邊的刀數 $+1$ ） $\times$ （另一邊的刀數 $+1$ ）……（公

式十)

交點數 = 一邊的刀數 $\times$ 另一邊的刀數 $\cdots\cdots$ (公式十一)

10. 交點在圖形邊緣時：

塊數 = 刀數 + 1 $\cdots\cdots$ (公式十二)

評 語

本作品分成兩部分，其中一部分討論如何將一個平面圖形用直線作等分，這部分的嘗試性具體操作程度切合初小學生，結果雖不强，但可看到學生數學概念之發展；另一部分牽涉到切幾刀，幾個切點，切成幾塊，這部分是超出了初小程度，略嫌重蛇添足。