

弧的秘密

初小組數學科第二名

臺北縣興南國民小學

作 者：鮑立義、宋曼怡

茅雅蓓

指導教師：陳月英、陳 滿

一、研究動機

上美勞課的時候，我們用色紙做摺紙遊戲，在摺紙時，發現每一種摺紙會有不同的線條和圖形出現，有斜的、直的、交叉的……；有三角形、四邊形……。尤其是鮑立義摺出看起來是一道美麗的“彎曲的線”，引起我們好奇，在老師指導之下，展開了我們的研究。

二、研究目的

- (一)了解點、線、面的特性和變化。
- (二)想知道形狀和彎曲的線間的關係。

三、研究設備器材

- | | | |
|------|-------|------|
| 1.色紙 | 2.剪刀 | 3.圓規 |
| 4.尺 | 5.量角器 | |

四、研究過程及方法

問題一：摺紙遊戲會產生哪些線條？

(一)研究一：

- 1.方法：(1)我們用色紙摺出各種不同的摺紙。
(2)把摺紙打開，將所有摺痕用筆畫下，並觀察比較。
- 2.結果：(1)我們發現各種造型都會有不同的線條和形狀出現，

也會發生對稱的現象。

(2)在摺線方面會有平行、交叉、放射、折線的情形出現。

(3)也產生三邊形、四邊形、五邊形。

問題二：只有正方形的紙才能摺出彎曲的線嗎？

(二)研究二：

1.方法：(1)用邊長 14.7 公分的色紙剪出：

ㄅ.三邊形 ㄆ.四邊形 ㄇ.五邊形 ㄈ.六邊形

ㄉ.八邊形 ㄊ.圓形 ㄋ.橢圓形

(2)把各種形狀紙的角依反時鐘方向編上號碼，並將每邊做上 1 公分的記號。

(3)我們用①角摺向②—③邊，②角摺向③—④邊，

③角摺向④—⑤邊，④角摺向⑤—⑥邊，

⑤角摺向⑥—⑦邊，⑥角摺向⑦—⑧邊，

⑦角摺向⑧—①邊，⑧角摺向①—②邊，

的方法來摺，摺痕用筆畫下。（圖略）

2.結果：(1)鈍角三角形的①③角、任意五邊形的④角、任意六邊形的⑤角，凹八邊形的⑥⑦角，凸八邊形的①⑥角以及圓形的各角，都沒摺出彎曲的線，其餘都能摺出彎曲的線。

(2)所摺出彎曲的線，都彎曲摺角。在同一個形狀裡，彎曲的線也成反時鐘方向形成。

(3)不同形狀的紙，彎曲的線也不太一樣，有的比較彎。

問題三：對摺的次數會影響彎曲的線嗎？

(三)研究三：

1.方法：(1)用研究二各種行狀的紙，分①對摺一次②對摺二次，對摺後將各角編上號碼，並將每邊做上 1 公分記錄。

(2)摺好後，我們加以觀察比較。（圖略）

2.結果：(1)在對摺一次中，各種形狀摺出來後都有二條彎曲的

線（除了圓形的②③角沒有摺出彎曲的線）摺出來的二條彎曲的線，就像鏡子的反射一樣，以對摺線為中心，會對稱。

(2)對摺二次中，各種形狀都能摺出四條彎曲的線，並且是上下左右相對稱。正八邊形的①③④⑥角因摺數太少，所以彎曲的線比較不明顯。

問題四：紙的大小會影響彎曲的線嗎？

(四)研究四：

1.方法：(1)用研究二的鈍角三角形和正方形，將最長的一邊固定，把最短的邊每次加長1公分，加至6公分。

(2)鈍角三角形：按研究二的方法來摺，摺痕用筆畫下。
正方形：ㄉ從①角摺向②—③邊，摺痕用筆畫下。
ㄋ從②角摺向③—④邊，摺痕用筆畫下。

2.結果：(1)鈍角三角形增加到4公分的時候（最大的角是94度）①③角彎曲的線就會比較明顯。

(2)正方形從①角摺向②—③邊，增加的長度越長，所摺出的線，彎曲的情形越小。從②角摺向③—④邊，彎曲的情形大致相同。

問題五：摺點和摺邊對摺的位置會影響彎曲的線嗎？

(五)研究五：

1.方法：用研究二的紙，從①角摺到各邊，摺痕用筆畫下。（圖略）

2.結果：(1)各形狀由角①按順序摺向各邊，所摺出彎曲的線，彎曲的方向成反時鐘旋轉。

(2)所摺出彎曲的線，彎曲的程度也不相同。

(3)圓形摺不出彎曲的線來，所有摺線交於一點。

(六)研究六：

1.方法：(1)用研究二的正方形和長方形，從①角摺向③—④邊；②角摺向④—①邊；③角摺向①—②邊；④角摺向②—③邊的摺法來摺，摺痕用筆畫下。

(2)摺出的結果和研究二的正方形和長方形比較。

2. 結果：(1)(1)角摺出彎曲的線是研究二④角的反面（對稱）。
 (2)(2)角摺出彎曲的線是研究二①角的反面（對稱）。
 (3)(3)角摺出彎曲的線是研究二②角的反面（對稱）。
 (4)(4)角摺出彎曲的線是研究二③角的反面（對稱）。

（見下表）

有“○” 無“×”

結 果 比 較		形狀 角 別	正方形（文一1）				長方形（文一2）			
			(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
研 究 二	曲 線	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	條	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	彎 曲 方 向									
研 究 六	曲 線	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	條	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	彎 曲 方 向									

（表一）

問題六：彎曲的線的產生和圖形的特性有關嗎？

(七)研究七：

1.方法：(1)我們用各種形狀的紙，依①邊對邊，②角對角的方法來摺。

(2)記錄結果，並加以比較和觀察。

可“○” 不可以“×”

結果編號		勾-1	勾-2	反-1	反-2	反-4	反-5	凸-1	凸-1	凸-1	凸	ㄅ
邊	對摺條數	○ 1	○ 1	○ 無限	○ 無限	×	×	○ 1	○ 2	○ 2	○ 2	○ 2
對邊形狀						無	無					
角	對摺條數	○ 1	○ 1	○ 無限	○ 1	○ 1	○ 無限	○ 1	○ 2	○ 無限	○ 無限	○ 1
對角形狀												

(表二)

2.結果：(1)平行四邊形和菱形在邊對邊的摺法上，無法摺出二個形狀、大小相對的圖形，其餘皆可以。

(2)在角對角的摺法中，正方形、菱形、正八方形、圓形都能對摺無限次，形成許多大小、形狀相同的圖形。

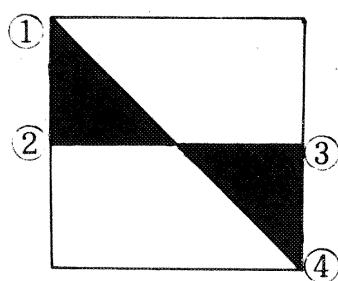
問題七：為什麼會有彎曲的線產生呢？

問題討論：根據我們的記錄發現，形成彎曲的摺線都在二個三角形的底邊出現，因此為了了解彎曲的線的秘密，我們又做以下的研究。

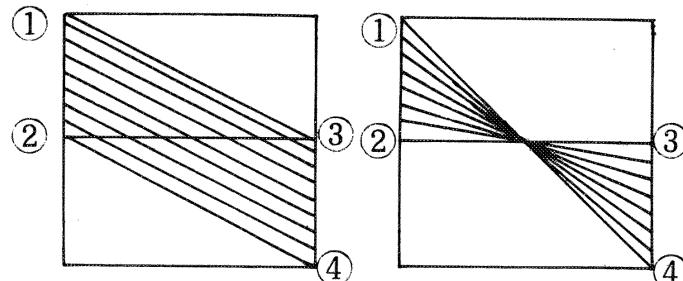
(八)研究八：

1.方法：(1)在①—②和③—④間每隔1公分畫上記號。(如圖一)

(2)用平行和交叉的方法來畫。(圖二)



(圖一)



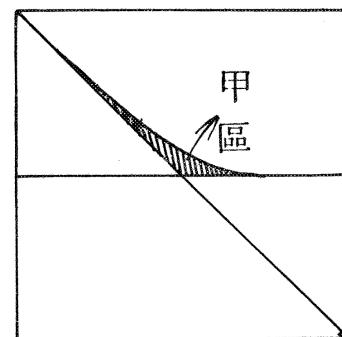
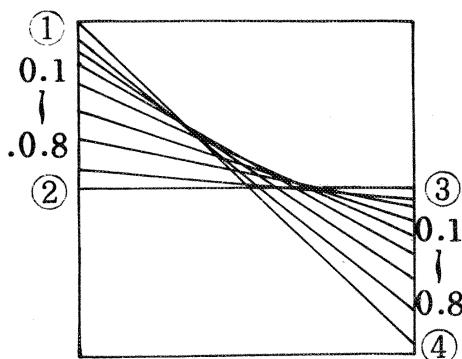
(圖二)

2. 結果：(1)二種畫法都無法畫出彎曲的線。

問題討論：再根據我們的記錄看來，摺線和摺線間的距離並不一定，因此我們又做了以下的研究。

(九)研究九：

1. 方法：(1)用研究八的圖形量出①—②、③—④邊，每隔 0.1 、 0.2 、 0.3 、 0.4 公分……各畫出一點，用交叉的方法來畫。



(圖三)

2. 結果：(1)畫出的結果和我們摺出彎曲的線很像。

(2)所有的線條都有一部分經過甲區。

問題討論：在我們的記錄中知道①—②、③—④邊的摺線必須有不同的間隔，而在圓形的摺線中，發現在中央會交於一點，我們認為這其中可能會有關聯，因此我們試著配合研究。

(十)研究十：

- 1.方法：(1)用圓形及橢圓形在圓周上間隔 1 公分做上記號。
(2)我們用每間隔① 2 點② 3 點③ 4 點……⑨ 10 點的方法來畫直線。
- 2.結果：(1)圓形所畫出的結果，中央部分會形成一個圓。間隔數越多，中央的圓越小，間隔數越少，中央的圓越大。
(2)橢圓形所畫出的結果，中央部分會形成一個橢圓，間隔數越多，中央部分會形成不規則形狀。

(十一)研究十一：

- 1.方法：(1)用研究二的去、乃在圓周上間隔 1 公分做上記號。
(2)用起點間隔 1 格，終點間隔 2 格的方法來畫直線。
(3)用起點間隔 1 格，終點間隔 3 格及 4 格的且用起點間隔 2 格終點間隔 3 格的方法畫直線。
- 2.結果：用方法 2 的畫法，畫出二條彎曲的線，這兩條線形成一個 \heartsuit 形。

(十二)研究十二：

- 1.方法：(1)用研究五所摺出的圖形，各影印許多張。
(2)把相同圓形依所形成“彎曲的線”的兩端為準，排出圓形。
- 2.結果：(1)所有的圓形都能夠排出很像大餅的圓。圓形橢圓形排成多邊形。
(2)彎曲的情形越明顯，所需要排成圓形的張數就比較少。

問題討論：研究十二所形成的圓形雖然很像圓，但用圓規去量又不是圓，所以我們想再知道這彎曲的線和圓的弧有什麼不同。

(十三)研究十三：

- 1.方法：(1)將每邊長 50 公分正方形依研究二的方法來摺，每摺一條線就和前一條線所夾的角用量角器量出角度並記錄下來。

(2)用圓規畫出半徑 20 公分的圓形，再張開 5 公分的圓規在圓周上做出許多相同距離的點，在每一點上畫出垂直半徑的直線，量出相鄰兩條線所夾的角度。

2. 結果：(1)方法(1)的每個角度都不相同，且角度慢慢的縮小。
(2)方法(2)的每個角度都相同。
(3)我們所摺的“彎曲的線”和圓形上的弧是不一樣的。

五、討 論

(一)我們知道“弧”是圓周上的一段，而在研究十三的研究中發現彎曲的線和摺線間的角度並不一定，和圓有很大的差別（圓的角度都一定），所以我們認為“彎曲的線”並不是“弧”。

(二)在研究二中，我們發現ㄩ—4 的①③角、ㄇ—2 的④角、ㄵ—2 的⑤角、ㄦ—2 的⑥⑦角和ㄩ—3 的①⑥角摺不出彎曲的線來。我們把圓形貼在白報紙上，將摺線用尺延長出去，結果發現這些延長的線，在白報紙上也會形成彎曲的線來。

(三)在研究十一裏，用起點間隔 1 格，終點間隔 2 格的方法畫圓和橢圓的直線時，發現有一條直線有時會重覆，於是再將圓周分為許多不同的等分，再用同樣的方法畫直線，發現只要等分是 3 的倍數時，都能找到一條重覆的線，而且這一條線是從起點算起，所有等分的三分之二處。公式如下：

$$\text{所有的點數} \div 3 \times 2 = \text{重覆線的起點}$$

(四)摺紙是精巧又好玩的遊戲，而在摺紙中，我們發現其中竟然也含有數學的道理，和我們數學課本裏所說的，有很多相同的地方，真使我們驚訝。也感到數學的奧妙又近人。如果我們能像這樣在遊戲中學數學的道理，想必在日常生活中一定會吸收到很多關於數學的知識。希望我們能繼續的去發展。

六、結 論

(一)不同的摺紙造型，就會有不同的線條和圓形出現，有些也會有對稱現象產生。

- (二)三邊形、四邊形、五邊形、六邊形、八邊形、橢圓形都能摺出彎曲的線，只有圓形的摺線會交於圓心一點，無法形成彎曲的線。
- (三)所摺出彎曲的線都彎向摺角，只有橢圓在摺向比較彎曲的邊時，所摺出彎曲的線，就會彎向摺邊，而不是摺角。
- (四)把正三角形、正方形、長方形、正五邊形、正六邊形、正八邊形、圓形對摺一次，就能摺出兩條對稱的“彎曲的線”。把正方形、長方形、正六邊形、正八邊形、圓形對摺二次，就能摺出四條上、下、左、右互相對稱的“彎曲的線”。
- (五)紙張起大，所摺出彎曲的情形越明顯。
- (六)摺點和摺邊的位置如果改變，也會摺出彎曲的線，只是彎曲的方向和彎曲的情形會不一樣。
- (七)形狀本身不管是不是對稱，都能摺出彎曲的線。
- (八)摺線和摺線間的距離，由小到大（或由大到小）以有順序的交叉方式組合，就能形成彎曲的線。
- (九)在圓形和橢圓形內畫上相同間隔數的直線，在內部就會形成圓形和橢圓，但間隔數太大就會形成不規則的圓形。如果用起點間隔1格，終點間隔2格的方法來畫直線，就會形成“♡”形。
- (十)我們所摺出彎曲的線和圓形上的“弧”是不一樣的。

七、參考資料

- (一)科學教授（數學篇） 故鄉出版社 頁 215～216。
- (二)摺紙藝術 100 種第 2 輯 年鑑出版社。

評 語

這件作品將幾何造形的一種方式（即用直線段造出曲線圖形），作了具體而完整的操作性探討，得到許多有趣的圖形。題材非常切合初小程度，結果也相當引人注目。