從棣美弗定理談圓內之完全彈性碰撞

高中組數學科第三名

省立新竹中學

作　者：陳盈佑

指導教師：黃靜卿

一、研究動機

在花式撞球中，發現球與球、球與桌壁之間的碰撞屬於彈性碰撞。有人可以以「一顆星進洞」、「二顆星進洞」……等，甚至球與桌壁碰撞好幾次後回到原出發點。這使我們聯想到如果將桌面改爲圓形，那就是我們所要研究球在圓形桌面內之完全彈性碰撞。

二、研究內容

平面上令 Z_0（1，0）表單位圓 $x^2+y^2=1$ 上之定點，一質點 P 由 Z_0 出發向圓內某一方向前進時，勢必與圓周相碰，如果每當 P 點可以與圓一直相碰下去，而碰撞之點分別爲 Z_1，Z_2，Z_3，……，Z_n 時，P 之前進路線爲 $Z_0 \to Z_1 \to Z_2 \to Z_3 \to \cdots \to Z_n \to \cdots$，由彈性碰撞原理知，只要確定 Z_1 之位置，便可確定所有之 Z_1，Z_2，Z_3，……Z_n……。爲了方便起見，若 Z_1 之複數坐標爲 $Z_1(\alpha)$，$\alpha=\cos\theta+\sin\theta$ 時，令 $R_\alpha = Z_0 \to Z_1 \to Z_2 \to \cdots\cdots \to Z_n \to \cdots\cdots$，稱爲由 $Z_1(\alpha)$ 所確定之彈性碰撞路線。今天我們要討論的方向有三：

(一) θ 在什麼條件下可使 $\{Z_0, Z_1, Z_2, \cdots\cdots, Z_n \cdots\cdots\}$ 之點重覆出現？可使 R_α 重回 Z_0？

(二)由 R_α 之能否重回 Z_0，可以進一步研究 θ 之三角函數值是否爲有理數。

(三) R_α 是否能通過圓周上另一定點、二個定點……。

論述 1 ： $Z_1(\alpha)$，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ 時，$\{Z_0, Z_1, Z_2, \cdots\cdots Z_n\cdots\cdots\}$ 有相同點之充要條件為 θ 是有理度數。

※註：$1°$之有理數倍稱之為有理度數。

由彈性碰撞原理知當 $Z_1(\alpha)$，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ 時，$Z_2, Z_3, \cdots\cdots Z_n$ 之複數坐標分別為 $Z_2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta=\alpha^2$，$Z_3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta=\alpha^3\cdots Z_n=\cos n\theta+i\sin n\theta=\alpha^n$

($\Rightarrow$)　若 $\{Z_0, Z_1, Z_2, \cdots Z_n\cdots\}$ 中出現相同之點

令 $Z_x=Z_y$ ($0\leqslant x<y$, x , $y\in N$) 且 $m=y-x$

則 $\alpha^x=\alpha^y$　$\therefore \alpha^x(\alpha^{y-x}-1)=0$

$\therefore \alpha^x\neq 0$　$\therefore \alpha^{y-x}-1=0$　$\therefore \alpha^m=1$

$\cos m\theta+i\sin m\theta=1=\cos 0+i\sin 0$

$\therefore m\theta=2k\pi$ ($k\in Z$)

$$\therefore \theta=\frac{k}{m}(2\pi)$$

($\Leftarrow$)　$\theta=\dfrac{k}{m}(2\pi)$　($m\in N$, $k\in Z$)

$$\text{則 } \alpha^m=\left(\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m}\right)^m=1$$

$\therefore Z_m=Z_0$　$\therefore \{Z_0, Z_1, Z_2, \cdots, Z_n, \cdots\}$ 中出現相同之點。

即 $\{Z_0, Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\cdots\}$ 中出現相同之點

$$\Longleftrightarrow \theta=\frac{k}{m}\cdot(2\pi)\quad (m, k\in Z)$$

論述 2 ： $Z_1(\alpha)$，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$，其中 $\theta=\dfrac{k}{m}(2\pi)$，($m\in N$, $k\in z$，且互質)

(1) $\{Z_0, Z_1, \cdots, Z_n\cdots\}$ 中第一個與前面同之點為 Z_m

($Z_m=Z_0$)

$\{Z_0, Z_1, \cdots, Z_n\cdots\}$ 中每 m 個點循環一次。

(2) P 沿 R_α 前進時，在第 m 步時首次重回 Z_0，以後每 m 步重回 Z_0 一次。

(1) $\because \alpha^m = (\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m})^m = 1$

$\therefore Z_m = Z_0$，Z_m 與前面的點相同。

從 $\{Z_0, Z_1, Z_2, \cdots, Z_{m-1}\}$ 中任取二點 Z_p，Z_q ($0 \leqslant p < q \leqslant m-1$)

若 $Z_p = Z_q$　則 $\alpha^p = \alpha^q$

$\therefore \alpha^p - \alpha^q = \alpha^p(\alpha^{q-p} - 1) = 0$

但 $\alpha^p \neq 0$　$\therefore \alpha^{q-p} = 1$

$\therefore \cos(q-p)\theta + i\sin(q-p)\theta = 1$

$\therefore (q-p)\theta = 2k'\pi$；$(q-p)(\frac{2k\pi}{m}) = 2k'\pi$

$\therefore (q-p)k = mk'$

$\because (m, k) = 1$　$\therefore m \mid q-p$　且 $0 < q-p < m$ 顯然不合

$\therefore Z_p \neq Z_q$　即 $\{Z_0, Z_1, Z_2, \cdots, Z_{m-1}\}$ 中各點均相異。

則 $\{Z_0, Z_1, Z_2, \cdots, Z_n \cdots\}$ 第一次與前面相同之點為 Z_m。

而 P 沿 R_α 前進時在第 m 步時首次重回 Z_0。

(2) $\because \alpha^{m+p} = \alpha^m \cdot \alpha^p$　$\therefore Z_{m+p} = Z_p$

$\therefore \{Z_0, Z_1, Z_2, \cdots, Z_n \cdots\}$ 中各點每 m 個點重複一次。

即 P 沿 R_α 方向前進時，每 m 步重回 Z_0 一次。

論述 3：$Z_1(\alpha)$，$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$，$\theta = \frac{k}{m}(2\pi)$，($m \in N$，$k \in Z$，且互質)，P 沿 R_α 方向前進，要重回 Z_0 一次時與圓周相碰之點 $\{Z_0, Z_1, Z_2, \cdots, Z_{m-1}\}$ 恰為圓內接正 m 邊形之 m 個頂點 (不一定按照正 m 邊形頂點之順序)，由此可知：

$\overline{Z_0Z_1} \cdot \overline{Z_0Z_2} \cdot \overline{Z_0Z_3} \cdots\cdots \overline{Z_0Z_{m-1}} = m$

且 $\overline{Z_0Z_1}^2 + \overline{Z_0Z_2}^2 + \cdots\cdots + \overline{Z_0Z_{m-1}}^2 = 2m$

(1) $\because \alpha^m = (\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m})^m = 1$

$\therefore (\alpha^2)^m = (\alpha^m)^2 = 1$，$(\alpha^3)^m = (\alpha^m)^3 = 1$，………

$(\alpha^{m-1})^m = (\alpha^m)^{m-1} = 1$

$\therefore 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \cdots, \alpha^{m-1}$ 均滿足方程式 $z^m = 1$，又由論述2知 $1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{m-1}$ 中兩兩相異。

$\therefore 1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{m-1}$ 恰爲 $z^m = 1$ 之m個根。

$\therefore Z_0, Z_1, Z_2, \cdots, Z_{m-1}$ 在複數平面上正好是單位圓之內接正m邊形之m個頂點。（不一定按照順序）

(2) $1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{m-1}$ 爲 $z^m - 1 = 0$ 之m個根

$\therefore z^m - 1 = (z-1)(z-\alpha)\cdots\cdots(z-\alpha^{m-1})$ 兩邊除以 $z-1$

$\therefore z^{m-1} + z^{m-2} + \cdots\cdots + z + 1 = (z-\alpha)(z-\alpha^2)\cdots\cdots(z-\alpha^{m-1})$

以 $z = 1$ 代入

$m = (1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots\cdots(1-\alpha^{m-1})$

兩邊取絕對值　$|m| = |1-\alpha| \cdot |1-\alpha^2| \cdots |1-\alpha^{m-1}|$

即 $\overline{Z_0Z_1} \cdot \overline{Z_0Z_2} \cdots\cdots \overline{Z_0Z_{m-1}} = m$

(3) 令 $\omega = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}$ 顯然可見 $1, \omega, \omega^2 \cdots \omega^{m-1}$ 爲 $z^m = 1$ 之m個根。

$\therefore \overline{Z_0Z_1}^2 + \overline{Z_0Z_2}^2 + \cdots\cdots + \overline{Z_0Z_{m-1}}^2$

$= |1-\alpha|^2 + |1-\alpha^2|^2 + \cdots\cdots + |1-\alpha^{m-1}|^2$

$= |1-\omega|^2 + |1-\omega^2|^2 + \cdots\cdots + |1-\omega^{m-1}|^2$ （不一定依序相同）

$$= \left|1-\cos\frac{2\pi}{m} - i\sin\frac{2\pi}{m}\right|^2 + \left|1-\cos\frac{4\pi}{m} - i\sin\frac{4\pi}{m}\right|^2 + \cdots\cdots + \left|1-\cos\frac{2(m-1)\pi}{m} - i\sin\frac{2(m-1)\pi}{m}\right|^2$$

$$= 2m - 2\left[\cos\frac{2\pi}{m} + \cos\frac{4\pi}{m} + \cdots + \cos\frac{2(m-1)\pi}{m}\right]$$

$$= 2m - 2\cdot\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{m}}\left[2\sin\frac{\pi}{m}\cos\frac{2\pi}{m}\right.$$

$$\left. + 2\sin\frac{\pi}{m}\cos\frac{4\pi}{m} + \cdots + 2\sin\frac{\pi}{m}\cos\frac{2(m-1)\pi}{m}\right]$$

$$= 2m$$

※例：P 由 $Z_0(1,0)$ 出發，朝單位圓 $x^2+y^2=1$ 內某一方向前進，若 P 與圓周碰撞 100 次而首次回到 Z_0 時 (1) P 之走法有幾種？(2)在這些走法中，首次回到 Z_0 所經過距離之最大值與最小值爲何？

解：令 $\alpha = \cos\frac{k}{100}\cdot 2\pi + i\sin\frac{k}{100}\cdot 2\pi$

$\because (100, k) = 1$ 又 $100 = 2^2\cdot 5^2$

$1 \sim 100$ 自然數中與 100 互質的有

$100\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 40$ 個

首次回到 z_0 之總距離和 $200\left|\sin\frac{k\pi}{100}\right|$，

$\therefore$ 最大值發生在 $k = 49$ 或 51，

最小值發生在 $k = 1$ 或 99。

論述 4：$m \in N$ 時，若 m 之質因數分解式爲 $m = P_1^{\alpha_1}\cdot P_2^{\alpha_2}\cdot P_3^{\alpha_3}\cdots\cdots P_k^{\alpha_k}$，（$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_k$ 相異質數，$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_k \in N$）將 P 由 Z_0 出發朝單位圓 $x^2+y^2=1$ 內某一方向前進，欲使 P 與圓周碰撞 m 次而首次回到 Z_0，則 P 之走法有 $m\left(1-\frac{1}{P_1}\right)\left(1-\frac{1}{P_2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{P_k}\right)$ 種。

這些走法中，首次回到 Z_0 所經過距離之最小值 $2m\sin\frac{\pi}{m}$

最大值(1) m 爲奇數，$m=2\gamma+1$，$\gamma\in N$ 爲 $2m\sin\frac{\gamma\pi}{m}$

(2) m 爲偶數，$m=2^s$，$s\in N$ 爲 $2m\sin\frac{(s-1)\pi}{m}$

論述 5：設 $Z_1(\alpha)$，$\alpha=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$ 時，若 P 沿 R_α 方向前進，則 P 出發之後不可能重回 Z_0。（換言之 $Z_0, Z_1, Z_2, \cdots, Z_n \cdots$ 各點均相異）

設 P 沿 R_α 前進時在第 n 步時重回 Z_0，顯然地，若 P 沿 $R_{\bar{\alpha}}$ 前進時也會在第 n 次時重回 Z_0。

得 $\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right)^n=\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i\right)^n$

$(4+3i)^n=(4-3i)^n$

$\therefore (4-3i)^n=(4-3i+6i)^n$

$=(4-3i)^n+C_1^n(4-3i)^{n-1}(6i)$

$+C_2^n(4-3i)^{n-2}(6i)^2+\cdots\cdots$

$+C_{n-1}^n(4-3i)(6i)^{n-1}+C_n^n(6i)^n$

$\therefore C_1^n(4-3i)^{n-1}(6i)+C_2^n(4-3i)^{n-2}(6i)^2+\cdots\cdots$

$+C_{n-1}^n(4-3i)(6i)^{n-1}=-(6i)^n$

$(4-3i)(6i)\left[C_1^n(4-3i)^{n-2}+C_2^n(4-3i)^{n-3}\right.$

$\left.(6i)+\cdots\cdots+C_{n-1}^n(6i)^{n-2}\right]$

$=-(6i)^n$

又將 $C_1^n(4-3i)^{n-2}+C_2^n(4-3i)^{n-3}(6i)+\cdots\cdots+C_{n-1}^n(6i)^{n-2}$ 展開化簡必形如 $A+Bi$（$A, B\in Z$）

$\therefore (4-3i)(A+Bi)=-(6i)^{n-1}$ 兩邊取絕對值平方

$|4-3i|^2|A+Bi|^2=|-(6i)^{n-1}|^2$

$\therefore 5^2(A^2+B^2)=(6^{n-1})^2 \quad \therefore 5^2\mid(6^{n-1})^2$

$\therefore 5\mid 6^{n-1}$ 顯然不合。

故 P 沿 R_α 前進時無法重回 Z_0。

論述 6：$I(a, b)$爲坐標平面上，不在坐標軸且不在 $x=\pm y$ 上任意之整數點，$\overrightarrow{OI}$與單位圓 $x^2+y^2=1$ 交於 Z_1 ($\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$)，則 Z_1 之複數坐標爲 $Z_1(\alpha)$，$\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i$，得若 P 沿 R_α 方向前進時，P 不能重回原出發點。

論述 7：θ 爲不屬於集合 $S=\{90°\times n \mid n\in Z\}\cup\{180°\times n\pm 45° \mid n\in Z\}$ 之任意有理度數，則 $\tan\theta$ 必不爲有理數。

基於銳角可以表示任意角之三角函數值，故只須證明 $0°<\theta<90°$，$\theta\neq 45°$ 且 θ 爲有理度數時 $\tan\theta$ 不爲有理數即可。

設 θ 爲滿足該條件之有理度數且 $\tan\theta$ 爲有理數

令 $\tan\theta=\frac{b}{a}$ ($a, b\in N$ 且 a, b 互質，$a\neq b$)

取 $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i$，由論述 6

知 P 沿 R_α 方向前進不能回到 Z_0。

$\therefore\theta$ 不爲有理度數，（顯然不合），

$\therefore\tan\theta$ 必爲無理數。

論述 8：$z_1(\alpha)$，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ 表單位圓上異於 z_0 之定點，P 沿 R_α 前進時，可通過另一定點 $A(z)$，$z=\cos\phi+i\sin\phi$ 時，求 θ 與 ϕ 之關係。

分 θ 爲有理度數與無理度數兩種情形討論如下：

(1) θ 爲有理度數時，令 $\theta=\frac{k}{m}(2\pi)$，($m\in N$，$k\in Z$ 且互質)

則 $\{Z_0, Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\cdots\}=\{Z_0, Z_1, Z_2, \cdots, Z_{m-1}\}$

若 P 沿 R_α 前進時可通過 A 點之條件爲 $\phi = \frac{k'}{m}(2\pi)$，

$k' \in \{1, 2, \cdots\cdots m-1\}$

(2) θ 爲無理度數時 $\{Z_0, Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\cdots\}$ 中不出現相同之兩點

若 P 沿 R_α 方向前進時，可過 A 點之條件爲 $\alpha^n = z$

$\therefore \cos n\theta + i\sin n\theta = \cos\phi + i\sin\phi$

即 $\phi = n\theta + 2K\pi$，$n \in N$，$K \in Z$

> 論述 9：$A(z_1)$，$B(z_2)$ 爲單位圓上異於 Z_0 之兩個定點，$z_1 = \cos\phi_1 + i\sin\phi_1$，$z_2 = \cos\phi_2 + i\sin\phi_2$，若存在一點 $z_1(\alpha)$，$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$，使 P 沿 R_α 方向前進時可通過 A 點與 B 點，求 ϕ_1 與 ϕ_2 之關係。

(1) ϕ_1，ϕ_2 皆爲有理度時，令 $\phi_1 = \frac{k_1}{m}(2\pi)$，$\phi_2 = \frac{k_2}{m}(2\pi)$

$(m, k_1, k_2 \in Z)$

取 $\alpha = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}$

則 P 沿 R_α 前進時，可在第 k_1 步時通過 A 點，而在第 k_2 步時通過 B 點。

(2) ϕ_1，ϕ_2 皆爲無理度數時

若 P 沿 R_α 方向前進時在第 m 步時通過 A 點，而在第 n 步通過 B 點。

則 $\alpha^m = z_1$，$\alpha^n = z_2$

$\therefore z_1^n = (\alpha^m)^n = \alpha^{mn}$，$z_2^m = (\alpha^n)^m = \alpha^{mn}$

$\therefore z_1^n = z_2^m$

令 $(m, n) = d$，$m = dx$，$n = dy$，$(x, y) = 1$

得 $z_1^{dy} = z_2^{dx}$　$\therefore (z_1^y)^d = (z_2^x)^d$　$\therefore z_1^y = z_2^x$

$\cos(y\phi_1) + i\sin(y\phi_1) = \cos(x\phi_2) + i\sin(x\phi_2)$

$\therefore y\phi_1 = x\phi_2 + 2k\pi$

即 $\phi_1=\dfrac{x}{y}\phi_2+\dfrac{k}{y}(2\pi)$，（$x, y\in N$ 且 x, y 互質，$k\in Z$）

反之若 $\phi_1=\dfrac{x}{y}\phi_2+\dfrac{k}{y}(2\pi)$，（$x, y\in N$，且 x, y 互質，$k\in z$）時考慮方程式爲

$$\begin{cases} m\theta=\phi_1+2\ell_1\pi \\ n\theta=\phi_2+2\ell_2\pi \quad (m, n\in N, \ell_1, \ell_2\in Z) \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} m\theta=\dfrac{x}{y}\phi_2+\dfrac{k}{y}(2\pi)+2\ell_1\pi \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ n\theta=\phi_2+2\ell_2\pi \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

①×$\left(\dfrac{y}{x}\right)$－②

$\therefore\left(\dfrac{y}{x}m-n\right)\theta=2\pi\left(\dfrac{k}{x}+\dfrac{y\ell_1}{x}-\ell_2\right)$

$\because\theta$ 不爲有理度數而 $\left(\dfrac{k}{x}+\dfrac{y\ell_1}{x}-\ell_2\right)\cdot 2\pi$ 爲有理度數

$\therefore\dfrac{y}{x}m-n=0$　即 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{n}{m}$　取 $n=y$，$m=x$ 代入①、②式中

$$\begin{cases} x\theta=\dfrac{x}{y}\phi_2+\dfrac{k}{y}(2\pi)+2\ell_1\pi \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ y\theta=\phi_2+2\ell_2\pi \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

④代入③　$x\left(\dfrac{\phi_2}{y}+\dfrac{2\ell_2\pi}{y}\right)=\dfrac{x}{y}\phi_2+\dfrac{k}{y}(2\pi)+2\ell_1\pi$

$\therefore x\ell_2-y\ell_1=k$　　$\because(x, y)=1$

∴存在方程式 $x\ell_2-y\ell_1=k$ 必有整數解。

而此時 $\phi_1=\dfrac{x}{y}\phi_2+\dfrac{2(x\ell_2-y\ell_1)\pi}{y}$

$\therefore\phi_1+2\ell_1\pi=\dfrac{x}{y}(\phi_2+2\ell_2\pi)$

$\therefore\dfrac{\phi_1+2\ell_1\pi}{x}=\dfrac{\phi_2+2\ell_2\pi}{y}$

取 $\alpha = \cos\dfrac{\phi_1 + 2\ell_1\pi}{x}$ $i\sin\dfrac{\phi_2 + 2\ell_1\pi}{x}$

$= \cos\dfrac{\phi_2 + 2\ell_2\pi}{y} + i\sin\dfrac{\phi_2 + 2\ell_2\pi}{y}$

得 $\alpha^x = \cos(\phi_1 + 2\ell_1\pi) + i\sin(\phi_1 + 2\ell_1\pi) = z_1$

$\alpha^y = \cos(\phi_2 + 2\ell_2\pi) + i\sin(\phi_2 + 2\ell_2\pi) = z_2$

故 對 $A(z_1)$，$B(z_2)$ 言存在 α 使 P 沿 R_α 前進時可通過 A 點與 B 點之條件為

$$\phi_1 = \frac{x}{y}\phi_2 + \frac{k}{y}(2\pi)$$

三、研究結論

㈠ $Z_1(\alpha)$，$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ 時，P 點沿 R_α 前進所形成 $\{Z_0, Z_1, Y_2, \cdots, Z_n \cdots\}$ 各點，若能出現相同的點之條件為 θ 是有理度數，反之 θ 若不為有理度數時，則無法出現相同之點。

㈡ $A(z_1)$，$B(z_2)$ 表單位圓上異於 Z_0 之兩個定點。$z_1 = \cos\phi_1 + i\sin\phi_1$，$z_2 = \cos\phi_2 + i\sin\phi_2$，若存在一點 $Z_1(\alpha)$，$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ 使 P 沿 R_α 方向前進時可通過 A 點與 B 點，則 ϕ_1 與 ϕ_2 之間關係可表為：

$$\phi_1 = \frac{x}{y}\phi_2 + \frac{k}{y}(2\pi)$$

㈢ $I(a, b)$ 為坐標平面上，不在坐標軸且不在 $x = \pm y$ 上任意之整數點，$\overrightarrow{0I}$ 與單位圓 $x^2 + y^2 = 1$ 交於 $Z_1\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$，則 Z_1 之複數坐標為 $Z_1(\alpha)$，$\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i$，得若 P 沿 R_α 方向前進時，P 不能重回原出發點。

四、參考資料

㈠徐氏趣味競試問題集。

㈡第 22 屆科學展覽優勝作品專輯。

評　語

1. 作品非常完整和系統化，顯示作者已習慣于系統性思考。
2. 作者充分理解高中程度的數學，並能靈活應用。
3. 由作品的研究過程及表現方式，可見作者有相當的研究耐力；假以時日在數學上必有多成。