從平面到立體——從三角形看四面體的性質

高中組數學科第三名

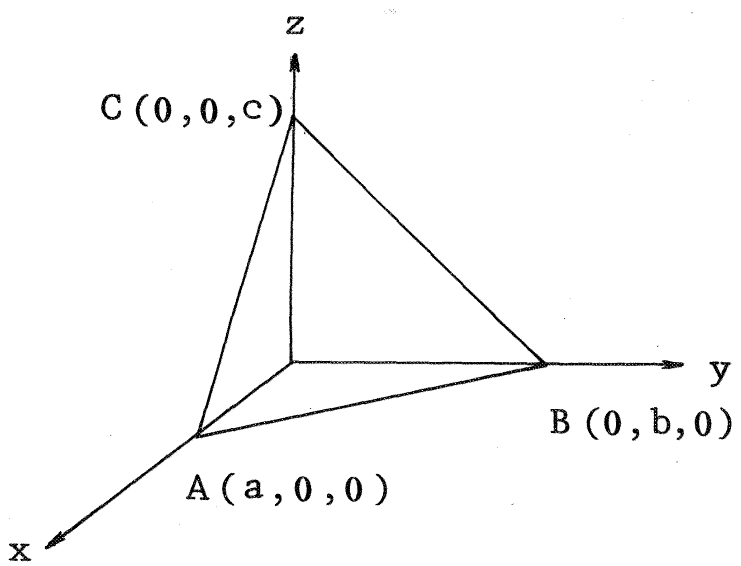
省立新竹高級中學

作　　者：林志民、陳彥匡
　　　　　范治民

指導教師：許燦煌

一、研究動機

空間中四點：0（0，0，0），A（a，0，0），B（0，b，0），C（0，0，c）構成一個四面體，其中0點任意相鄰兩平面角均爲直直角。在演算中，我們不意發現：△OAB、△OBC、△OCA三個三角形面積的平方和等於△ABC之面積的平方，這與平面上三角形的畢氏定理十分相似；我們不禁聯相到四面體還有那些性質與三角形相似？還有四面體是否就是三角形在空間中的延伸？於是，展開了四面體性質之探討。



二、研究目的

將平面上三角形的主要性質適當地推廣到四面體

(一)推出四面體的餘弦定理，並導出四面體的畢氏定理（又稱三維空間的高商定理）。

(二)推出四面體正弦定理、正切定理。

(三)找出四面體的六稜長與體積的關係。

(四)推出四面體的西瓦共點定理、孟氏共面定理。

(五)模仿三角形五心之定義，定義四面體的五心，並研究其性質。

(六)求出四面體一點便到各頂點、各稜、各面距離和最小。

三、研究內容

(一)符號定義

1. S_A ：表 A 點所對之 Area

2. V（A－BCD）：四面體 A－BCD 之體積

3. θ_{AB} ： A 點所對之面及 B 點所對之二面之夾角

(二)餘弦定理： $S_A^2 = S_B^2 + S_C^2 + S_D^2 - 2(S_BS_C\cos\theta_{BC} + S_CS_D\cos\theta_{CD} + S_DS_B\cos\theta_{DB})$

當頂點 A 為直角錐頂時，可得四面體的高商定理：

$$S_A^2 = S_B^2 + S_C^2 + S_D^2$$

(三)正弦定理：

$$\frac{\sin\theta_{AB}}{\frac{\overline{CD}}{S_A \cdot S_B}} = \frac{\sin\theta_{AC}}{\frac{\overline{BD}}{S_A \cdot S_C}} = \frac{\sin\theta_{AD}}{\frac{\overline{BC}}{S_A \cdot S_D}} = \frac{\sin\theta_{BC}}{\frac{\overline{AD}}{S_B \cdot S_C}} = \frac{\sin\theta_{BD}}{\frac{\overline{AC}}{S_B \cdot S_D}} = \frac{\sin\theta_{CD}}{\frac{\overline{AB}}{S_C \cdot S_D}}$$

$$= \frac{3}{2}V$$

又因

$$\frac{\frac{\overline{CD}}{S_A \cdot S_B} - \frac{\overline{BD}}{S_A \cdot S_C}}{\frac{\overline{CD}}{S_A \cdot S_B} + \frac{\overline{BD}}{S_A \cdot S_C}} = \frac{\sin\theta_{AB} - \sin\theta_{AC}}{\sin\theta_{AB} + \sin\theta_{AC}}$$

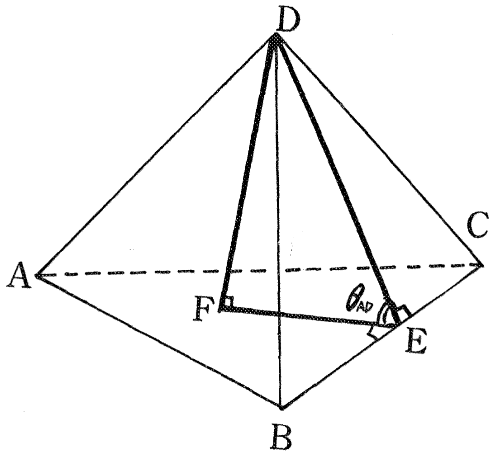
再將左式化簡，右式和差化積，可得下面的正切定理：

$$\frac{\overline{CD}S_C - \overline{BD}S_B}{\overline{CD}S_C + \overline{BD}S_B} = \frac{\tan\frac{\theta_{AB} - \theta_{AC}}{2}}{\tan\frac{\theta_{AB} + \theta_{AC}}{2}}$$

以六稜長（或三稜、三角）表四面體體積

㈣正切定理：

$$\frac{\overline{CD}S_C - \overline{BD}S_B}{\overline{CD}S_C + \overline{BD}S_B} = \frac{\tan\frac{\theta_{AB} - \theta_{AC}}{2}}{\tan\frac{\theta_{AB} + \theta_{AC}}{2}}$$

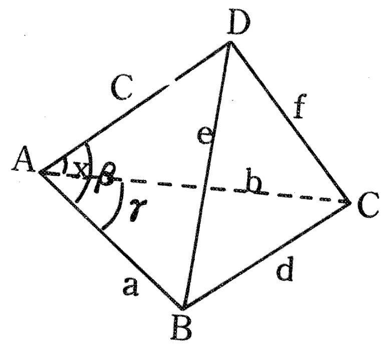


㈤以六稜長表體積公式：

$$V = \frac{1}{24}\left(\begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-d^2 & a^2+c^2-e^2 \\ a^2+b^2-d^2 & 2b^2 & b^2+c^2-f^2 \\ a^2+c^2-e^2 & b^2+c^2-f^2 & 2c^2 \end{vmatrix}\right)^{\frac{1}{2}}$$

當四面體四面均為全等的三角形時，四個三角形均為銳角三角形，且

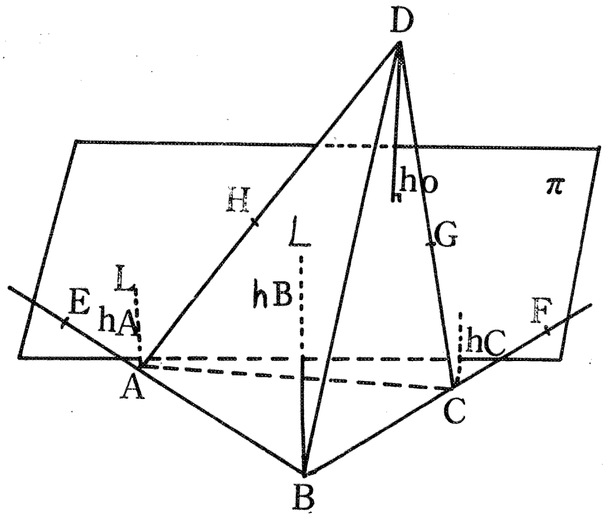
$V = \frac{1}{3}\sqrt{(s-a^2)(s-b^2)(s-c^2)}$，其中 $S = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$



㈥孟氏共面定理：

若 E，F，G，H 依次為四面體 D－ABC 四稜所在直線 AB，BC，CD，DA 上四點，則

E，F，G，H 四點共面 $\Longleftrightarrow \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$



㈦西瓦共點定理：

若 E，F，G，H 依次為四面體 D－ABC 四稜 AB，BC，CD，DA 上四點，則

四平面 CDE，ADF，ABG，BCH 共點 $\Longleftrightarrow \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$

㈧四面體的內心

1.定義：

(1)三角形內心定義爲三角形內切圓的圓心。

(2)四面體的內心定義爲四面體內切球的球心。

因此，四面體的內心在四面體內部且到四面等距，同時內心也是四面體六個二面角平分面的交點。

2.性質：

(1)設 I 爲四面體 D－ABC 的內心則

$$\overrightarrow{CI}=\frac{S_A\cdot\overrightarrow{OA}+S_B\overrightarrow{OB}+S_C\overrightarrow{OC}+S_D\overrightarrow{CD}}{S_A+S_B+S_C+S_D}$$

(2)四面體 A－BCD 中

$$\text{內切球半徑 } r=\frac{3V(A-BCD)}{S_A+S_B+S_C+S_D}$$

(九)四面體的重心

1.定義：

(1)三角形重心的定義：

$$G\text{爲}\triangle ABC\text{的重心}\Longleftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{O}$$

(2)定義四面體的重心：

$$G\text{爲四面體 }D-ABC\text{ 的重心}\Longleftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{O}$$

$$\Longleftrightarrow\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

（O爲空間中任意一點）

2.性質：

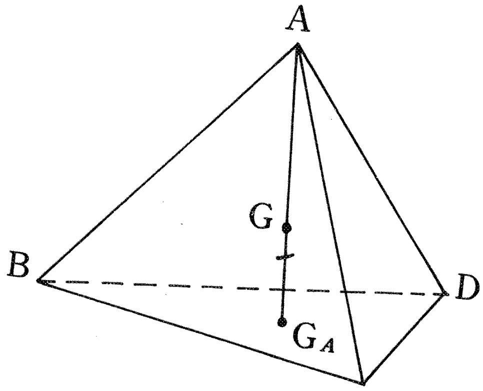
設G爲四面體 D－ABC 的重心，則

(1) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$

(2) G的位置在各頂點與其對面三角形重心連線段的三一分點處。

(3)中線 $\overline{DG_D}$ 長（ G_D 爲頂點D所對△ABC的重心）等於

$$\frac{1}{3}\sqrt{3(\overline{DA}^2+\overline{DB}^2+\overline{DC}^2)-\overline{AB}^2-\overline{BC}^2-\overline{CA}^2}$$



㈩四面體的外心

1. 定義：

(1)三角形的外心定義爲其外接圓圓心。

(2)定義四面體的外心：Q爲四面體 D－ABC 的外心

$\Longleftrightarrow$ Q爲四面體 D－ABC外接球的球心

$\Longleftrightarrow \overline{QA}=\overline{QB}=\overline{QC}=\overline{QD}$

2. 性質：

求出四面體的外接球，其球心即爲四面體的外心。

㈪四面體的傍心

1. 定義：

(1)三角形傍心的定義：△ABC中，∠A的傍切圓圓心稱爲∠A的傍心。

(2)四面體傍心的定義：四面體 D－ABC中，頂點A所對之傍切球球心稱爲傍心 I_A。

因此，傍心在四面體外部，且與四面體的四個平面等距。

2. 性質：

設 I_A 爲四面體 D－ABC頂點A所對傍切球的球心，則

$$\overrightarrow{OI_A}=\frac{S_B\cdot\overrightarrow{OB}+S_C\cdot\overrightarrow{OC}+S_D\cdot\overrightarrow{OD}-S_A\cdot\overrightarrow{OA}}{S_B+S_C+S_D-S_A}$$

㈫四面體的垂心

1. 定義：

(1)三角形的垂心定義爲其三高的交點。

(2)定義四面體的垂心：H爲四面體 D－ABC的垂心

$\Longleftrightarrow \overrightarrow{AH},\overrightarrow{BH},\overrightarrow{CH},\overrightarrow{DH}$ 依次爲平面 BCD, ACD, ABD, ABC的法向量。

$\Longleftrightarrow$ H 爲四高（頂點與其在所對平面的投影點連接而成的線段）交點。

2.性質：

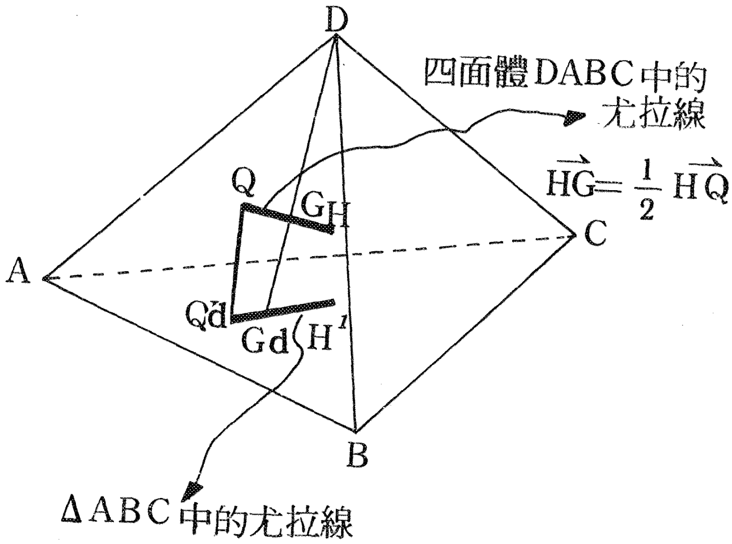
四面體的垂心不一定存在。

垂心存在的充要條件爲 $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0 \\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0 \\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \end{cases}$

(十三)尤拉線：

若四面體的垂心存在，則其外心 Q，重心 G，垂心 H 三點共線，

且滿足： $\overrightarrow{HG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HQ}$



(十四)四面體 D－ABC內一點 T 使到各頂點距離和最小，此 T 點滿足：

1. P－QRS 爲四面體 D－ABC 的外接正四面體。

2. $\overline{TA},\overline{TB},\overline{TC},\overline{TD}$ 依次垂直於正四面體 P－QRS 的四個面。

且 $\overline{TA}+\overline{TB}+\overline{TC}+\overline{TD}$ 的最小値爲正四面體 P－QRS 的高。

㈤在四面體內（含面）一點到各稜距離和的最小值爲

$$\frac{3\,\mathrm{Min}\,(h_A+h_B+h_C+h_D)}{\mathrm{Max}\,(\sin\theta_i+\sin\theta_j)}$$

其中 h_A 爲四面體 D－ABC 內一點到 BCD 平面的距離。

㈥若四面體各面的面積互不相等，則面積最大的面所對的頂點到各面的距離和最小，其值即爲此最大面上的高。

四、研究結論

㈠對某一三角形的問題可能有多種解法，但未必每一解法都可以合理的推廣到四面體來。我們曾經嘗試多種解法，歷經多次失敗，然後才得出本文的這些結果，就其歷程與結果來看，四面體可視爲三角形在空間中的延伸。

㈡四面體的餘弦定理，西瓦共點定理、孟氏共面定理、重心、內心、傍心、外心、尤拉線以及四面體內一點到各面、各頂點距離和最小等的推法與結果與三角形相似。

㈢四面體的正弦定理、正切定理，結果與三角形略有不同；但四面體的垂心不一定存在以及用六稜長表示體積的公式均與三角形迴異。

㈣能否將每一三角形的性質適當的推廣到四面體的前提是對三角形的性質是否相當熟稔，所以：若想對四面體的性質作進一步的了解，就必須在三角形多下工夫。以下是本文已經找到的有關四面體重要性質的摘要：

設 S_A 表四面體 D－ABC 頂點 A 所對△BCD 的面積。

θ_{AC} 表頂點 A，C 所對△BCD 平面及△ABD 平面所夾的平面角。

V 表四面體的體積。

五、參考資料

㈠高中數學實驗教材第三冊。

㈡數學和數學家的故事。

㈢ Vector Analysis —— Louis Brand。

評　語

㈠題材本身雖然是立體幾何上的傳統題材，但由作品的一些結果看來顯然是自己做的。

㈡作品本身的系統性和完整性對高中生來說是非凡的。

㈢作品是作者長期共同討論的結果；這個過程無疑地訓練了作者的研究能力和表達能力。

㈣作者具有合作研究的傾向。