立體空間密碼問題

高中組數學科第三名

景美女高

作　　者：楊汘如

指導教師：戴安身

一、動機

這次科展我的主題是——平衡中心的研究，這是延續我國三時的科展——「垃圾處理場的位置問題——平衡中心的研究」而來的。問題是：已給定空間中N個相異點 A_i ，$i=1,2,\cdots\cdots,N$，求一點

P_0 ，使得 $\Phi(P_0)=\min\Phi(P)$，$\Phi(P)=\sum_{i}^{N}\overline{PA_i}$

這個問題的來源是：在一平面上有幾個城鎮，位於 A_1 ，A_2 ，$\cdots\cdots A_N$ ，要共同設置一個垃圾處理場。設場的費用是一定的，而設立之後的費用——運費，則和與諸城市之距離和（及垃圾重量）成正比。場址P應設何處方使運費最少？運費就是 $\Phi(P)$。

這個問題並不好做，我只做出城鎮都在一直線上的等權、（垃圾等重）不等權情形，三鎮、四鎮（不共線）的等權情形，及附帶的，假設運費與距離平方正比時之情形。

現在上了高中，學到三維的空間，於是我們應該將平面上的城鎮推廣為空間中的鎮，即諸 A_i 不必共面！

在平面的情形中，等權三鎮情形最是有趣，所以我主要做的，也是比較可能做的，是空間中等權四鎮的情形。

二、分析着眼點

將距離（運費）推成位能，這個想法很有趣，是國中時看「給你一把鑰匙」想到的（它是以時間推成位能）。在力學，我們知道「力

的方向就是位能減少的方向」；（這裡是「平衡中心應往的方向，是「總距」減少的方向」）∴當位能最少時（總距最少時）力爲零（到達平衡中心）。這是正則情形，但在特別的情況——中心位於一鎮上，則爲奇異情形。

三、分析過程：

㈠先說明一個要用到的算式。

若 $c>0$ 且爲常數，ε 爲很小的變數，則

$$\sqrt{c^2+\varepsilon}=c+\frac{\varepsilon}{2c}-\frac{\varepsilon^2}{8c^3}+\cdots\cdots$$

證：$\sqrt{c^2+\varepsilon}=c\sqrt{\left(1+\frac{\varepsilon}{c^2}\right)}$

所以問題在於 $\sqrt{1+x}$ 的計算，$|x|$ 很小

而 $\sqrt{1+x}=\sqrt{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{4}}$

$$=\left(1+\frac{x}{2}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{4\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}}$$

$$=\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x^2}{8\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}+\text{更小的項}\right)$$

然 $\dfrac{x^2}{8\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{x^2}{8}\cdot\left(1-\left(x+\frac{x^2}{4}\right)+\left(x+\frac{x^2}{4}\right)^2\cdots\cdots\right)$

$$\therefore\sqrt{1+x}=\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x^2}{8}+\text{更小的項}\right)$$

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\text{更小的項}$$

$$\therefore \sqrt{c^2+\varepsilon} = c\left(1+\frac{\varepsilon}{2c^2}-\frac{\varepsilon^2}{8c^4}\right)+\cdots\cdots$$

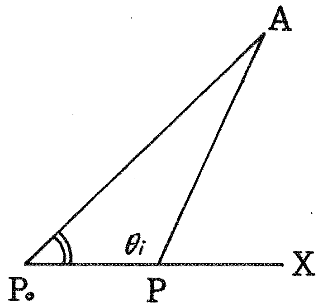
$$= c+\frac{\varepsilon}{2c}-\frac{\varepsilon^2}{8c^3}+\cdots\cdots$$

其實這是可以直接用「二項式定理」做，然而分數指數的二項式定理要用微分學，可以說很不熟，太深了，故硬算之。

㈡若 P_0 , A_1 , A_2 ⋯⋯ A_N 為 $N+1$ 個相異點，以 P_0 為原點作 x 軸，另有一點 P 在 x 軸上，坐標 x，｜x｜很小。

則 $\Phi_N(P)=\sum_{i=1}^{N}\overline{PA_i}$ 可寫成 $\Phi(x)$。（N 固定時可以省去不寫！）

今設 $\overrightarrow{P_0A_i}$ 與（正）x 軸夾了 θ_i 的角（如圖）。



由餘弦定律，$\overline{PA_i}^2=\overline{P_0A_i}^2-2\cos\theta_i\,\overline{P_0A_i}\,x+x^2$

所以 $\overline{PA_i}=\sqrt{\overline{P_0A_i}^2+\left[-2\cos\theta_i\,\overline{P_0A_i}\,x+x^2\right]}$

$$=\overline{P_0A_i}+\frac{\varepsilon_i}{2\overline{P_0A_i}}-\frac{\varepsilon_i^2}{8\overline{P_0A_i}^3}+\text{高次項}$$

其中 $\varepsilon_i=\left[-2\cos\theta_i\,\overline{P_0A_i}\,x+x^2\right]$

$$\therefore \frac{\varepsilon_i}{2\overline{P_0A_i}}=-x\cos\theta_i+\frac{x^2}{2\overline{P_0A_i}} \quad ;$$

$$\frac{\varepsilon_i^2}{8\overline{P_0A_i}^3}=\frac{4\cos^2\theta_i\,\overline{P_0A_i}^2\,x^2}{8\overline{P_0A_i}^3}+\text{高次項}$$

$$=\frac{x^2\cos^2\theta_i}{2\overline{P_0A_i}}+\text{高次項}$$

$$\therefore \overline{PA_i} = \overline{P_0A_i} - x\cos\theta + \frac{x^2}{2\overline{P_0A_i}} - \frac{x^2\cos^2\theta_i}{2\overline{P_0A_i}} + \text{高次項}$$

$$= \overline{P_0A_i} - x\cos\theta + \frac{x^2\sin^2\theta_i}{2\overline{P_0A_i}} + \cdots\cdots$$

$$\therefore \Phi_N(P) = \Sigma\overline{P_0A_i} - x\sum_1^N\cos\theta_i + x^2\left[\sum_1^N\frac{\sin^2\theta_i}{2\overline{P_0A_i}}\right]$$

$+$高次項

$$= \Phi_N(P_0) - x\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}_N(P_0) + x^2\left[\sum_1^N\frac{\sin^2\theta_i}{2\overline{P_0A_i}}\right] + \cdots\cdots$$

其中 $\mathbf{u}$ 爲 x 軸之（正）單位向量，$\mathbf{f}_N(P_0) = \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn}(\overrightarrow{P_0A_i})$

$\operatorname{sgn} \upsilon = \upsilon / |\upsilon|$ 表示（不爲零的）向量 υ 的方向，

$\because \cos\theta_i$ 爲：$\operatorname{sgn}(\overrightarrow{P_0A_i})$ 在 $\mathbf{u}$ 方向之成分。

(三)回到主題，那麼主要定理是：——————

臨界點原理（正則情形）

若 P_0 與諸點 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_N$ 互異，且 P_0 是 $\Phi_N(P)$ 之（局部）極小點，則 $\mathbf{f}_N(P_0) \equiv 0$，反之 $\mathbf{f}_N(P_0) = 0$，則 P_0 爲 Φ_N 之（局部）極小點。

證明：若 $\mathbf{f}_N(P_0) \neq 0$，取 $\mathbf{u}$ 爲其方向，則 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}_N(P_0) > 0$

$\therefore x\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}_N(P_0) > 0$ （$\because$ x 爲很小正數）

$$\therefore \Phi_N(P) = \Phi_N(P_0) - x\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}_N(P_0) + x^2\left[\sum_1^N\frac{\sin^2\theta_i}{2\overline{P_0A_i}}\right] + \cdots\cdots$$

$$< \Phi_N(P_0)$$

違背了 $\Phi_N(P_0)$ 之極小性。

反之，$\mathbf{f}_N(P_0)$ 爲零時，只要 x 夠小而非 0，

則 $\Phi_N(P) > \Phi_N(P_0)$

$\because$ 只要 P_0、A_1、A_2、$\cdots\cdots A_N$，不共線，$\Sigma\dfrac{\sin^2\theta_i}{2\overline{P_0A_i}} > 0$

(四)「奇異情形」——若（局部）極小點 P_0 是 A_i 之一，我們就設為 A_N，u 為 $\overrightarrow{P_0P}$ 之（正）方向，$x=\overline{P_0P}>0$。

此時 $\Phi_N(P_0)=\overline{P_0P_0}+\Phi_{N-1}(P_0)=\Phi_{N-1}(P_0)$

$$\text{而}\ \Phi_N(P)=\sum_{i=1}^{N}\overline{PA_i}=\overline{PA_N}+\sum_{i=1}^{N-1}\overline{PA_i}=\overline{PA_N}+\Phi_{N-1}(P)$$

$$=x+\Phi_{N-1}(P_0)-x\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}_{N-1}(P_0)+x^2\left[\sum_{1}^{N-1}\frac{\sin^2\theta_i}{2\overline{P_0A_i}}\right]+\cdots\cdots$$

$$=\Phi_N(P_0)+(1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}_{N-1}[P_0])\,x+x^2\left[\sum_{1}^{N-1}\frac{\sin^2\theta_i}{2\overline{P_0A_i}}\right]+\cdots\cdots$$

欲 P_0 為極小點，即「$\Phi_N(P_0)<\Phi_N(P)$，對一切 u」，充要條件是：

$$(1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}_{N-1}(P_0))\geq 0$$

即 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}_{N-1}(P_0)\leq 1$，但 u 可以任意，所以由 Cauchy 不等式，就證明了：

奇異極小點原理：若 $\|\mathbf{f}_{N-1}(A_N)\|\leq 1$，則 A_N 為 Φ_N 之（局部）極小點，反之亦然。

(五)凸性原理：

對任 N 個點 A_1，A_2，A_3 …… A_N，凸組合 $\sum_{1}^{N}\alpha_iA_i$，$\alpha_i>0$，$\Sigma\alpha_i=1$，表示重心，α_i 為相對重量。變動重量，則所有可能之重心之集合 K 稱點 A_1，A_2 …… A_N 之「凸包」——含這些點之最小凸集。

例如若 $A_1A_2A_3A_4$ 為立體空間中的四點，且不在同一平面上，則它們的凸包是閉四面體 k。

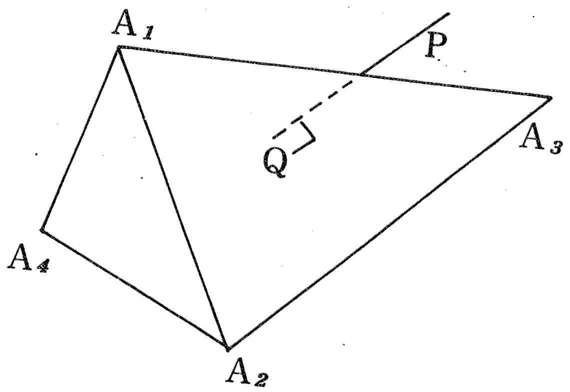
定理 1　設 P 在 k 之外，k 只有一點 Q 最接近 P，那麼，$\Phi(P)>\Phi(Q)$，因此 Φ 之極小點必在 k 中。

證　明：（如圖是個典型 $N=4$）自 P 做垂線 PQ 到平面 $A_1A_2A_3$，A_4 在另外一側，∴ $\angle PQA_4$ 為鈍角，由畢氏定理 $\overline{PA_j}>\overline{QA_j}$（$j=1,2,3$）

又 $\overline{PA_4}^2=\overline{PQ}^2+\overline{QA_4}^2-2\overline{QP}\,\overline{QA_4}\cos\angle PQA_4$

但 $\cos\angle PQA_4 < 0$

$\therefore \overline{PA_4^2} > \overline{QA_4^2}$　　$\therefore \Phi_4(P) > \Phi_4(Q)$



以每個三角形面爲底，向外做三角柱（無限），柱內的點P都可做出垂足Q來！除外，四個頂點又有向外（無限的）三角錐，若P在錐中，則以錐頂爲Q，仍然Φ（P）>Φ（Q）。

別　證：此亦臨界點原理之推論，P在k外，就可用一平面π來分隔開P和k，作π之單位法向量n，（向k這側）於是

$\overrightarrow{PA_i}\cdot n > 0$，$\therefore n\cdot f(P) \neq 0$

$\therefore f(P) \neq 0$，P非極小點。

定理2　函數Φ在k中必有（最大值及）最小值。

理　由：Φ當然是連續變化的，此即所謂Weierstrass定理。

四、等權四鎮問題之解答：———

(一)先考慮「奇異」的可能性：有無可能Φ在某個頂點（例如A_4）取得最小值？

其充要條件就是：$f_3(A_4)$的範數（向量長度）≤ 1。但

$f_3(A_4) = \mathrm{sgn}\,\overrightarrow{A_4A_1} + \mathrm{sgn}(\overrightarrow{A_4A_2}) + \mathrm{sgn}(\overrightarrow{A_4A_3})$

今設u，v，w爲三單位向量，（範數均爲1）

則 $|u+v+w|^2 = |u|^2 + |v|^2 + |w|^2 + 2\Sigma u\cdot v$

$= 3 + 2\Sigma u\cdot v$

欲之≤ 1　則須$\Sigma\, u\cdot v \leq -1$

於是$|\, f_3(A_4)\,| \leq 1$之條件可改為

$$\Sigma\, u\cdot v = \Sigma \cos\angle A_1A_4A_2 \leq -1$$

換句話說：自頂點A_4到$A_1A_2A_3$所作三角要相當鈍，使得其「餘弦和」≤ -1。

(二)再考慮正則的情形，此時

$$0 = f_4(P_0) = \sum_{1}^{4} \overrightarrow{P_0A_i}$$

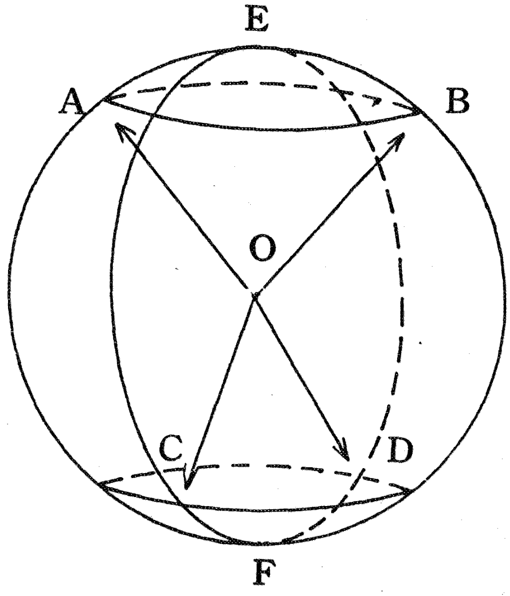
假設我們在單位球面上取四點A，B，C，D使$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$，分別為$\overrightarrow{P_0A_1}\cdots\cdots\overrightarrow{P_0A_4}$之方向，則$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=0$，可設$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\neq 0$（即A，B不在對頂方向上！）劣大圓弧$\widehat{AB}$之中點為E，則$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$之方向為$\overrightarrow{OE}$，大小為

$$2\cos(\angle AOB/2)$$

$\therefore (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=0$，表示取$\widehat{CD}$中點F時，$\overrightarrow{OE}$與$\overrightarrow{OF}$反向，即E，F為對稱點，並且$\widehat{CD}$與$\widehat{AB}$弧長同。

$(\angle AOB = \angle COD)$

換句話說，E與F可看成北極與南極，而A，B，C，D之緯度相同——A，B為北緯，C，D為南緯；A與B的經度同，一為東經一為西經，C，D亦一東一西，經度同。



五、和二維情形比較：

㈠二維時，$\Phi_3(P)$問題（三鎮等權）在奇異情形，若$\Phi_3(A_3)$為極小，則須$|f_2(A_3)|\leq 1$，即$(\operatorname{sgn}\lceil\overrightarrow{A_3A_1}\rceil+\operatorname{sgn}\lceil\overrightarrow{A_3A_1}\rceil)^2=1+1+2\operatorname{sgn}\overrightarrow{A_3A_1}\cdot\operatorname{sgn}\overrightarrow{A_3A_2}\leq 1$

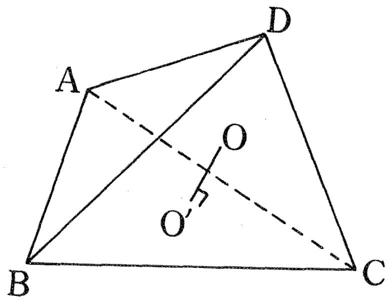
故$\overrightarrow{A_3A_1}$與$\overrightarrow{A_3A_2}$夾角餘弦$\leq -1/2$，$\angle A_1A_3A_2\geq 120^\circ$

㈡在正則情形$f_3(P_0)=0$表示$\overrightarrow{P_0A_i}$互夾120°角！！這是自正$\triangle ABC$中心O到三頂點所張的角度。

所以我起初猜想：空間中的四點A_i，$(i=1,2,3,4)$到平衡中心P_0的連線，$\overrightarrow{PA_i}$互相也該張了個角度。

109.4712206°——自四面體外心O到各頂點所張之角度！ 但猜想錯誤！

※正四面體之計算



今作$\triangle ABC$之中心O'，令

$\overline{OA}=1$，$\overline{O'A}=r$，則

$\overline{O'O}=\sqrt{1-r^2}$

而$\overline{OD}:\overline{O'O}=3:1$，

即$\sqrt{1-r^2}=\dfrac{1}{3}$，$r^2=\dfrac{8}{9}$

$r=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\overline{AB}=2\sqrt{6}/3$

$\therefore\angle AOB=2\arcsin\sqrt{6}/2\doteqdot 109.4712206^\circ$

退化情形——如果四鎮$A_1A_2A_3A_4$在一平面上，（但任三點不共線）這是一種退化情形。

1* 奇異的退化：若點A_4慢慢下降，落在$\triangle A_1A_2A_3$之內，則$\|f_3(A_4)\|<1$。

此時，可設$\angle A_1A_4A_2$，$\angle A_2A_4A_3$，$\angle A_3A_4A_1$中最小者為$\angle A_1A_4A_2$，後二者皆為鈍角，$\pi-\alpha_1$，$\pi-\alpha_2$（α_1及α_2為銳角）。

故 $\angle A_1A_4A_2 = \alpha_1 + \alpha_2$，

而 $\cos\angle A_1A_4A_2 + \cos\angle A_2A_4A_3 + \cos\angle A_3A_4A_1$

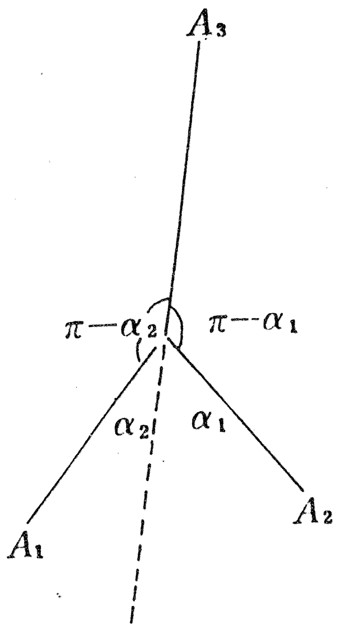
$$= -\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 + \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$= -2\cos\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right)$$

$$+ 2\cos^2\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right) - 1$$

$$= -1 - 4\cos\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right) \cdot$$

$$\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2} < -1$$

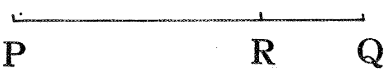


2* 正則的退化：$A_1A_2A_3A_4$ 成爲凸四角形，那麼平衡中心 P_0 就是 A_1A_3 與 A_2A_4 之交點，因爲此時 $f_4(P_0) = 0$

六、唯一性：——

我們相信，若 $\Phi(P_0)$ 爲局部極小則點 P_0 唯一。今設 P 與 Q 都是極小點，考慮線段 $\overline{PQ}$ 上一點 R，則 $R = \alpha P + \beta Q$，$\alpha > 0$，$\beta > 0$，$\alpha + \beta = 1$，

此 $\alpha = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PQ}}$ $\beta = \dfrac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}$



此時，對任一點 A，$\overline{AR} = \alpha\,\overline{AP} + \beta\,\overline{AQ}$

因此 $\overrightarrow{AR} \leq \alpha\,\overrightarrow{AP} + \beta\,\overrightarrow{AQ}$，等號表示 A 在 $\overline{PRQ}$ 直線上，

$$\overline{AR}^2 = |\overrightarrow{AR}|^2$$

$$= |\alpha\,\overrightarrow{AP}|^2 + |\beta\,\overrightarrow{AQ}|^2 + 2\alpha\,\overrightarrow{AP} \cdot \beta\,\overrightarrow{AQ}$$

$$\leq |\alpha\overrightarrow{AP}|^2+|\beta\overrightarrow{AQ}|^2+2|\alpha\overrightarrow{AP}||\beta\overrightarrow{AQ}|$$

$$=(\alpha\overline{AP}+\beta\overline{AQ})^2$$

等號表示$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$同向！A在$\overline{PQ}$線段外，直線$\overline{PQ}$上！

故$\Phi(R)\leq\alpha\Phi(P)+\beta\Phi(Q)$

當$\Phi(P)$，$\Phi(Q)$同爲極小時，$\Phi(R)$就更小，除非諸A_i在$\overline{PRQ}$直線上，且在線段外。

七、最小方差問題：——

如果運費和距離平方正比，這時候，標的函數成了Ψ：

$$\Psi(P)=\Sigma w_i\overline{PA_i}^2$$

我們不必假設等權，因此，設w_i爲「垃圾重量」，這時Ψ的最小點是諸點A_i的重心：

$$P_0\equiv\Sigma w_iA_i/\Sigma w_i$$

因爲$w_i\overline{PA_i}^2$的負梯度是$2w_i\overrightarrow{PA_i}$，所以「力」爲$2\Sigma w_i\overrightarrow{PA_i}$，令之爲零，就得到$\Psi$的極小點。

評　語

㈠選題良好。

㈡作者避免用微積分的方法，而代以高中生可以理解的二項式展開法考慮平衡點的條件，顯示作者已具有初等的數學分析能力。

㈢作品在理論上具有系統性和完整性。

㈣作品顯示了作者具有敏銳的觀察力。