利用正方形剪裁正多邊形

高中組數學科第二名

新竹中學　　　　作　　者：施冠宇
指導教師：儲啓政

一、研究動機

在實際的工藝應用上，我們有時順利用正方形的材料，剪裁出正三角形、正五邊形、正六邊形或邊數更多的正多邊形，爲了減少材料的浪費，我們要使剪裁出之正多邊形面積最大，因此，如何剪裁才能使所剪裁的正多邊形面積達到最大，又面積最大時其與正方形面積的比爲何，便是本文探討的主題。

二、研究目的

當所取選之正方形面積固定時，找出其剪裁出正多邊形的最大面積及此正多邊形在正方形內之正確位置，並用電腦驗證其正確性。

三、研究過程及方法結果

㈠大略過程：

最初在研究本問題時，自然是將外圍的正方形固定，然後在其內部尋找適當的點做爲所要剪裁正多邊形的中心，並考慮將正多邊形旋轉一個適當的角度來安置，結果困難重重，百思不得其解，最後才頓悟到何不將正多邊形固定，去尋找包含它的最小正方形，這是與本來問題同義的問題，只是反向考慮罷了！

㈡詳細方法及結果

1.符號與定義：

在坐標平面上

令 $A_k = (\cos\frac{2k\pi}{n}, \sin\frac{2k\pi}{n})$ 其中 $k = 0, 1, 2 \cdots\cdots n-1$。

則 $A_0A_1 \cdots\cdots A_{n-1}$ 是一個半徑爲一的圓內接正 n 邊形，此正 n 邊形以 P_n 表之

令 $L(\theta, R)$ 表直線

$$X\cos\theta + Y\sin\theta = \cos\frac{2k\pi}{n}\cos\theta + \sin\frac{2k\pi}{n}\sin\theta$$

即 $$X\cos\theta + Y\sin\theta = \cos(\frac{2k\pi}{n} - \theta)$$

亦即以 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 爲法向量且過 A_k 之直線

再令 $f(\theta)$ 表平行 $L(\theta, 0)$, $L(\theta, 1)$, $\cdots\cdots L(\theta, n-1)$ 兩兩之間的最大値

又令 $g(\theta) = f(\theta - \frac{\pi}{2})$

$$h(\theta) = \mathrm{Max}[f(\theta), g(\theta)]$$

2. f、g、h 都是週期函數也都是偶函數

(1)函數 f：

由 f 的定義顯然可知

$f(\theta + \frac{2\pi}{n}) = f(\theta)$ 　　即 $\frac{2\pi}{n}$ 是 f 的週期

又 $(\theta+\pi, k) = L(\theta, k)$ 　所以 $f(\theta+\pi) = f(\theta)$

當 n 爲奇數時，令 $n = 2m+1$

$$f(\theta) = f(\theta+\pi) = f(\theta+\pi-\frac{2\pi}{n}\cdot m)$$

$= f(\theta+\frac{\pi}{n})$ 　$\therefore$ n 爲奇數時，f 週期可縮短爲 $\frac{\pi}{n}$

由於多邊形 P_n 對 X 軸對稱，故 $f(\theta) = f(-\theta)$，即 f 爲偶函數

(2)函數 g：

$\because g(\theta)=f(\theta-\frac{\pi}{2})$ $\therefore$函數 g 只是函數 f 的平移，所以 g 與 f 爲具有相同週期的週期函數

再者 g 爲偶函數，因爲

(a) $n=4\ell$ 時

$$g(\theta)=f(\theta-\frac{\pi}{2})=f(\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{n}\cdot\ell)$$

$=f(\theta)$……ⓐ $\therefore g(-\theta)=f(-\theta)=f(\theta)$

$=g(\theta)$

(b) $n=4\ell+2$ 時

$$g(\theta)=f(\theta-\frac{\pi}{2})=f(\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{n}\cdot 1)$$

$$=f(\theta-\frac{\pi}{n})\cdots\cdots\cdots\cdots\text{ⓑ}$$

$$g(\theta)=f(-\theta-\frac{\pi}{n})=f(\theta+\frac{\pi}{n})$$

$$=f(\theta-\frac{\pi}{n})=g(\theta)$$

(c) $n=2m+1$ 時

$$g(\theta)=f(\theta-\frac{\pi}{2})=f(\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\cdot m)$$

$$=f(\theta-\frac{\pi}{2n})\cdots\cdots\cdots\cdots\text{ⓒ}$$

$$g(-\theta)=f(-\theta-\frac{\pi}{2n})=f(\theta+\frac{\pi}{2n})$$

$$=f(\theta+\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{n})=f(\theta-\frac{\pi}{2n})=g(\theta)$$

(3)函數 h

若 p 同爲 f 與 g 之週期，則

$h(\theta+P)=\mathrm{Max}[f(\theta+p),g(\theta+p)]$

$=\mathrm{Max}[f(\theta),g(\theta)]=h(\theta)$

所以 p也是 h之週期

又 $h(-\theta)=\mathrm{Max}[f(-\theta),g(-\theta)]=$

$\mathrm{Max}[f(\theta),g(\theta)]=h(\theta)$

所以 h也是偶函數

總而言之，f、g、h都是偶數，且n爲偶數時都以

$\frac{2\pi}{n}$ 爲週期，n爲奇數時都以$\frac{\pi}{n}$爲週期。

3.求函數 $h(\theta)$的最小值

因爲h既爲週期函數又爲偶函數，所以要討論$h(\theta)$之最小值，只需θ在半個週期內變化即可

(1) n爲偶數時，令 $n=2m$

則 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{n}$ 時

$f(\theta)=d[L(\theta,0),L(\theta,m)]$，即 $L(\theta,0)$，$L(\theta,m)$兩直線之距離

而 $L(\theta,0)$：$X\cos\theta+Y\sin\theta=\cos\theta$

$L(\theta,m)$：$X\cos\theta+Y\sin\theta=-\cos\theta$

故 $f(\theta)=2\cos\theta$

(ㄅ) $n=4\ell$時

由ⓐ知 $f(\theta)=g(\theta)$

所以 $h(\theta)=\mathrm{Max}[f(\theta),g(\theta)]$

$=\mathrm{Max}[f(\theta),f(\theta)]=f(\theta)$

當 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{n}$ 時 $h(\theta)=f(\theta)=2\cos\theta$

故 $h(\frac{\pi}{n})=2\cos\frac{\pi}{n}$ 爲 $h(\theta)$之最小值

(ㄆ) $n=4\ell+2$ 時

由ⓑ知 $f(\theta-\frac{\pi}{n})=g(\theta)$ 又 f 爲偶函數

$\therefore g(\theta)=f(\frac{\pi}{n}-\theta)$

f 在 $[0,\frac{\pi}{n}]$ 是遞減，可得

g 在 $[0,\frac{\pi}{n}]$ 是遞增

當 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2n}$ 時

$f(\theta)\geq f(\frac{\pi}{2n})=2\cos\frac{\pi}{2n}$

$\therefore h(\theta)=\mathrm{Max}[f(\theta),g(\theta)]$

$=f(\theta)\geq 2\cos\frac{\pi}{2n}$

同理當 $\frac{\pi}{2n}\leq\theta\leq\frac{\pi}{n}$ 時　$h(\theta)\geq 2\cos\frac{\pi}{2n}$

$\therefore 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{n}$ 時　$h(\theta)\geq 2\cos\frac{\pi}{2n}$

又 $f(\frac{\pi}{2n})=2\cos\frac{\pi}{2n}=g(\frac{\pi}{2n})$

$\therefore h(\frac{\pi}{2n})=2\cos\frac{\pi}{2n}$ 便是 $h(\theta)$ 的最小值

(2) n 爲奇數時，令 $n=2m+1$

則 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2n}$ 時

$f(\theta)=d[L(\theta,0),L(\theta,m+1)$

而 $L(\theta,0)$：$X\cos\theta+Y\sin\theta=\cos\theta$

$L(\theta, m+1): X\cos\theta + Y\sin\theta = -\cos\left(\frac{\pi}{n} - \theta\right)$

故 $f(\theta) = \cos\theta + \cos\left(\frac{\pi}{n} - \theta\right)$

$$= 2\cos\frac{\pi}{2n}\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \theta\right)$$

所以 f 在 $[0, \frac{\pi}{2n}]$ 中是遞增

由©知 $g(\theta) = f\left(\theta - \frac{\pi}{2n}\right) = f\left(\frac{\pi}{2n} - \theta\right)$

所以 g 在 $[0, \frac{\pi}{2n}]$ 中是遞減

當 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4n}$ 時

$h(\theta) = g(\theta) \geq g\left(\frac{\pi}{4n}\right) = f\left(\frac{\pi}{4n}\right)$

當 $\frac{\pi}{4n} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2n}$ 時

$h(\theta) = f(\theta) \geq f\left(\frac{\pi}{4n}\right)$

故當 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2n}$ 時

$h\left(\frac{\pi}{4n}\right) = \mathrm{Max}\left[f\left(\frac{\pi}{4n}\right) \cdot g\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right]$

$= 2\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{4n}$ 便是 $h(\theta)$ 之最小值

結果㈠：

邊長爲 1 的正方形所能剪裁最大正 n 邊形的面積以 a_n 表

(a) $n = 4\ell$ 時

$$a_n=\frac{n}{4}\tan\frac{\pi}{n}$$

(b) $n=4\ell+2$ 時

$$a_n=\frac{n}{2}\tan\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{n}$$

(c) $n=2\ell+1$ 時

$$a_n=n\tan\frac{\pi}{4n}\left(2\cos\frac{\pi}{2n}-\sec\frac{\pi}{2n}\right)$$

4. 如何剪裁

若 $f(\theta)$ 表 $L(\theta,i)$ 與 $L(\theta,j)$ 的距離，且 $g(\theta)$ 表 $L(\theta-\frac{\pi}{2},k)$ 與 $(\theta-\frac{\pi}{2},m)$ 之距離，則 $L(\theta,i)$，$L(\theta,j)$，$L(\theta-\frac{\pi}{2},k)$ 與 $L(\theta-\frac{\pi}{2},m)$ 所圍成的矩形以 $R(\theta)$ 表之

顯然 $R(\theta+\frac{\pi}{2})=R(\theta)$

且 $R(\theta)$ 與 $R(-\theta)$ 對 x 軸對稱

(1)當 n 為偶數時

令 $n=2m$

則 $f(\theta)$ 表 $L(\theta,i)$ 與 $L(\theta,i+m)$ 之距離，i 為 $0,1,2\cdots\cdots,m-1$ 其中的一個數

且 $g(\theta)$ 表 $L(\theta-\frac{\pi}{2},k)$ 與 $L(\theta-\frac{\pi}{2},k+m)$ 之距離，k 亦為 $0,1,2\cdots\cdots,m-1$ 其中的一個數

$L(\theta,i)$：$X\cos\theta+Y\sin\theta$

$=\cos\left(\frac{2i\pi}{n}-\theta\right)$

$L(\theta,i+m)$：$X\cos\theta+Y\sin\theta$

$$\cos\left(\frac{2(i+m)\pi}{n}-\theta\right)=-\cos\left(\frac{2i\pi}{2}-\theta\right)$$

所以原點到 $L(\theta, i)$ 與 $L(\theta, i+m)$ 的距離都是

$$\left|\cos\left(\frac{2i\pi}{n}-\theta\right)\right|$$

同理，原點到 $L(\theta-\frac{\pi}{2}, k)$ 與 $L(\theta-\frac{\pi}{2}, k+m)$

的距離都是 $\left|\cos\left(\frac{2k}{n}-\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right|$ 即 $\left|\sin\left(\frac{2k}{n}-\theta\right)\right|$

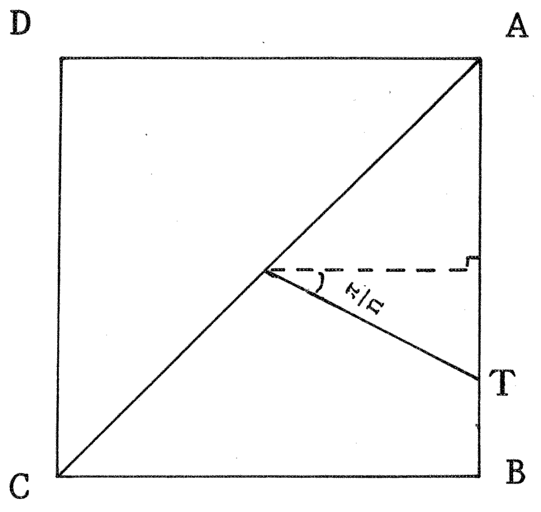
由於原點到矩形 $R(\theta)$ 兩雙對邊都等距離所以原點恒爲矩形 $R(\theta)$ 的中心，即多邊形 p_n 的中心與矩形 $R(\theta)$ 的中心重合

(ㄅ)當 $n=4\ell$ 時

$$f\left(\frac{\pi}{n}\right)=g\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad \therefore R\left(\frac{\pi}{n}\right) \text{是正方形}$$

由此可知，若有正方形ABCD，可取其中心點0爲正n邊形的中心點0爲正n邊形的中心，並在 $\overline{AB}$ 邊上取一點T使 $\angle AOT=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n}$，令T爲正n邊形的一個頂點，如圖(一)，則以0爲中心，T爲一個頂點的正多邊形，便是正方形ABCD所能剪裁的最大正n邊形。

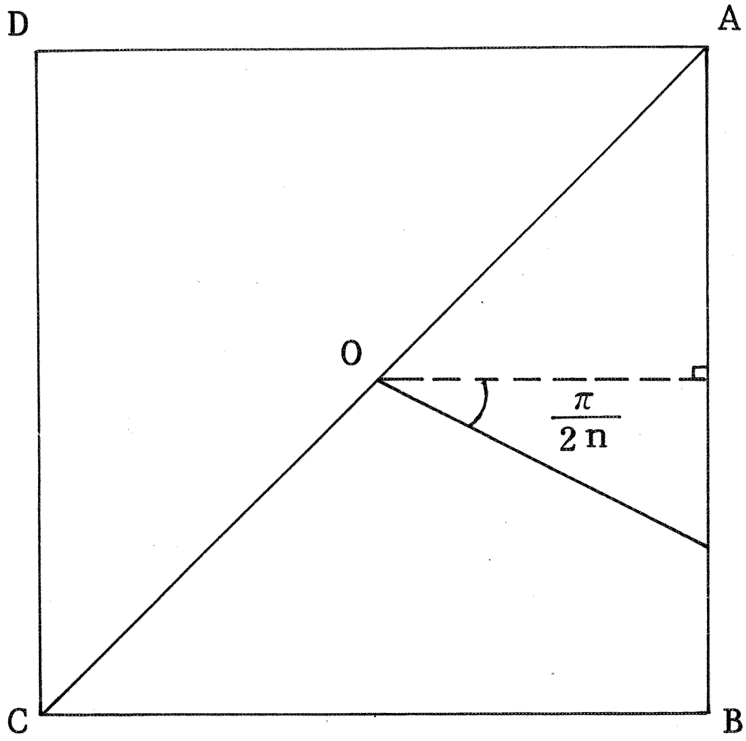
圖(一)：



(ㄆ)當 $n = 4\ell + 2$ 時

$f\left(\frac{\pi}{2n}\right) = g\left(\frac{\pi}{2n}\right)$，所以 $R\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ 是正方形，由此可知，若有正方形ABCD，可取其中心點O爲正n邊形的中心，並在 $\overline{AB}$ 邊上取一點T使 $\angle AOT = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n}$，令T爲正n邊形的一個頂點，如圖(二)，則以O爲中心，T爲一個頂點的正多邊形，便是正方形ABCD所能剪裁的最大正n邊形。

圖(二)：



(2)當n爲奇數時

令 $n = 2m + 1$

由ⓒ知 $g(\theta) = f\left(\theta - \frac{\pi}{2n}\right)$

$\therefore n\left(\theta + \frac{\pi}{2n}\right) = \mathrm{Max}\left[\, f\left(\theta + \frac{\pi}{2n}\right),\ g\left(\theta + \frac{\pi}{2n}\right)\right]$

$$=\mathrm{Max}\left[f\left(\theta+\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{n}\right),\ f\left(\theta+\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{2n}\right)\right]$$

$$=\mathrm{Max}\left[f\left(\theta-\frac{\pi}{2n}\right),\ f(\theta)\right]$$

$$=\mathrm{Max}\left[g(\theta),\ f(\theta)\right]=h(\theta)$$

又 $n\left(\frac{\pi}{4}\right)=h\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{\pi}{2n}\cdot m\right)=h\left(\frac{\pi}{4n}\right)$

且 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n}\cdot m\right)=f\left(\frac{\pi}{2\pi}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$f\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2m}\right)=g\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$\therefore h\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 也是 $h(\theta)$ 的最小值，且 $R\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 是正方形，

亦即 $R\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 與 $R\left(\frac{\pi}{4n}\right)$ 一樣，也是包含正多邊形 P_n 的一個最小正方形

又 $R\left(-\frac{\pi}{4}\right)=R\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=R\left(\frac{\pi}{4}\right)$

且 $R\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 與 $R\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 對 x 軸對稱

$\therefore R\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 對稱於 x 軸，交即 $R\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的對角線在 x 軸上，

因此，多邊形 P_n 的中心 O 點及頂點 A_0 都在 $R\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的一條對角線上。

$$L\left(\frac{\pi}{4n},\ 0\right):\ X\cos\frac{\pi}{4n}+Y\sin\frac{\pi}{4n}=\cos\frac{\pi}{4n}$$

原點 O 到直線 $L\left(\frac{\pi}{4n},\ 0\right)$ 的距離爲 $\cos\frac{\pi}{4n}$

$\therefore P_n$ 的中心到正方形 $R\left(\frac{\pi}{4n}\right)$ 的一邊的距離爲 $\cos\frac{\pi}{4n}$

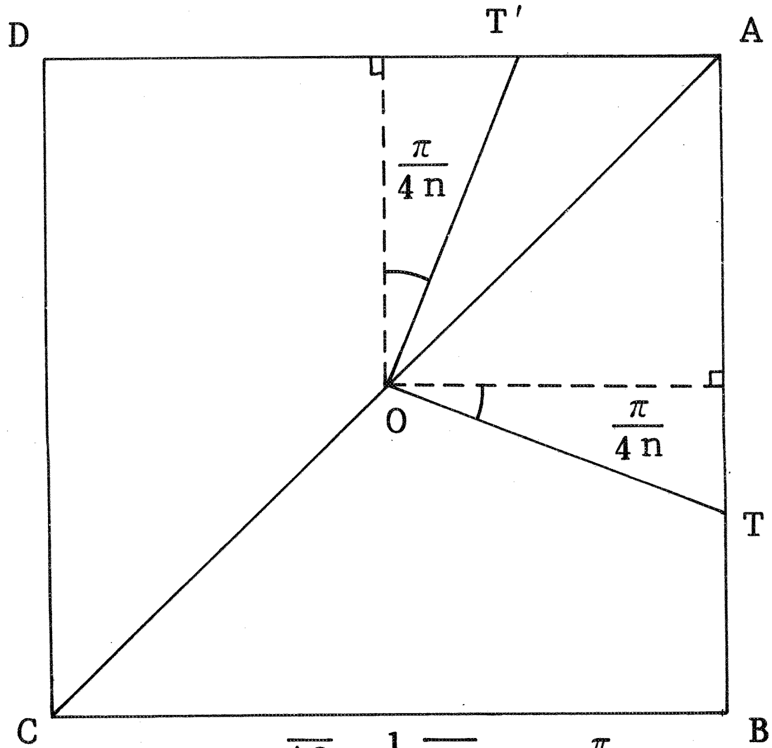
，但 $R\left(\frac{\pi}{4n}\right)$ 的邊長爲 $n\left(\frac{\pi}{4n}\right)$

$= 2\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{4n}$

$$\frac{\cos\frac{\pi}{4n}}{2\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{4n}} = \frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{2n}$$

由以上討論可知，若有正方形 ABCD，可設內含的最大正 n 邊形的中心 O 點與一頂點在對角線 $\overline{AC}$ 上，且 O 點到 $\overline{AB}$ 邊的距離與正方形邊長的比値爲 $\frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{2n}$，則 $\frac{\overline{AO}}{\overline{AC}}$ $=\frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{2n}$，亦即 $\overline{AO}=\frac{1}{2}\overline{AC}\sec\frac{\pi}{2n}$ 如圖(三)。

圖(三)：



$\overline{AO}=\frac{1}{2}\overline{AC}\sec\frac{\pi}{2n}$

中心的位置決定了，只要再決定一個頂點，正 n 邊形就可以確定了。在圖(三)中，如果將 O 視為原點，$\overrightarrow{OT}$ 射線視為 X 軸的正向，則 T 即為一個頂點，如果將 $\overrightarrow{OT}$ 射線視為 X 軸的正向，則 T′ 即為一個頂點，已知多邊形 P_n 有一個頂點在 $\overline{AC}$ 上，假設是 A_k

(ㄅ)若 $\overrightarrow{OT}$ 為 X 軸正向

則 $\frac{\pi}{4n}+\frac{\pi}{4}=\frac{2k\pi}{n}$ or $\frac{\pi}{4n}+\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{4k\pi}{n}$

得 $m+1=4k$ or $5m+3=4k$

$\therefore$ m為奇數，令 $m=2\ell+1$

得 $n=2m+1=2(2\ell+1)+1=4\ell+3$

(ㄆ)若 $\overrightarrow{OT'}$ 為 x 軸正向

則 $\frac{\pi}{4n}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{2k\pi}{n}$ or $\frac{\pi}{4n}+\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}=\frac{2k\pi}{n}$

得 $3m+2=4k$ or $7m+4=4k$

$\therefore$ m為偶數，令 $m=2\ell$

得 $n=2m+1=2(2\ell)+1=4\ell+1$

因此當 $n=4\ell+3$ 時只要在 $\overline{AB}$ 邊上取 T 點使 $\angle AOT=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4n}$，T 就是多邊形的一頂點，而當 $n=4\ell+1$ 時，只要 $\overline{AD}$（$\overline{AB}$ 也可以，因為多邊形對稱於 $\overline{AC}$）邊上取 T′ 點，使 $\angle AOT'=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4n}$，T′ 就是多邊形的一個頂點了。

四、結　論

為了使結論簡單明瞭，不妨將整個問題坐標化，假設正方形 ABCD 的四個頂點在坐標平面上的坐標分別為（0，0），（1，0），（1，1），（0，1）則正多邊形 $A_0\ A_1 \cdots\cdots A_{n-1}$ 各頂點的坐標取為

$$A_i = [\, h + r\cos(\alpha + \frac{2i\pi}{n}),\ k + r\sin(\alpha + \frac{2i\pi}{n})\,]$$

$i = 0, 1, 2, 3 \cdots\cdots n-1$　其中 h，k，r，α 根據 n 除以 4 的餘數，取法如下：

n	h	k	r	α
$n \equiv 0 \pmod 4$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{n}$	$-\frac{\pi}{n}$
$n \equiv 2 \pmod 4$			$\frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{2n}$	$-\frac{\pi}{2n}$
$n \equiv 1 \pmod 4$	$1-\frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{2\pi}$		$\frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{2n}\sec\frac{\pi}{4n}$	$\frac{\pi}{4n}$
$n \equiv 3 \pmod 4$				$-\frac{\pi}{4\pi}$

多邊形 $A_0A_1 \cdots\cdots A_{n-1}$ 就是正方形 ABCD 所能剪裁出的最大正 n 邊形。

五、討　論

(一)本問題之結論與 n 除以 4 的餘數有密切關係，故猜測在推廣本問題（利用正 p 邊形剪裁正 n 邊形）時，結果也會和 n 除以 p 的餘數有密切關係。

(二)利用結論寫成電腦程式，畫出的圖形相當正確，故結論無誤。

評　語

㈠作品題材非常適合高中生。

㈡作品具完整性；利用函數之週期性解決問題上具非凡之創意。

㈢作品兼顧理論性和使用性；其中一部份具體地指出如何實際地剪裁正方形內之最大正多邊形。

㈣作品顯示了作者思想細密、活潑；並具有系統性解決數學問題的能力。