

族群互動的數學探討

高中組數學科第一名

省立台中第一高級中學

作者：黃一弘、許宏志

沈里正、魏立杰

指導教師：梁光裕、林福男

一、研究動機

看到「數學的神秘與奇趣」一書中對人口成長曲線的證明。而萌發了「何不把這樣的方法推廣到食物鏈，甚至食物網中各動物族群上」的念頭。

二、研究目的

本文的目的，在於建立一個數學模型來說明動物族群的變化情形。說得明白一點，本文的中心問題為：各動物族群對時間的函數為何？

三、研究設備器材

全亞十六位元電腦一套

四、研究過程及方法

(一)我最早發現指數曲線是在參考資料(一) 240 頁中。其中設人口數 y 、時間 t 則可得指數函數 $y = Ae^{kt}$ (A 為常數)。在上述之推導並未考慮空間壓力。根據生態學家的研究，由於空間有限，故動物繁殖過多時，會因爭奪空間互相殘殺，而增高死亡率，故增加率不應為一定值 K ，而是隨著族群個數的增加而減少，我們假設兩者成線性關係，即增加率 = $K - Py$ (P 為常數) 則

$\frac{dy}{dt} = (K - Py)y$ ，移項、積分、整理後可得

$$y = \frac{KWe^{kt}}{1 + PWe^{kt}} \quad W \text{ 爲常數}$$

當 $t \rightarrow \infty$ 時， $y \rightarrow K/P$ ，可以看出 y 值已受到空間壓力的限制不會無限制發展。

(二)食物網方程組 I

先考慮以下之食物鏈

草(植物) \rightarrow A 動物 \rightarrow B 動物

在時間間隔 dt 內，A 增加 dA ，B 增加 dB ，則

$$\begin{aligned} dA &= \text{出生數} - \text{死亡數} - \text{被 B 所吃數} \\ &= (\text{出生數} - \text{自然死亡率}) \times A \times dt - \text{被 B 所吃數} \\ &= \text{增加率} \times A \times dt - \text{被 B 所吃數} \end{aligned}$$

因不考慮空間壓力，故增加率爲一定值 m 。現在我們考慮「被 B 所吃數」和其他量的關係，我們得知以下三結論：

1. 與 B 成正比：因 B 之值愈大，則 A 被捕食機會愈大。
2. 與 A 成正比：因 A 之值愈大，則 B 和 A 相遇機率愈大。在此不討論 B 之「食量」有限。
3. 與 dt 成正比。

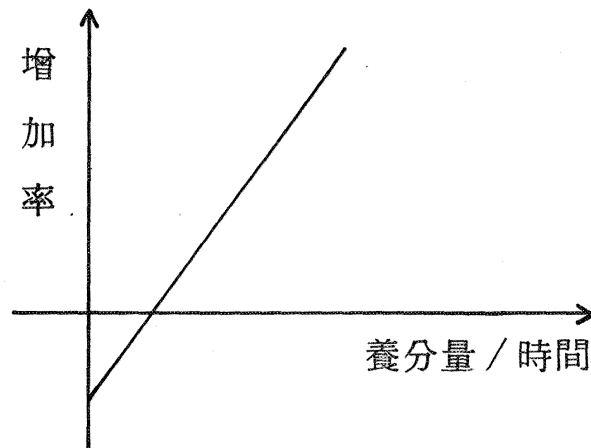
故

$$\text{被 B 所吃數} = K \times A \times B \times dt \quad K \text{ 爲常數}$$

$$\therefore \frac{dA}{dt} = A(m - KB)$$

另外 $dB = \text{出生數} - \text{死亡數} = \text{增加率} \times B \times dt$

我們知道 B 在單位時間吃到了「 KAB 」隻 A，故每隻 B 單位時間吃到了「 KA 」隻 A。設每隻 A 之養分爲 a ，則每隻 B 單位時間攝取到了「 KAa 」之養分。在單位時間內攝取的養分愈多，則增加率愈大，我們假設兩者成線性關係(如下圖)。



增加率 = $W \times$ 單位時間內攝取的養分量 - n

其中 W 、 n 為常數且 W 、 $n > 0$

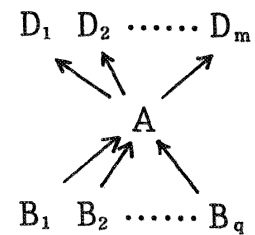
當沒有獲得任何養分時，增加率 = $-n$ ，我們稱之為 B 的自然增加率，

$\therefore B$ 之增加率 = $W \times K A a - n$

故可得下列方程組：

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = A (m - KB) \\ \frac{dB}{dt} = B (WK A a - n) \end{cases}$$

以上是最簡單的食物鏈，若是一個複雜的食物網，我們又如何列式呢？考慮在一食物網中，有一種動物 A ，其能食用 $B_1 B_2 \dots B_q$ ，可被 $D_1 D_2 \dots D_m$ 食之，（如右圖），由前文的推理，我們得：



$$dA = \text{增加率} \times A \times dt - \sum_{i=1}^m (\text{被 } D_i \text{ 所吃數})$$

$$= (W \times \text{單位時內獲得養分} - n) A dt - \sum_{i=1}^m (U_i D_i A dt)$$

$$\therefore \frac{dA}{dt} = A \left[W \sum_{i=1}^q (V_i b_i B_i) - \sum_{i=1}^m (U_i D_i) - n \right]$$

其中 W ， V_i ， b_i ， U_i ， n 皆為常數。

於是我得到了以下之結論：

在一個空間內，有 A_1, A_2, \dots, A_n ， n 種動物，則

$$\frac{dA_m}{dt} = A_m \left(\sum_{i=1}^n P_{mi} A_i + r_m \right)$$

$$P_{mi} = K_m C_{mi} E_i - C_{im}$$

其中 $K_i, C_{ij}, E_i, r_i, P_{ij}$ 皆為常數，其意義分述如下：

K_i ：「 A_i 之增加率」的增加量。

C_{ij} ：捕食比例常數。

E_i ：每隻 A_i 之養分。

r_i ： A_i 之自然增加率。

P_{ij} ：定義為 $K_i C_{ij} E_j - C_{ji}$

(三) 食物網方程式 II

我們現在考慮 B 之食量有限。因 B 之食量有限，即使 A 再多 B 在單位時間內所吃之 A 應趨近一個定值，不應成正比。考慮在一食物網中，動物 A_w 食物用 A_1, A_2, \dots, A_n 。我們假設 A_w 碰到 A_m 的比例常數 μ_m ；而 A_w 動手抓 A_m 時，能抓到的機率 q_m 。則在單位時間內每隻 A_w 可抓到「 $q_m \mu_m A_m$ 」隻的 A_m ，故

$$q_m \mu_m A_m = C_{wm} A_m \Rightarrow q_m \mu_m = C_{wm}$$

事實上， A_w 之食量有限，設其單位時間能攝取的養分最大量 f 。我們考慮在一段時間 h 內，則 A_w 所攝取的養分最大量為 fh 。在這段時間內，當 A_w 遇到了一隻獵物時，會不會「動手」去抓和 A_w 所攝取的養分量有關。我們假設二者成線性關係，故

$$S + \frac{n_e}{fh} = 1$$

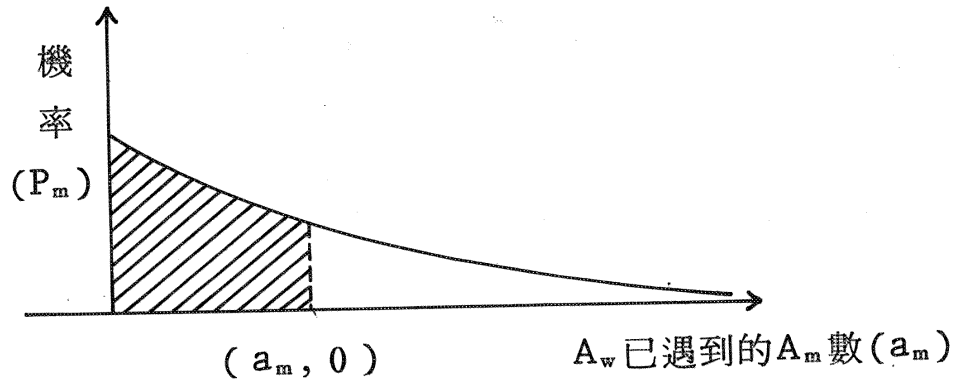
S 為「動手」的機率， n_e 為已攝取的養分量

但「動手」了卻不一定抓得到，前面我們設抓到的機率為 q_m ，故

$$P_m = S \times q_m$$

在這段時間內， A_w 可遇到「 $\mu_m A_m h$ 」隻 A_m ，我們假定各種動物非常均勻地出現在 A_w 面前。我們假定一個量 τ ， $0 \leq \tau \leq 1$ ，當時間過「 τh 」時， A_w 遇到了「 $\mu_m A_m h \tau$ 」隻 A_m 。故

$$a_m = \mu_m A_m h \tau \quad (a_m \text{ 爲 } A_w \text{ 已遇到的 } A_m \text{ 數})$$



見上圖，當 A_w 遇到第 a_m 隻 A_m 時， A_w 已吃到的 A_m 數應大約等於斜線部分的面積。故

$$W_m = \int_0^{a_m} P_m da_m = \int_0^{a_m} S q_m da_m$$

(W_m 表示 A_w 已知到的 A_m 數)

將 $da_m = \mu_m A_m h d\tau$ 代入

$$\begin{aligned} W_m &= q_m \mu_m A_m h \int_0^{\tau} S d\tau \\ &= C_{wm} A_m h \int_0^{\tau} S d\tau \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dh_e}{d\tau} = h S \sum_{j=1}^n E_j C_{wj} A_j$$

我們將以前所推之結果代入上式，並且經整理，積分後，可得：

$$\begin{aligned} \frac{dA_m}{dt} &= \left\{ K_m f_m \left[1 - \exp \left(- \left(\sum_{i=1}^n C_{mi} E_i A_i \right) \right) / f_m \right] \right. \\ &\quad \left. + r_m \right\} \times A_m - \sum_{i=1}^n \frac{C_{im} f_i A_m A_i}{\sum_{j=1}^n C_{ij} E_j A_j} \left[1 - \exp \left(- \frac{\sum_{j=1}^n C_{ij} E_j A_j}{f_i} \right) \right] \end{aligned}$$

我們假設在一個空間裏有 A_1, A_2, \dots, A_n n 種動物，其中 K_i, C_{ij}, E_i, r_i 之意義和以前相同。 f_i 代表單位時間內能攝取的養分最大量。

(四) 食物網方程式 III

在這裏我們將空間壓力一併考慮，我們知道任一族群個數增加，都會造成空間壓力，使各種動物的增加率減少，我們假設任一種動物的增加率和各族群個數均成線性關係。

故我們可以得到下列結論：

在一個空間有 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ n 種動物，則

$$\frac{dA_m}{dt} = \left\{ K_m f_m \left[1 - \exp \left(- \frac{\sum_{i=1}^n C_{mi} E_i A_i}{f_m} \right) \right] + r_m - \sum_{i=1}^n d_{mi} A_i \right\} \times A_m - \sum_{i=1}^n \frac{C_{im} f_i A_m A_i}{\sum_{j=1}^n C_{ij} E_j A_j} \left[1 - \exp \left(- \frac{\sum_{i=1}^n C_{ij} E_j A_j}{f_i} \right) \right]$$

$$m = 1, 2, \dots, n$$

註： d_{ij} 「 A_i 增加率」之減少量和「 A_j 數目之增加量」的比值。
我們稱之為「空間壓力常數」

五、實驗結果

在上面所推導出來的方程式，因太過於複雜，致使我們無法解出其中的常數。故我們決定採用電腦來進行演算。由於運算式十分複雜，基於速度上的要求，於是我們決定採用 C 語言，因為目前唯有組合語言的速度可與之比擬，但組合語言太過於注重細節，不符合我們所需。

我們採用了兩種方法來解上述之方程式 (一) 使用亂數來進行模擬。 (二) 使用 Runge-Kutta 法來解此主方程式。兩者所獲得之結果均令人感到滿意，且和前人所做之實驗相符亦和一些既有的「微分方程式的穩定性」的定理相符。

最後因程式較龐大受限於篇幅而無法附上敬請見諒。至於結果採

用繪圖方式輸出亦頗佔篇幅故不準備在此附上模擬之結果。

六、討 論

因此方程式太過於複雜，因此我們先採用兩種動物來討論其性質。

兩種動物之間關係可分為下列五種：

種 類	食 性		捕 食 關 係
	動 物 A	動 物 B	
1	草 食 性	草 食 性	無
2	草 食 性	肉 食 性	B 可 吃 A
3	草 食 性	肉 食 性	無
4	肉 食 性	肉 食 性	B 可 吃 A
5	肉 食 性	肉 食 性	無

3、4、5的結果顯而易見的，列如下表

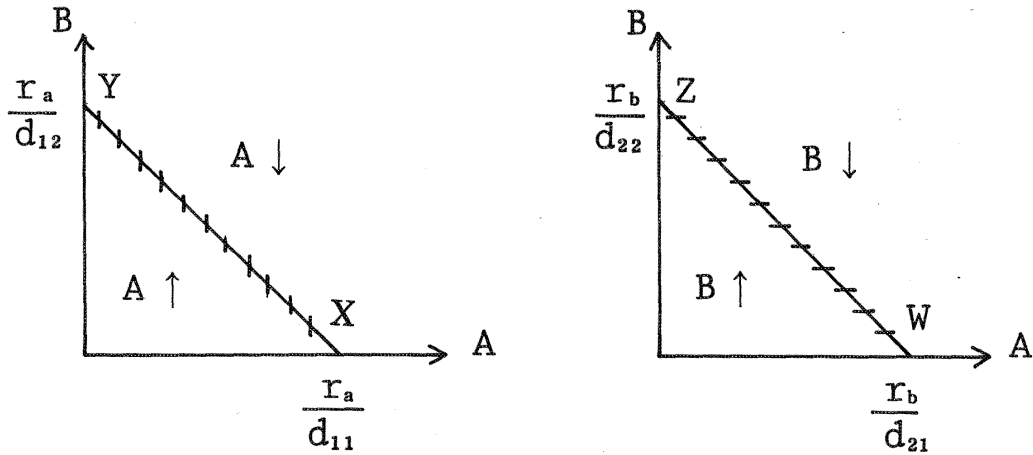
種 類	當 $t \rightarrow \infty$ 時
3	$A \rightarrow \text{一定值}, B \rightarrow 0$
4、5	$A \rightarrow 0, B \rightarrow 0$

根據主方程式，我們可以得到下列方程組：

$$\frac{dA}{dt} = (r_a - d_{11}A - d_{12}B)A$$

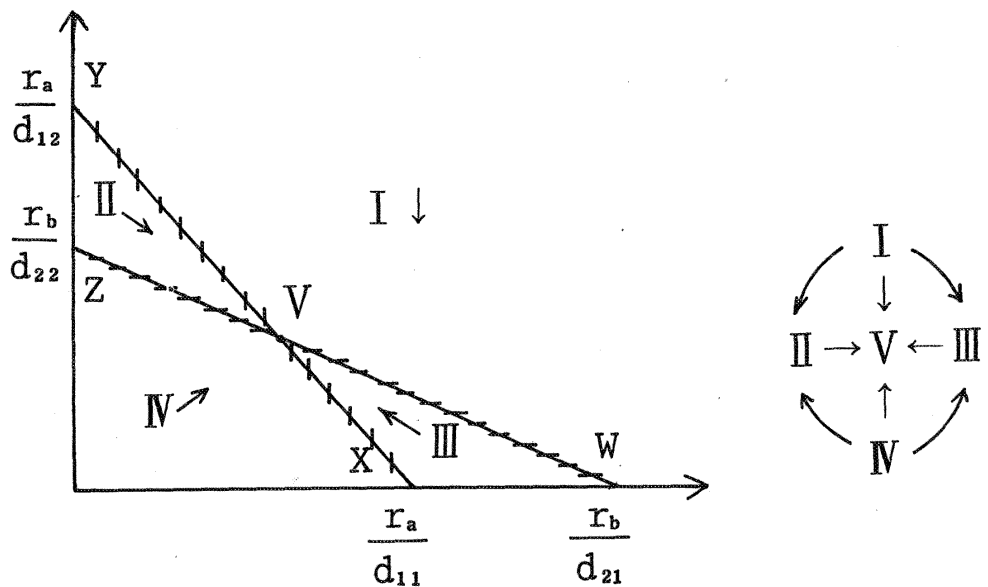
$$\frac{dB}{dt} = (r_b - d_{21}A - d_{22}B)B$$

當 $\frac{dA}{dt} = 0$ 時， $A = 0$ 或 $d_{11}A + d_{12}B = r_a$ (見左下圖)。當方程式之解「經過」 \overline{XY} 時，其切線方向必和 B 軸平行，我們在 \overline{XY} 上劃縱線表之。而當 $\frac{dB}{dt} = 0$ 時，相同的道理，我們在 \overline{ZW} 上劃上橫線 (如右下圖)。



在上圖中， $A \uparrow$ 表 A 在該區中遞增 ($\because \frac{dA}{dt} > 0$)， $A \downarrow$ 表遞減。B \uparrow 、B \downarrow 亦同。以上兩圖形相交的地方即為「平衡點」。它們相交情形和解的性質有很大關係。其中共可分成三型，但受限於篇幅我們只討論一型。

「和平共存型」：



當 $\frac{r_a}{d_{11}} < \frac{r_b}{d_{12}}$ 且 $\frac{r_b}{d_{22}} < \frac{r_a}{d_{12}}$ 時或

$\frac{r_a}{d_{11}} = \frac{r_b}{d_{21}}$ 且 $\frac{r_a}{d_{12}} = \frac{r_b}{d_{22}}$ 時

(一)當 $\frac{r_a}{d_{11}} < \frac{r_b}{d_{21}}$ 且 $\frac{r_b}{d_{22}} = \frac{r_a}{d_{12}}$ 時，見上圖，我們可以得到以下之

網路圖。

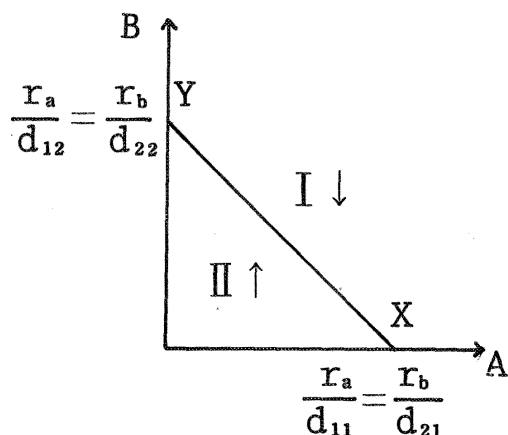
由網路圖得知不論初期值在何處，最後都會趨近 V 點，故當 $t \rightarrow \infty$ 時：

$$A \rightarrow \frac{\Delta a}{\Delta}, \quad B \rightarrow \frac{\Delta b}{\Delta}$$

$$\text{其中 } \Delta = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta a = \begin{vmatrix} r_a & d_{12} \\ r_b & d_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta b = \begin{vmatrix} d_{11} & r_a \\ d_{21} & r_b \end{vmatrix}$$

(二)當 $\frac{r_a}{d_{11}} = \frac{r_b}{d_{21}}$ 且 $\frac{r_a}{d_{12}} = \frac{r_b}{d_{22}}$ 時：

見右圖，其中 \overline{XY} 上任意一點都是「平衡點」。若初期值在 II 區，則此解不可能接解或越過 \overline{XY} ，故必永遠留在 II 區內。又由微分方程式的穩定性中的定理得知，此解必將收斂。故必收斂於 \overline{XY} 上某一點。



同理，初期值在 I 區之解必收斂於 \overline{XY} 上之一點。故 $t \rightarrow \infty$ 時， $(A, B) \rightarrow (a, b)$ ，其中 (a, b) 在 \overline{XY} 上。

討論：事實並沒有那麼湊巧的事，且大自然的環境無時無刻都在改變。故以上的結論純屬理論上的產物，在自然界中不大可能存在。

當我們把以上三型分別仔細討論後，將所得之結果整理後可以得到下表：

$t \rightarrow \infty$ 時	$\frac{r_a}{d_{11}} > \frac{r_b}{d_{21}}$	$\frac{r_a}{d_{11}} = \frac{r_b}{d_{21}}$	$\frac{r_a}{d_{11}} < \frac{r_b}{d_{21}}$			
$\frac{r_a}{d_{12}} > \frac{r_b}{d_{22}}$	優勝劣敗型 $(A, B) \rightarrow (\frac{r_a}{d_{11}}, b)$	優勝劣敗型 $(B) \rightarrow (\frac{r_a}{d_{11}}, b)$	和平共存型 $(A, B) \rightarrow (\frac{\Delta a}{\Delta}, \frac{\Delta b}{\Delta})$			
$\frac{r_a}{d_{12}} = \frac{r_b}{d_{22}}$	優勝劣敗型 $(A, B) \rightarrow (\frac{r_a}{d_{11}}, 0)$	和平共存型 $(A, B) \rightarrow (a, b)$ 其中 a, b 符合 $r_a = d_{11} a + d_{12} b$	優勝劣敗型 $(A, B) \rightarrow (0, \frac{r_b}{d_{22}})$			
$\frac{r_a}{d_{12}} < \frac{r_b}{d_{22}}$	你死我活型 $(A, B) \rightarrow (\frac{r_a}{d_{11}}, 0)$ 或 $(0, \frac{r_b}{d_{22}})$ 或 $(\frac{\Delta a}{\Delta}, \frac{\Delta b}{\Delta})$	優勝劣敗型 $(A, B) \rightarrow (0, \frac{r_b}{d_{22}})$	優勝劣敗型 $(A, B) \rightarrow (0, \frac{r_b}{d_{22}})$			
$\Delta =$	$\begin{matrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{matrix}$	$\Delta a =$	$\begin{matrix} r_a & d_{12} \\ r_b & d_{22} \end{matrix}$	$\Delta b =$	$\begin{matrix} d_{11} & r_a \\ d_{21} & r_b \end{matrix}$	

最後，本作品的說明書上另有引用了甚多的「微分方程式的穩定性」中的性質與定理，來討論更複雜之情形。因篇幅有限且其中大多數的性質與定理都不易證明，故決定將之刪除，避免占了太多的篇幅。

七、結 論

利用本文的理論，可以根據過去的族群統計資料來預測將來情況——只要用過去的資料來決定所有的常數，再用電腦模擬或數值分析的方法就可以預測未來的情況。但實際做起來很困難——主要原因是我們無法解開此微分方程組，但我們堅信一定可以辦得到的，就好像目前的天體力學只解出兩體問題，但我們卻能計算出太空船的軌道——即使它同時受到了地球、月球，甚至太陽的影響。

大自然中影響族群變動的變因千變萬化，決不是本文理論所能蓋括的，本文理論雖不是十全十美，但確實值得致力於生態界平衡的人士參考。

八、參考資料

- (一)數學的神秘與奇趣，凡異出版社。
- (二)微分方程的穩定性理論，Richard Bellman 著，施克剛譯，水牛出版社。
- (三)生態學概論，徐氏基金會。
- (四)生物學，環球書社。
- (五)數值分析，曉園出版社。
- (六)A Book on C, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc.
- (七)C & BIOS，儒林圖書公司。
- (八)80386/80286 Assembly language Programming，松崗電腦圖書資料有限公司。

評 語

1. 具有對相當複雜現象構造數學模型的能力。
2. 作品中有關微分方程組部份，不但在理論上相當地理解，亦能寫相當好的程式求其數值解。
3. 作品具有完整性，亦顯示出作者有很強的解題能力。