

# 非彈性碰撞下的滑車運動

## 高中組物理科第二名

高雄市立左營高級中學

作者：潘敬文、張光華

指導教師：徐德耀、林明良

### 一、研究動機

一般教科書在處理「高處落下的彈性球彈跳問題」時，均將每次回跳的恢復係數（coefficient of restitution）視為定值。據此，影響恢復係數的變因似乎只存在於彈性球與碰撞面之間。

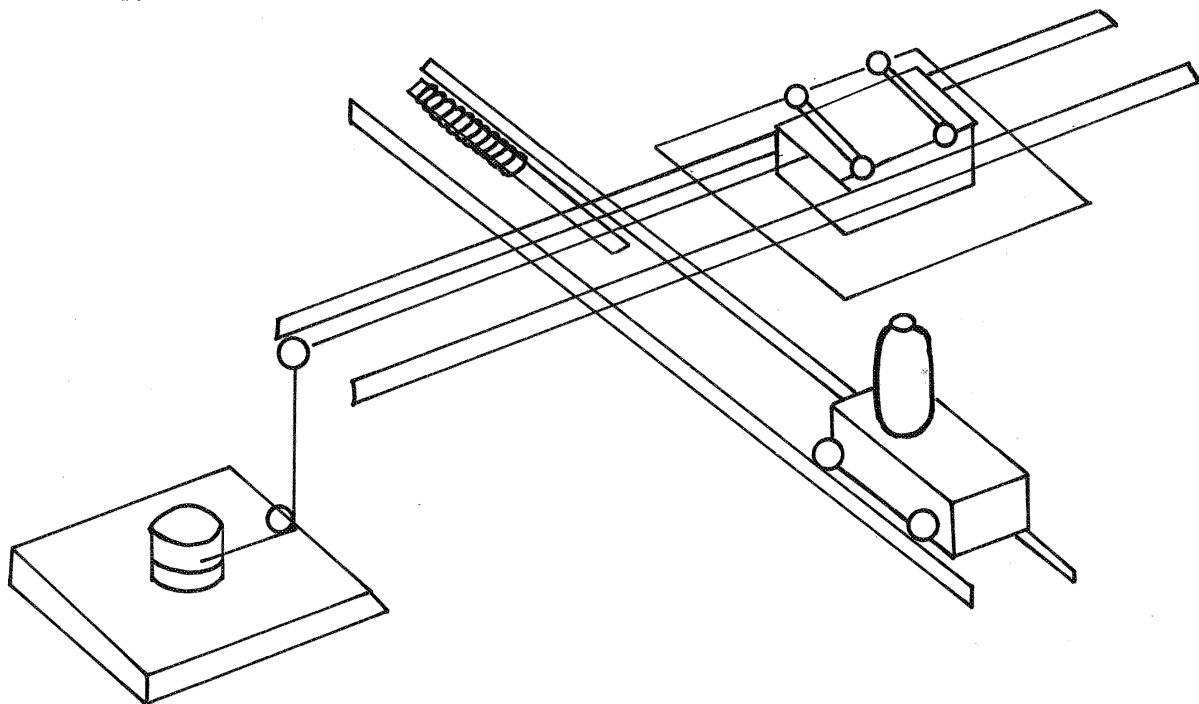
上實驗課作鋼球的非彈性碰撞實驗（第一冊實驗六）時，意外地發現鋼球的恢復係數似乎隨著碰撞前的初速而改變，然而變化的規則並不甚明顯。為什麼？難道是實驗的誤差？或是另有其它未經考慮的變因存在？

### 二、研究概要

1. 以滑車碰撞水平固定的彈簧，研究非彈性碰撞。
2. 以相紙感光的方式，繪下碰撞時滑車位置對時間的關係圖。
3. 利用微電腦配合數位板（digitizer），由相紙讀入資料。
4. 經由數據處理並輔以理論分析，探討影響碰撞時最大壓縮距離、碰撞後末速、恢復係數、及碰撞作用時間的變因。
5. 由相紙所紀錄之滑車位置對時間之關係曲線，探討碰撞期間動量、動能、彈簧勢能之變化。
6. 討論磁力作用下的碰撞。

### 三、研究器材

1. 滑車及滑車軌道
2. 唱盤
3. 彈簧
4. 洗相設備
5. 微電腦
6. 數位板
7. 砝碼
8. 相紙
9. 顯影及定影液
10. 光源裝置（附透鏡組）



圖一：實驗裝置示意圖

### 四、實驗設計

因為鋼球的碰撞時間非常短促，且形變極微，觀察不易，所以採用模擬的方式，以滑車去碰撞水平固定的彈簧。而滑車與軌道間因摩擦而造成的動能損失，則用以模擬鋼球碰撞期間的能量損耗。

實驗裝置如圖一所示。固定有聚焦光源的滑車作為碰撞體，以壓縮的彈簧彈射而出，在下軌道滑行。下軌道的另端固定一水平放置的彈簧，用以模擬碰撞時碰撞體的形變。因為彈簧的壓縮長度受到較大的限制，所以實驗時以伸長形變取代之。軌道以C型夾水平固定在實驗桌上，實驗桌又固定於地板，因此被撞物體

之質量可視為無限大。

觀測運動物體之位置、速度的方法很多，但都有其不方便的地方。例如：電鈴振動計時器無法在碰撞的回程紀錄資料；光電計時器的觀測點太少。而我們想獲得全部碰撞過程的滑車位置對時間的變化情形，所以在碰撞滑車上裝上小燈泡，並以凸透鏡匯聚光線，利用相紙的感光作記錄。相紙固定在另一滑車上，相紙滑車的軌道在光源滑車的上方，並與光源滑車的軌道垂直。相紙滑車由轉速均勻的唱盤拖動。設唱盤角速度為  $w$ ，若在轉軸處套上半徑為  $R$  的圓柱，則可拖動光源滑車以  $Rw$  的等速運動。因此相紙上，在相紙滑車運動方向上的距離  $L$ ，即代表時間  $L / Rw$ ，而相紙上的軌跡就是光源滑車的位置對時間之關係曲線。

碰撞實驗在暗房中紅光下進行。感光後的相紙經顯影、急制、定影、沖洗並晾乾，即是一張彈力作用下的碰撞軌跡相片。相片上的橫直線是將光源滑車輕觸彈簧而移動相紙感光所得，代表碰撞的起點與終點，並確定時間軸向。相片上  $S$  即碰撞時最大壓縮距離；碰撞作用時間  $T$  可由  $D / (Rw)$  算出；而入射初速度  $V_i = k \Delta Y_1 / \Delta X_1$ ，反射末速度  $V_f = k \Delta Y_2 / \Delta X_2$ ，其中  $k = Rw$ ；碰撞期間的速度對時間及加速度對時間關係即分別為此曲線的一次與二次時間導數；恢復係數  $e = V_f / V_i$ 。

因為數據龐雜，故使用微電腦配合數位板，以游標鼠 (mouse) 讀取相片上軌跡之座標，並進行分析計算及繪圖。分析分二部份進行：一為碰撞前後之數據，即影響碰撞末速、碰撞時間、最大壓縮距離、及恢復係數的變因探討；一為碰撞過程之數據，即碰撞期間能量及動量的變化之研究。

#### (一)彈力作用下的碰撞實驗：

為了獲得不同且分散的入射初速，光源滑車，由不同壓縮程度的彈簧彈射而出。本部分的十一個實驗，分別操縱改變的變因為入射初速、滑車質量、及碰撞彈簧力常數。分析後的數據分別就  $S - V_i$ 、 $V_f - V_i$ 、 $e - V_i$ 、 $T - V_i$  作圖，並使用最小平方法 (method of least squares) 獲取經驗式，描述上

述變因與入射初速之關係。

實驗結果如下：

1. 碰撞前初速度對碰撞最大壓縮距離  $S$  的關係可以寫成  $S = c Vt$ ， $c$  為常數，即碰撞最大壓縮距離與初速成正比。而且碰撞滑車質量愈大壓縮距離愈大，彈簧力常數愈大壓縮距離愈小，亦即  $c$  為  $M$  與  $K$  的函數。
2. 碰撞前初速對碰撞後末速的關係。除滑車質量較小與較大者外，其餘  $V_f = c V_t$ ， $c$  為  $M$  與  $K$  的函數，而滑車質量愈大末速愈大，彈簧力常數愈大末速愈大。
3. 恢復係數對初速的變化不大，但質量小時，初速增大恢復係數有變小的驅勢；質量較大時，初速增大恢復係數亦變大。初速一定時，則質量愈大，恢復係數會增加；力常數越大則恢復係數亦較大。
4. 當質量較小時，初速加大並碰撞時間略增。當質量較大或力常數較大時，初速與碰撞時間無顯著關係。初速一定時，碰撞滑車質量愈大碰撞時間越長，彈簧力常數愈大碰撞時間越短。
5. 碰撞過程中位置、速度、加速度對時間之關係圖，用以研判動量之變化。因入射時彈簧恢復力與摩擦力同向，而反射時反向，故入射速度變化較劇，亦即受力較大，越近轉返點越大；反射時受力較小，速度增加較緩，接近碰撞終點時，甚至出現等速或輕微減速情形，此時摩擦力已接近甚至稍大於恢復力。若摩擦可忽略，則速度—時間關係圖之曲線應對稱。
6. 速度平方對時間之關係圖，可研判動能之變化。入射時之曲線較反射時陡，乃因有摩擦力作用。入射時滑車之動能變化較大，但越近碰撞起點及轉返點則變化越小；反射時動能變化較小，碰撞終點的動能小於碰撞起點，顯示力學能並不守恆。若摩擦可忽略，則速度平方—時間關係圖之曲線應對稱。關係曲線越對稱，則越接近彈性碰撞。

(二) 摩擦力之測定：

由以上的探討發現：所以為非彈性碰撞，乃源至碰撞期間摩擦

力造成的能量損失。由五個「測定摩擦力之實驗」分析可知：運動過程中摩擦力為定值，與運動速度無關。滑車質量越大時摩擦力越大。

(三) 磁力作用下的碰撞實驗：

爲了比較反平方力作用下的碰撞情形，我們以磁鐵代替彈簧，作了六個實驗，與彈力比較，在磁力作用下，越接近轉返點時，動量變化越劇，顯出反平方力的特性。而速度平方對時間關係圖顯示：入射時動能變化較大，反射時較小。

## 五、理論分析

設質量爲  $M$  的滑車，在恰接觸彈簧瞬間的瞬時速度爲  $V_t$ ，動摩擦係數爲  $\mu$ ，在最大壓縮距離  $S$  時，滑車的動能轉換成彈簧的勢能，並反抗摩擦力作功，因此

$$\frac{1}{2} M (V_t^2 - 0^2) = \frac{1}{2} K S^2 + \mu M g S$$

移項得  $K S^2 + 2\mu M g S - M V_t^2 = 0$

因此  $S = \left[ -\mu M g + (\mu^2 M^2 g^2 + K M V_t^2)^{\frac{1}{2}} \right] / K$

若摩擦力可忽略，則上式可寫爲

$$S = (M/K)^{\frac{1}{2}} V_t$$

與實驗所得結果一致。

再討論恢復係數及碰撞末速。

滑車入射動能爲

$$\frac{1}{2} M V_t^2 = \frac{1}{2} K S^2 + \mu M g S$$

滑車碰撞後動能爲

$$\frac{1}{2} M V_f^2 = \frac{1}{2} K S^2 - \mu M g S$$

將二式相加，移項，開方得

$$V_f = (2 K S^2 / M - V_t^2)^{\frac{1}{2}}$$

將  $S$  代入，得

$$V_f = \left[ 4M\mu^2 g^2 / K - 4\mu g (\mu^2 M^2 g^2 + K M V_t^2)^{\frac{1}{2}} / K + V_t^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$e = V_f / V_t$$

$$= (1 / V_t) \left[ 4M\mu^2 g^2 / K - 4\mu g (\mu^2 M^2 g^2 + K M V_t^2)^{\frac{1}{2}} / K + \right]$$

$$V_t^2)^{1/2}$$

由上列二式知，影響恢復係數的變因有摩擦係數、滑車質量、彈簧力常數、入射初速。當摩擦力可忽略時。

$$V_t = (2K/M \times M/K V_i^2 - V_i^2)^{1/2} \\ = V_i$$

而  $e=1$ ，為完全彈性碰撞。

現在討論碰撞作用時間。

滑車入射時受力為  $F = f - Kx$

滑車反射時受力為  $F = -f - Kx$

當摩擦力可忽略時，滑車與彈簧碰撞期間受力為  $-Kx$ ，可視為簡諧運動，因此碰撞時間為半週期，即

$$T = \pi (M/K)^{1/2}$$

故碰撞時間與質量平方根成正比，與力常數平方根成反比，而與入射速度無關。

根據理論式畫出之  $e - Vt$  關係圖，與實驗結果相似。但在滑車質量為  $0.45 \text{ kg}$  時，卻出現相左情形——理論並未預測：質量小於某限值時，入射初速增加恢復係數減少。顯然理論有考慮未周之處。重新檢驗「摩擦力測定實驗」之數據，發現摩擦力隨速度之增加而變大。再將碰撞過程的動能、位能及總力學能對時間的關係圖畫出，亦顯示速度越大時總力學能的損失越多。實驗數據指出：尚有一項與速度成正比的摩擦力作用於滑車上。此摩擦力應來自彈簧內摩擦與空氣阻力。

根據上述討論，設滑車在碰撞期間的瞬時加速度為  $a$ ，瞬時速度為  $V$ ，彈簧壓縮之位移為  $x$ ，則滑車的運動方程式為

$$M a + c V + K x - \delta \mu Mg = 0$$

其中  $M$  為滑車質量， $c$  為阻滯係數， $K$  為彈簧力常數， $\mu$  為動摩擦係數， $\delta$  在入射時為  $+1$  而在反射時為  $-1$ ， $g$  為重力加速度。

## 六、結論與討論

彈性限度內的非彈性碰撞，是由於碰撞過程中，力學能因摩擦而轉成熱能，所以碰撞後的速度變小。在入射時摩擦力與彈力同向，碰撞體受力較大；反射時摩擦力與彈力反向，碰撞體受力較小，所以由位置對時間關係圖可看出，入射接觸時間比反射接觸時間短。

本實驗中，在滑車質量較小時，恢復係數並非定值，隨入射速度的增加而略降，而於滑車質量較大時，接近於一常數。但在質量更大時，恢復係數隨入射速度之增加而增加。以理論作模擬計算後所繪之恢復係數變化情形，因篇幅所限而省略。

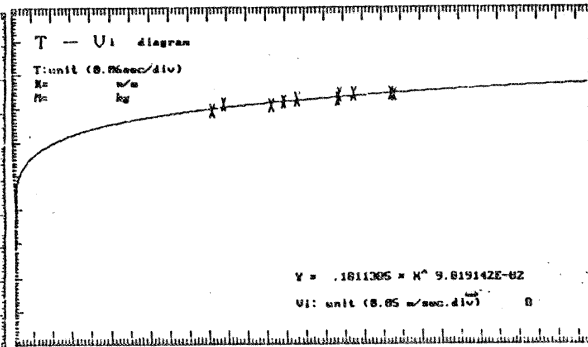
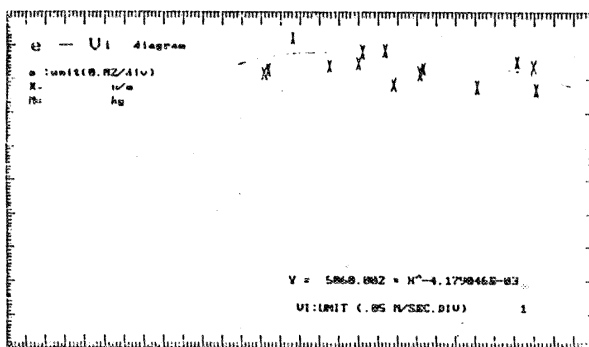
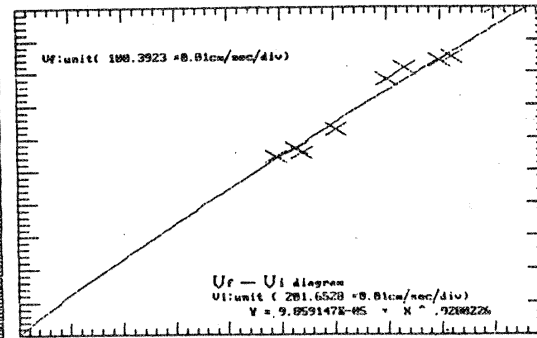
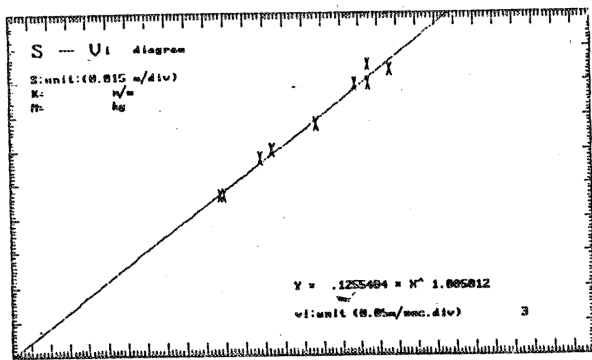
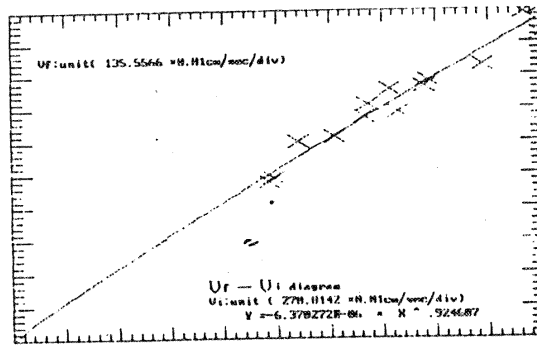
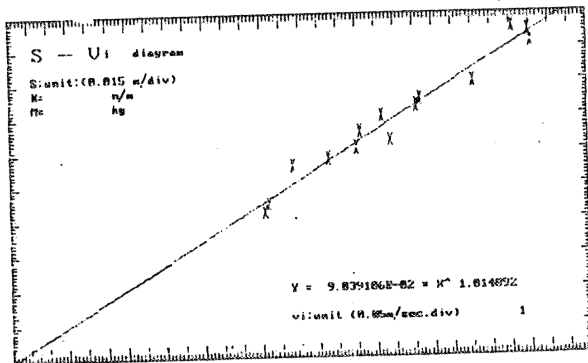
非彈性碰撞會因摩擦造成能量的損耗，滑車質量較大時，損耗能量的比例會因而下降。所以質量愈大時，恢復係數亦愈大，且漸趨於一定值。

碰撞時，滑車會將部份能量傳遞給彈簧，使其作簡諧運動，而且彈簧質量愈大傳遞比例愈大。在本實驗中。彈簧對滑車之質量比值甚小，因此這項能量損耗未與觀測。

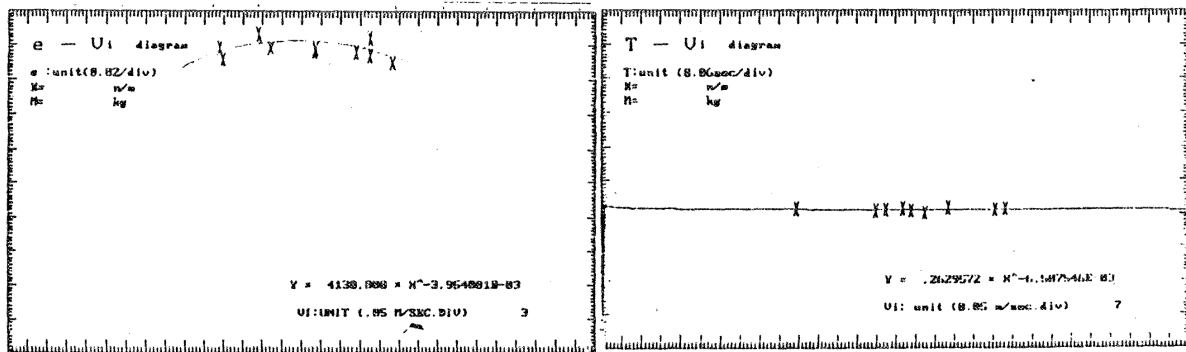
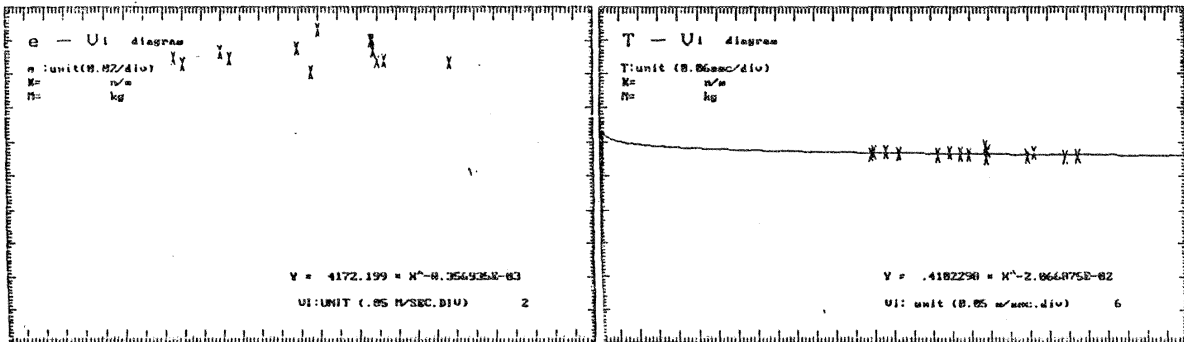
本實驗所使用之數位板，其兩相鄰座標點之距離為  $0.1\text{mm}$ ，而相紙滑車的速率為  $13.88\text{ cm/s}$ ，所以時間之測量可準確至  $0.72\text{ms}$ 。在數位板上操作游標鼠讀取樣點座標時，若  $y$  座標值變化不大，而  $x$  座標取樣間格太小，則微小誤差會產生雜訊，都顯現於分析圖表中，尤以次導數為甚。

## 七、參考資料

1. 錢偉長，彈性力學，亞東書局，p327-p329，(1987)
2. 洪欽銘，陳錦堂（譯），應用數值分析，儒林圖書公司，p589-p595，(1985)
3. DIGITIZER kd4030A INSTRUCTION MANUAL，GRAPHTEC CORP，(1986)







(註：) 因篇幅所限，上列僅為一小部分之實驗數據圖。

## 評語

本作品以滑車碰撞水平固定彈簧模擬鋼球碰撞的情況，以瞭解鋼球恢復係數與碰撞初速間的關係。

本作品在實驗設計方面有創新之處在數據分析，以及立論推演方面亦能中規中矩，頗為難得。