

# 角柱出新招

## 高小組應用科學科第一名

台北市中山國民小學

作者：連錡晉、陳玉臻

周怡君、陳玉蘋

指導教師：陳正芬

### 一、研究動機

以前上美勞課的時候，老師教我們做一個勞作品，這個勞作品就是把兩個長方體黏在一起，當我們轉動它的時候，畫面就會產生變化，非常好玩，我們把它取一個名字叫「魔術角柱」。後來，六年級上學期的時候，數學課本第八單元教到角柱、角錐，我們覺得角柱真是變化多端，如果能夠深入研究的話，一定是非常有趣的。於是，我們在老師的指導下，做了以下的研究。

### 二、研究主題

#### (一)角柱面目大亮相

子題：1.日常生活中，在什麼時候或地點能看到角柱？

2.研究角柱有那些種類。

#### (二)角柱展開變化招

子題：1.三角柱的展開圖及變化形。

2.四角柱的展開圖及變化形。

3.五角柱的展開圖及變化形。

4.六角柱的展開圖及變化形。

5.圓柱的展開圖及變化形。

#### (三)角柱排列魔幻招

子題：1.角柱排列法則。

2.切割畫面變化法則。

3.利用角柱排列設計角柱迷宮。

### 三、研究設備器材

我們爲了研究角柱，準備了照相機、底片、長尺、剪刀、膠帶、紙、圓規、定規等研究器材。

### 四、研究過程

研究(一)：角柱面目大亮相

子題：1.日常生活中，在什麼時候或地點能看到角柱？

- (1)文具—筆筒、鉛筆盒、鉛筆、橡皮擦、粉盒、錢筒。
- (2)傢俱—衣櫃、書櫃、床。
- (3)建築物—高樓大廈（三、四、五、六角柱）、平房。
- (4)五金類—螺帽、鐵盒（便當盒、禮品盒）、油漆筒。
- (5)電器用品—電視、冰箱、烤麪包機、音響、暖爐、燈管。
- (6)食品類—罐頭、食品盒、蛋捲、易開罐、統一鮮奶。
- (7)日用品（雜用）—垃圾筒、皮箱、帳篷、衛生紙。

子題：2.研究角柱有那些種類？

三角柱—有正三角形柱、等腰三角形柱、直角三角形、任意三角形。

四角柱—有正方形柱、菱形柱、長方角柱、平形四邊形柱、梯形柱、任意四邊形柱。

五角柱—有正五角柱、任意五角柱。

六角柱—有正六角柱、任意六角柱。

圓柱—有圓柱、橢圓柱。

結論：角柱有無數種，角柱的面數愈來愈多，最後就變成圓柱。

所有角柱的面目常已拍成照片或幻燈片，整理成冊。

研究(二)：角柱展開變化招

我們從課本中知道，角柱可以展開成平面圖，但是，書上只列舉了一、兩種展開圖，我們想知道三、四、五、六角柱各有幾種展開法。於是，連錡晉負責畫三、四、六角柱的展開圖，陳玉臻負責畫五角

柱的展開圖，最後，我們總共做出：

數量 \ 角柱	三角柱	四角柱	五角柱	六角柱	圓柱
展開圖	15	20	166	206	無限

每一種展開圖，我們再加以切割變化，做成變化形，我們總共做出：

數量 \ 角柱	三角柱	四角柱	五角柱	六角柱	圓柱
變化形	9	11	22	10	6

結論：角柱的邊數愈多，展開數目就愈多。我們把做出的展開圖，列舉其中一、二，其餘的整理在資料簿中。

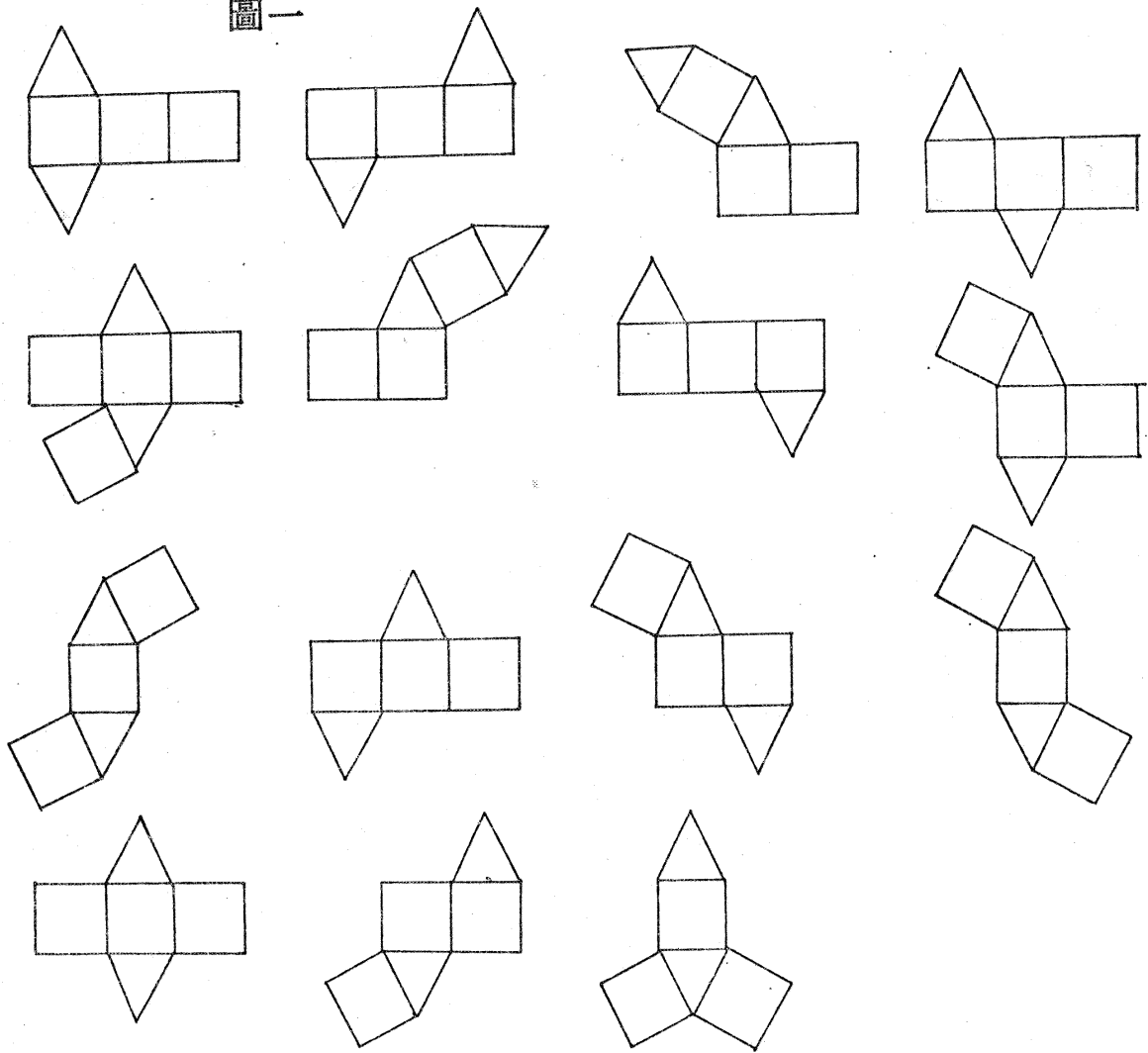
- (1)三角柱展開圖（共做出 15 種）（如圖一）
- (2)三角柱變化形（如圖二）
- (3)四角柱展開圖（共做出 20 種）（如圖三）
- (4)四角柱變化形（如圖四）
- (5)五角柱展開圖（共做出 166 種）（如圖五）
- (6)五角柱變化形（如圖六）
- (7)六角柱展開圖（共做出 206 種）（如圖七）
- (8)六角柱變化形（如圖八）
- (9)圓柱展開圖（有無限種）（如圖九）
- (10)圓柱變化形（如圖十）

研究(三)：角柱排列魔幻招

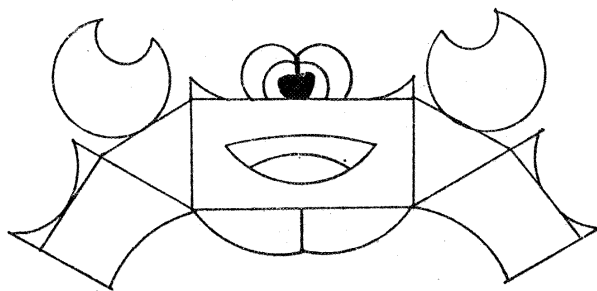
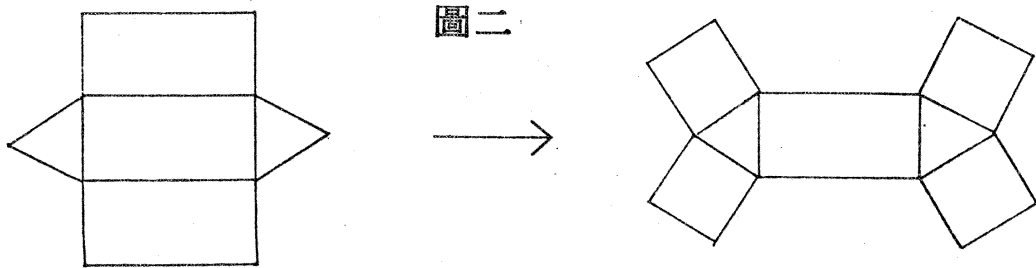
在研究角柱展開圖的同時，我們發現老師教我們做的那件魔術角柱勞作品，畫面會變的原因是：

因為人把角柱的位置移動了，所以畫面才會變。可是我們在玩當中，又發現，如果不去搬動角柱，人看角柱的位置改變了，畫面會隨著改變。有了這個發現之後，我們找來古氏積木，實際排排看

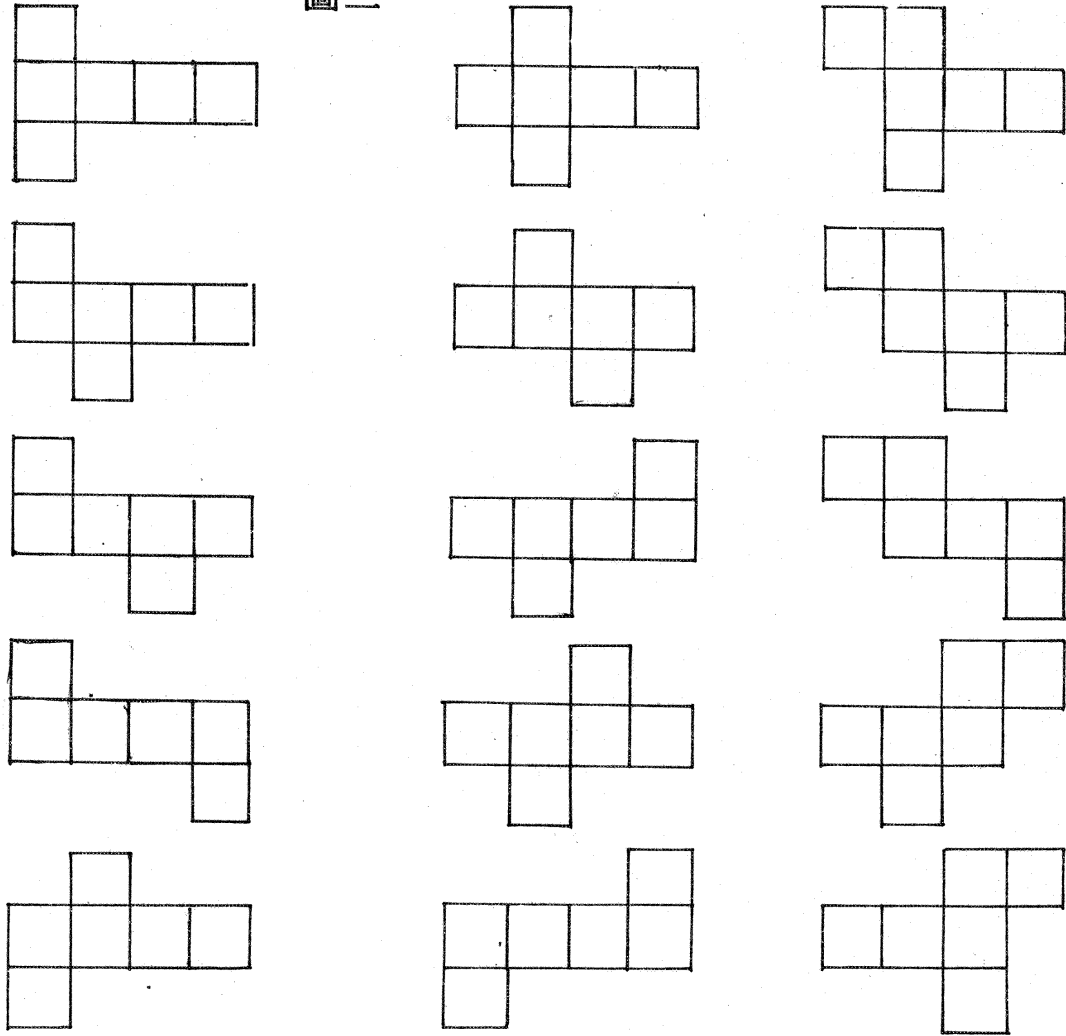
圖一



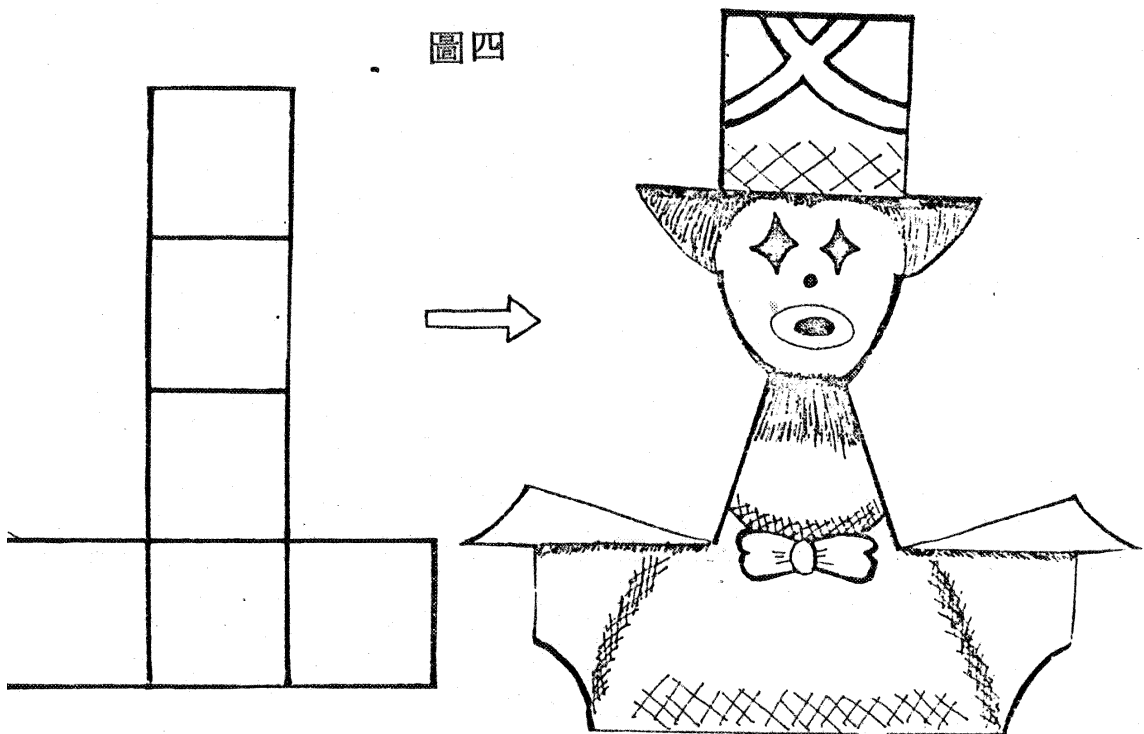
圖二



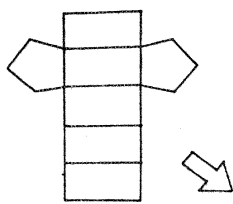
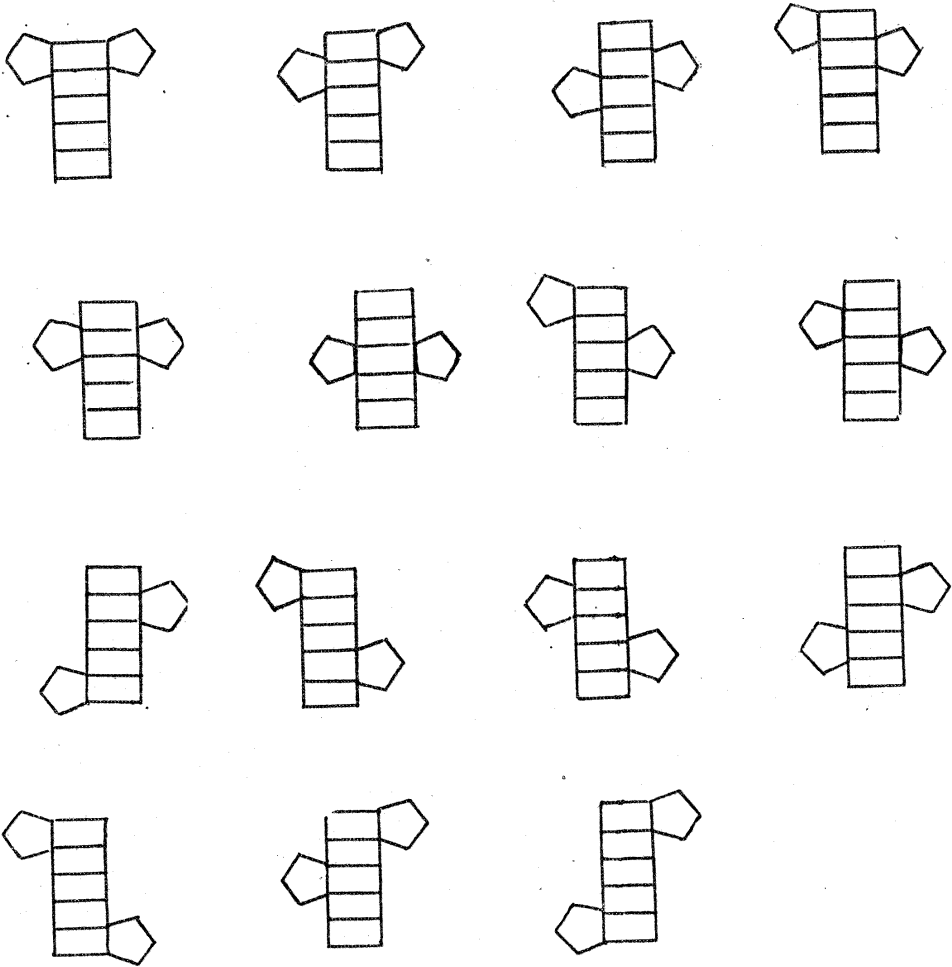
圖三



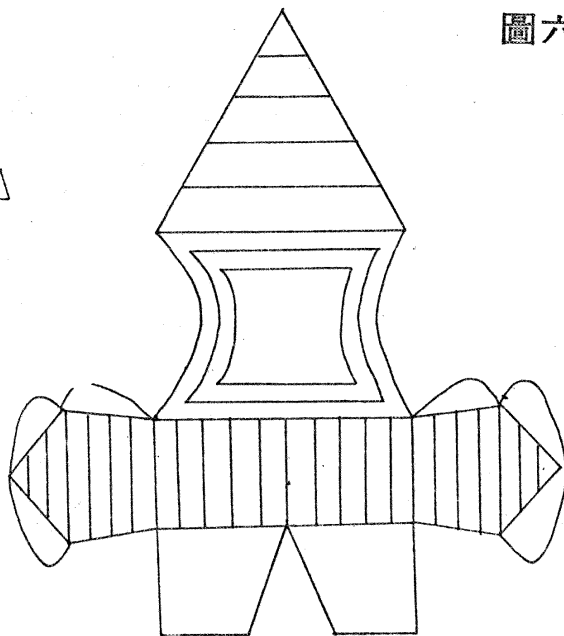
圖四



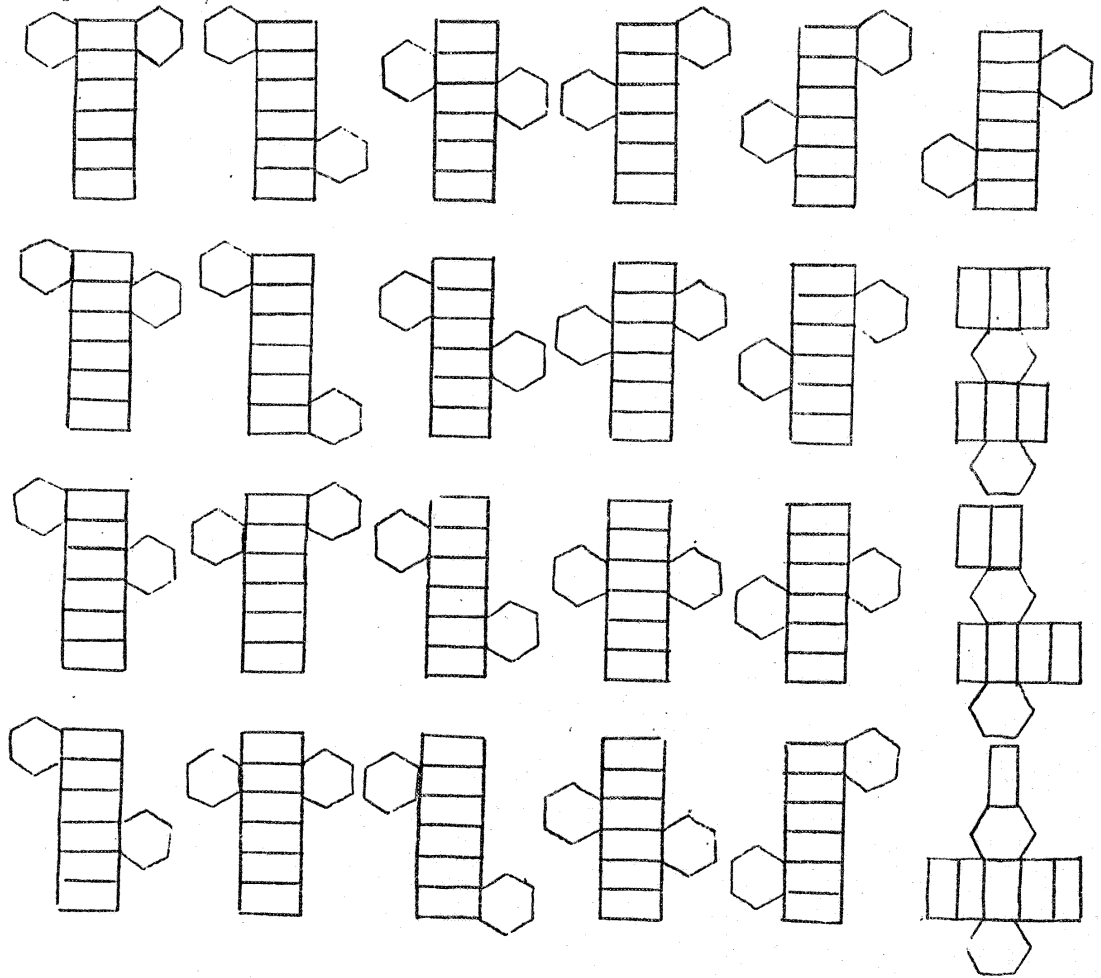
圖五



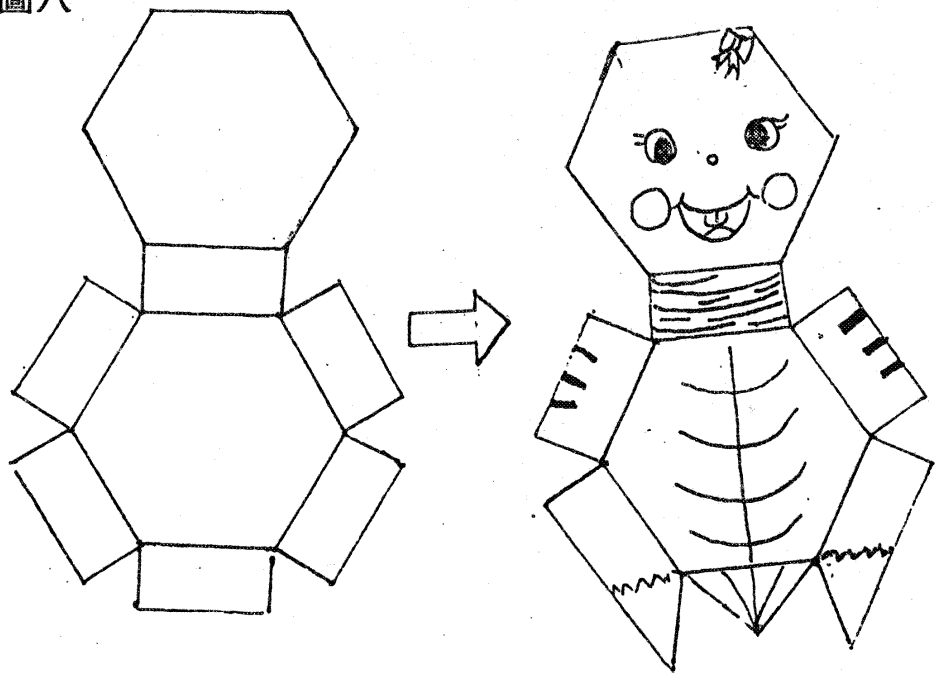
圖六



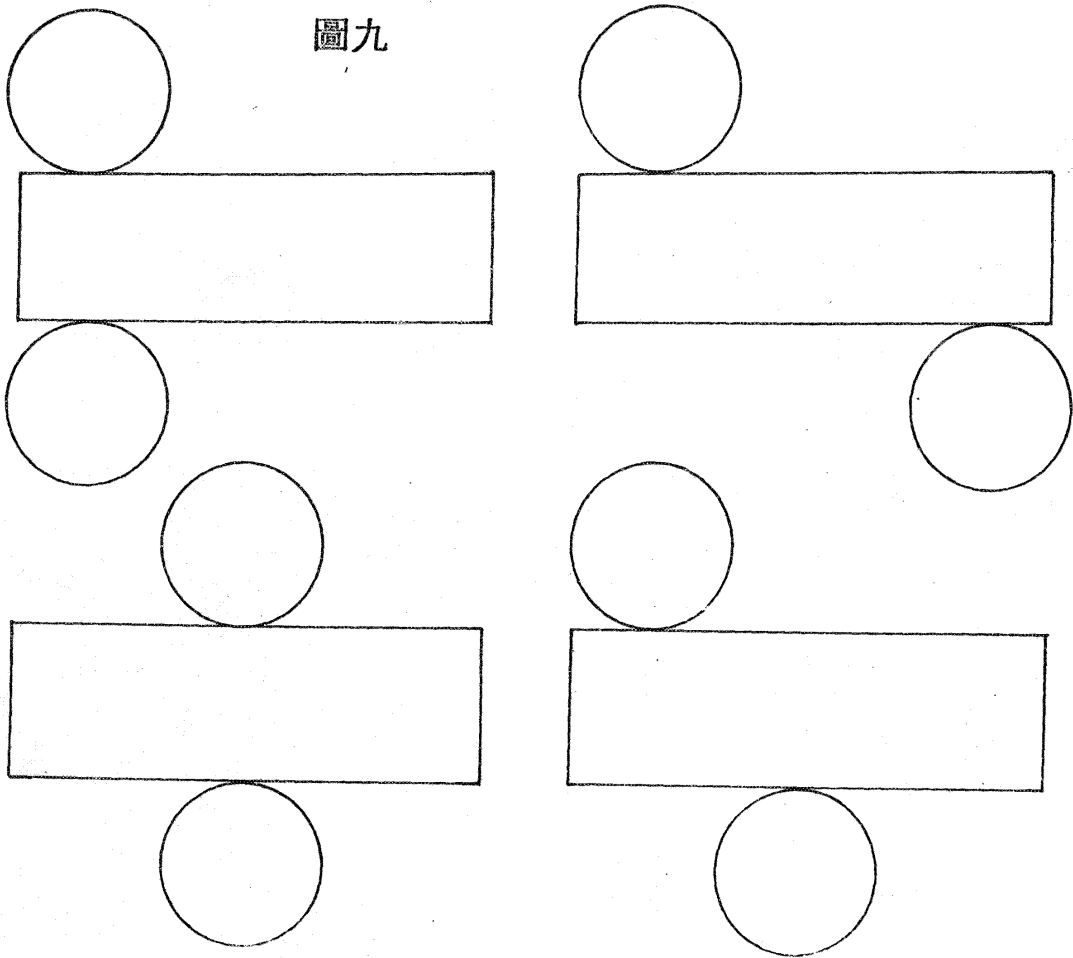
圖七



圖八

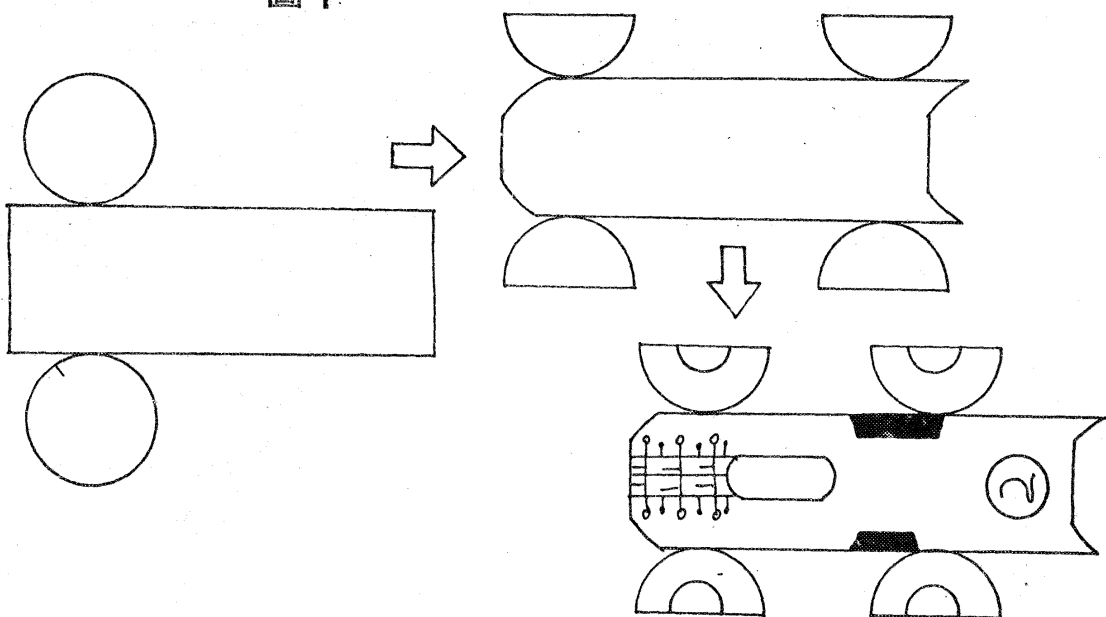


圖九



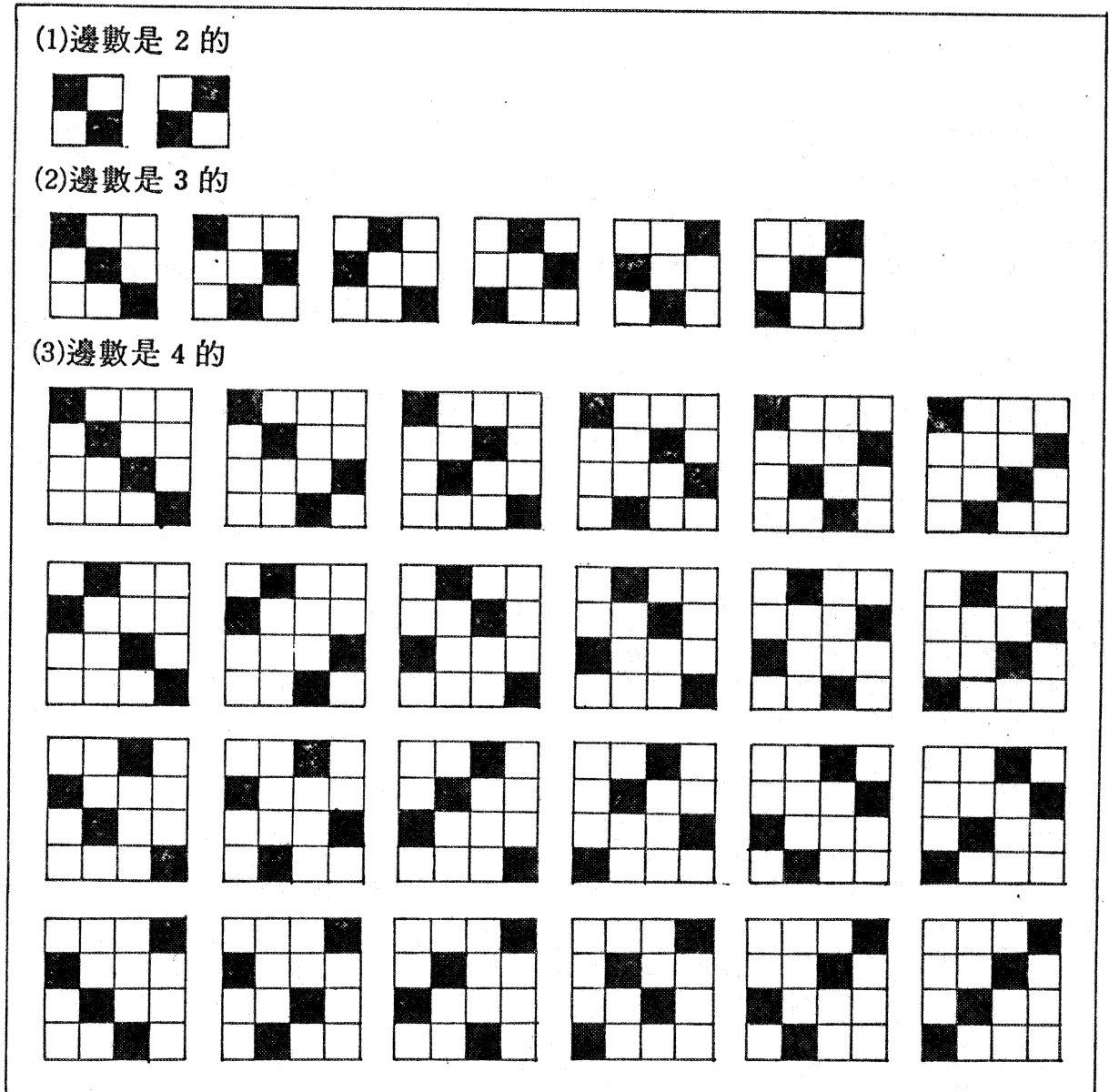
( 無限種 )

圖十





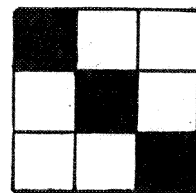
圖七



結果發現：

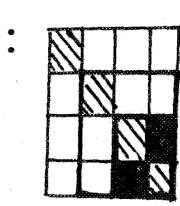
要利用視線的移動，使角柱上的畫面產生變化，那麼，角柱的排法還真是一門學問呢！我們已知角柱的排法最簡單又方便的排法就是對角線的排法，就像這個樣子：

這樣排的話，人不管走到東西南北，都可以看到圖畫，這樣的排法總共有兩種。不規則的排法，我們從邊 2 開始研究。（如圖七）



斜的排法（俯看圖）

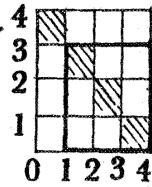
我們在設計邊數是四格的排列時，發現它的排法是有規則的，如



中的排法，不就是邊數是兩格的排列嗎？而



中的排法，不就是邊數是三格的排列嗎？而我們從前面的研究中知道，邊數是兩格的排列有兩種，邊數是三格的有六種，所以當

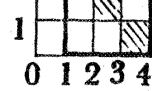


在 1、4 時，



內就等於邊數

是三格的排列有六種，



而 移到 2、4 時，



這兩處了，但我們若將它併起，不也是邊數是三格的排列嗎？所以，

我們以此類推，把 從 1、4 移到 2、4 的位置，再移到 3、4 的

位置，最後移到 4、4 的位置，每移一次就會多六種排法，所以我們用  $6 \times 4 = 24$  的計算方法來算。依上面所說的，列成表格：

排 列 數	邊 數	1	2	3	4	5	6
排 列 數	排 列 數	1	2	6	24	120	720

我們發現：要計算排列法，可用這個公式：

$$\text{邊數} \times \text{前面的排列數} = \text{排列數}$$

例：

$$\text{算邊 3 的排列數：} 3 \times 2 = 6$$

$$\text{算邊 4 的排列數：} 4 \times 6 = 24$$

$$\text{算邊 5 的排列數：} 5 \times 24 = 120$$

因為：

$$\begin{aligned} 6 \times 120 &= 6 \times (5 \times 24) \\ &= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \\ &= 6 \times [5 \times (4 \times 6)] \\ &= 6 \times \{5 \times [4 \times (3 \times 2)]\} \\ &= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \end{aligned}$$

所以：

要算邊 6 的排列數可寫成： $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

要算邊 5 的排列數可寫成： $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

要算邊 4 的排列數可寫成： $4 \times 3 \times 2 \times 1$

要算邊 3 的排列數可寫成： $3 \times 2 \times 1$

要算邊 2 的排列數可寫成： $2 \times 1$

依照這個規律，我們發現排列公式可寫成：

$$\square \times (\square - 1) \times (\square - 2) \times (\square - 3) \cdots \cdots [\square - (\square - 1)]$$

子題：2. 切割畫面變化法則

魔術角柱上的畫面可用畫上去的，但是如果角柱已立在那兒，要利用人移動變換畫面的話，就必需先把要畫的圖先畫在紙上，或找現成的圖片，先經切割編號後，才能貼在角柱上，那麼編號要注意什麼原則呢？

在厚紙板上畫一平方公分的格子，分東西南北四面，做為角柱底盤。首先由南面開始，由左到右按 1、2、3……編號。由於東面和南面的號碼相同，欲知西面和北面的號碼是多少？可依下列原則計算出來：（如圖三）

一面的格數 - 所知的數 + 1 = 相對面的數

子題：3. 利用角柱排列設計角柱迷宮（如圖三）

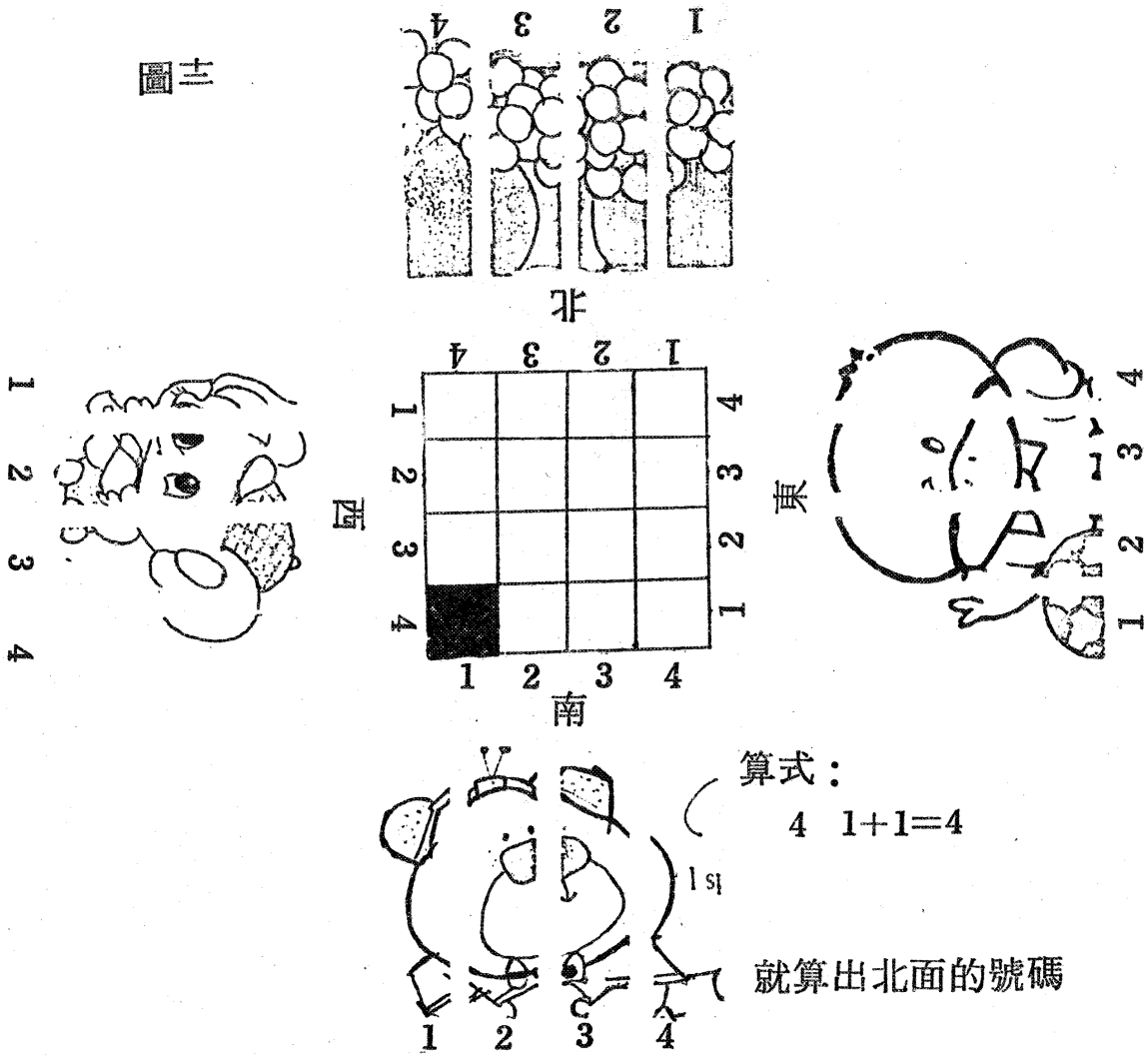
想法：如果利用角柱多面的變化，來設計角柱迷宮，把：

魔術角柱 —————→ 做成活門

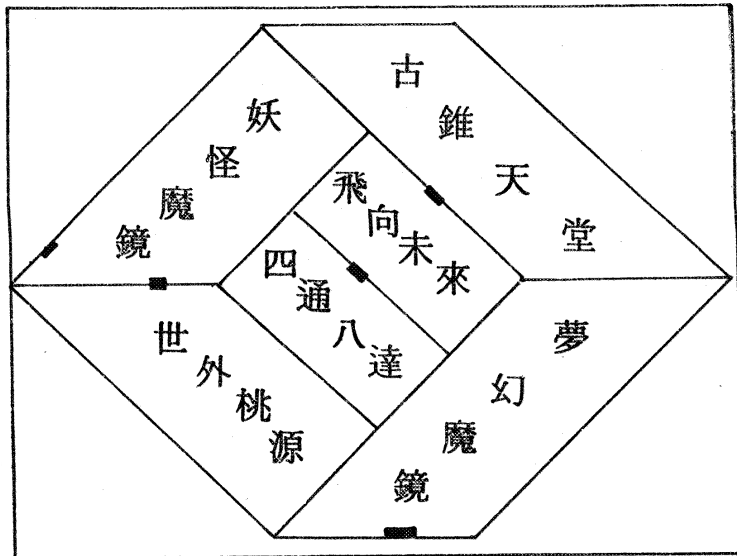
視變角柱 —————→ 做成圍牆

規畫設計角柱迷宮，當人走進去的時候，走到這裏，是一種圖，走到那裏，又是另一種圖，不是很有意思嗎？於是，我們個人設計一種迷宮的路線圖，選出一種最好的設計圖，把魔術角柱做成迷宮的活門，視變角柱做成迷宮的圍牆，並把它規畫成六大區域。雖然整個迷宮看起來是毫無出路的，但是事實上迷宮裏有裝設活門，人可以從活門出入迷宮，不但活門有趣，千變萬化的圍牆更是有趣，走到這裏，眼前展現出一種圖，轉了個身，又變成另一種圖，帶給我們視覺上的幻象。

圖三



圖五



## 五、研究結果

- (一)角柱無所不在，角柱的種類繁多，我們搜集它的圖片，或拍攝成幻燈片，整理在資料簿中。
- (二)角柱的邊數越多，展開圖就越多，我們把角柱的展開圖和變化形，整理在資料簿中。
- (三)角柱的排列與編列法則，整理在資料簿中。
- (四)以魔術角柱做成活門，視變角柱做成圍牆，利用角柱的排列，規畫設計角柱迷宮。

## 評 語

- 1.由常見之多角柱狀物體而研究對其共同性之研究，頗具創意。
- 2.作者在推導排列公式時，表現其歸納之能力。
- 3.作者在分析展開圖形種類時，表現系統思想之能力，受限於缺乏對於對稱之清晰觀念，並未能求得完整之結果，但以高小程度而言，本作品之成就應予肯定。