

# 數數牙籤組合中的圖形

高小組數學科第三名

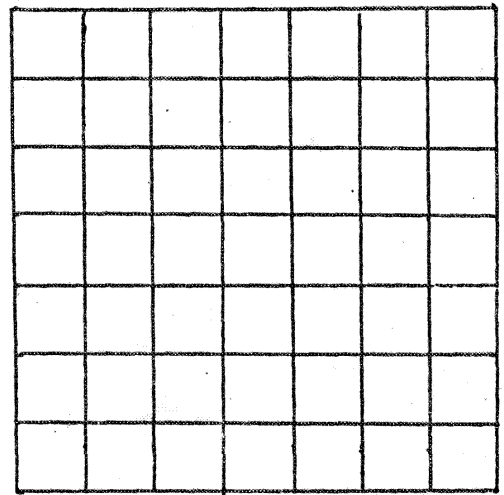
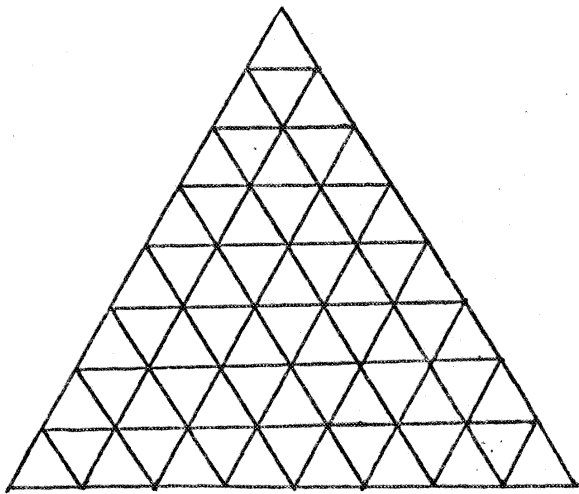
台北市立師專附設實驗小學

作者：葉一萱、劉士維  
等九名

指導教師：蔡淑英

## 一、研究動機

有一天，我看見弟妹在排牙籤，覺得很好玩！弟弟回頭問我說：「姊！妳猜這兩個圖形是用多少根牙籤排成的？它們所組成的大小正三角形、大小正方形的個數各有多少個？」

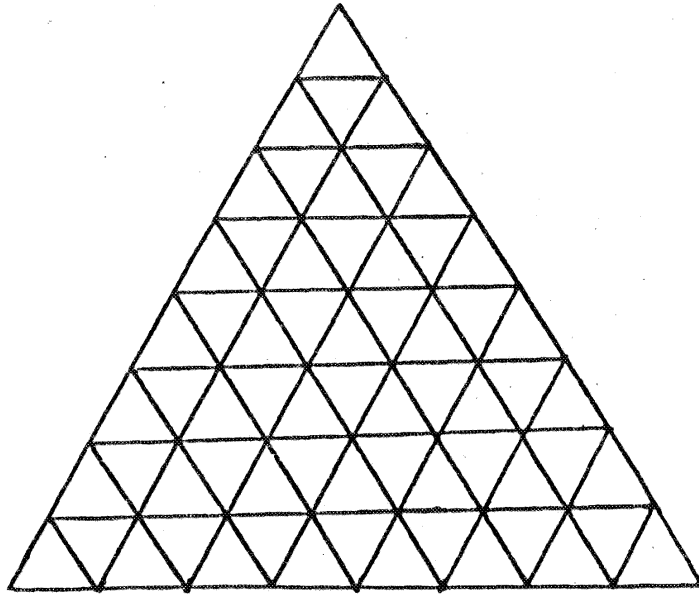


這一問，竟把我問傻了，後來覺得它相當有趣，上學時就和老師同學們開始研究這有趣的牙籤組合。

## 二、研究目的

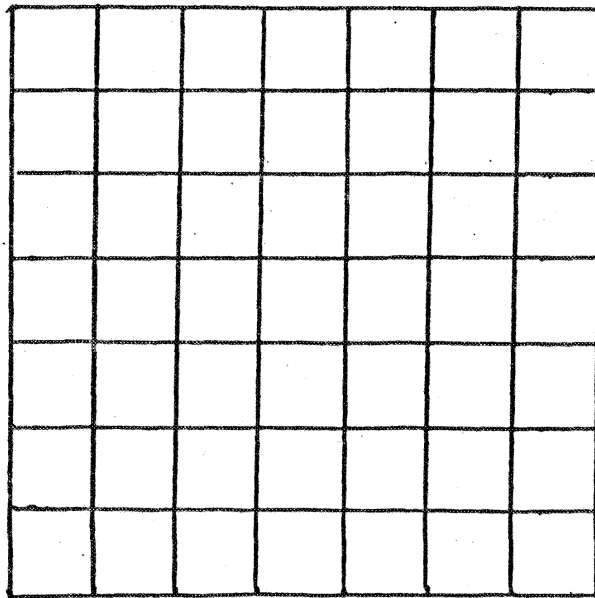
(一) (見下圖)

1. 探討牙籤的個數與層數的關係。



2. 大正三角形內有幾個邊長為 1 根牙籤的小正三角形？
3. 探討大正三角形內，共有幾個大小正三角形？以何種方法計算最快？

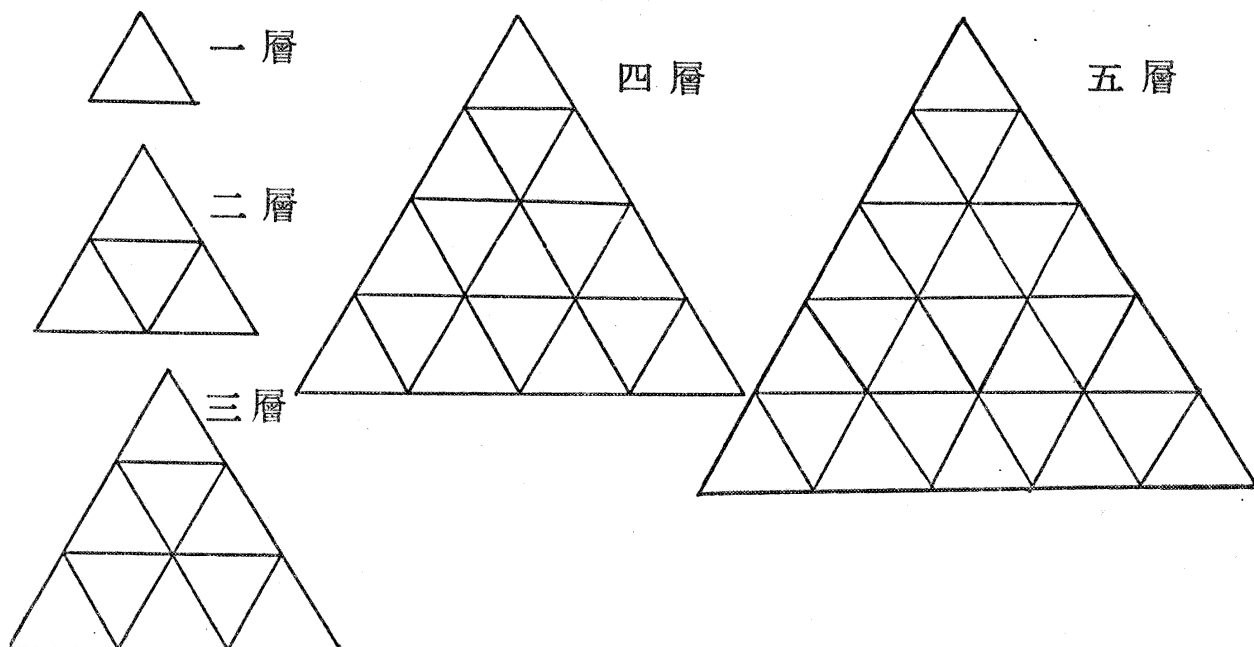
(二)



1. 探討牙籤的個數與圖形的關係。
2. 在邊長為  $n$  根牙籤的大正方形內，大小正方形共有多少個？
3. 在矩形邊長為  $m$ 、 $n$  且  $m \neq n$  內，大小正方形共有多少個？
4. 在矩形邊長為  $m$ 、 $n$  內，大小矩形共有多少個？

### 三、研究過程及解題方法

(一) 實際將牙籤排成如下圖形，來探討研究目的(一)的問題：



(一) 1：探討牙籤總數與層數間的關係：

先簡化問題，再列表尋規律：

層數	一	二	三	四	五	六	七	……	n
牙籤總數	3	9	18	30	45	63	84		
	$3 \times 1$	$3 \times 3$	$3 \times 6$	$3 \times 10$	$3 \times 15$	$3 \times 21$	$3 \times 28$		$3 \times (1+2+3+\dots+n)$
		$3 \times 2$	$3 \times 3$	$3 \times 4$	$3 \times 5$	$3 \times 6$	$3 \times 7$		

所以 若要排 n 層，其牙籤總數 =  $3 \times (1+2+3+\dots$

$$+n) = 3 \times \left( \frac{n-1}{2} \cdot n \right) = \frac{3}{2} (n+1) \cdot n$$

(一) 2：探討大正三角形內，有幾個邊長為 1 根牙籤的小正三角形。

先簡化問題，再列表尋規律：

層數	一	二	三	四	五	六	……	n-1	n
邊長為 1 根牙籤的	1	4	9	16	25	36			
小正三角形總數	1 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup>	3 <sup>2</sup>	4 <sup>2</sup>	5 <sup>2</sup>	6 <sup>2</sup>		(n-1) <sup>2</sup>	n <sup>2</sup>

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{3} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{5} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{7} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{9} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{11} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{2n-1}$

所以 當大正三角形一邊的長為  $n$  根牙籤時，其中所含有邊長為 1 根牙籤的小正三角形總數 =  $n^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)$ 。

(一) 3：研究分析大正三角形內，共有幾個大、小正三角形？

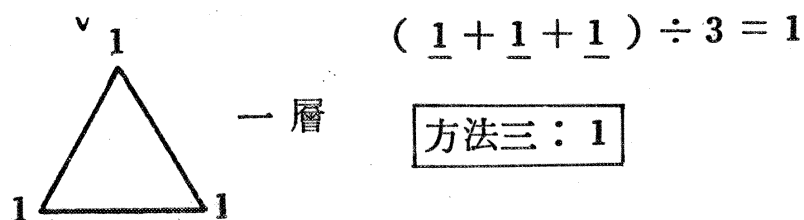
【方法一】

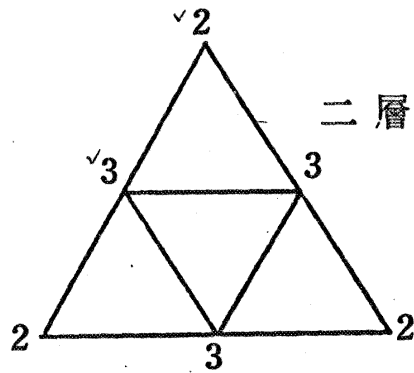
層數	邊長為 $n$ 根牙籤的三角形	算式	大小正三角形總數
二	1 2	2 <sup>2</sup> 1	5
三	1 2 3	3 <sup>2</sup> 1 + 2 1	13
四	1 正 2 倒 2 3 4	4 <sup>2</sup> 1 + 2 + 3 1 1 + 2 1	27
五	1 正 2 △ 倒 2 ▽ 3 4 5	5 <sup>2</sup> 1 + 2 + 3 + 4 1 + 2 1 + 2 + 3 1 + 2 1	48

六	1	$6^2$	78
	正 2	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	
	倒 2	$1 + 2 + 3$	
	正 3	$1 + 2 + 3 + 4$	
	倒 3	1	
	4	$1 + 2 + 3$	
	5	$1 + 2$	
6	1		
七	1	$7^2$	118
	正 2	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$	
	倒 2	$1 + 2 + 3 + 4$	
	正 3	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	
	倒 3	$1 + 2$	
	4	$1 + 2 + 3 + 4$	
	5	$1 + 2 + 3$	
6	$1 + 2$		
7	1		

層數	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
三角形總數	1	5	13	27	48	78	118	170	235	315
		4	8	14	21	30	40	52	65	80

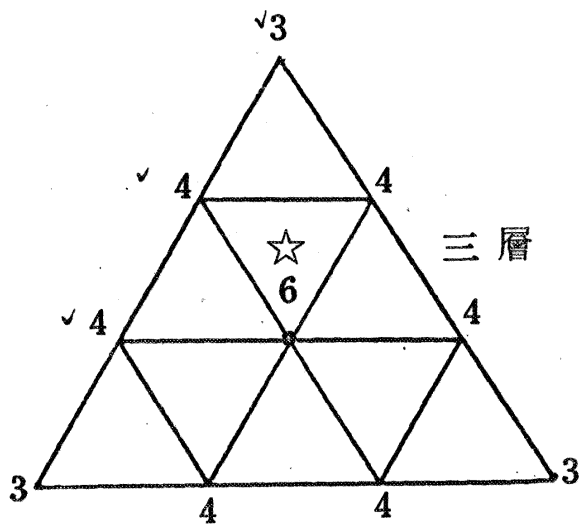
【方法二】：先算出跟每一個頂點有關的大小正三角形的個數再將它們加起來後，其總和再除以3，即是該圖形所含大小正三角形的總數。（因為如此一來，每個三角形都被重覆算了三遍，所以要把大小正三角形總數除以3）。





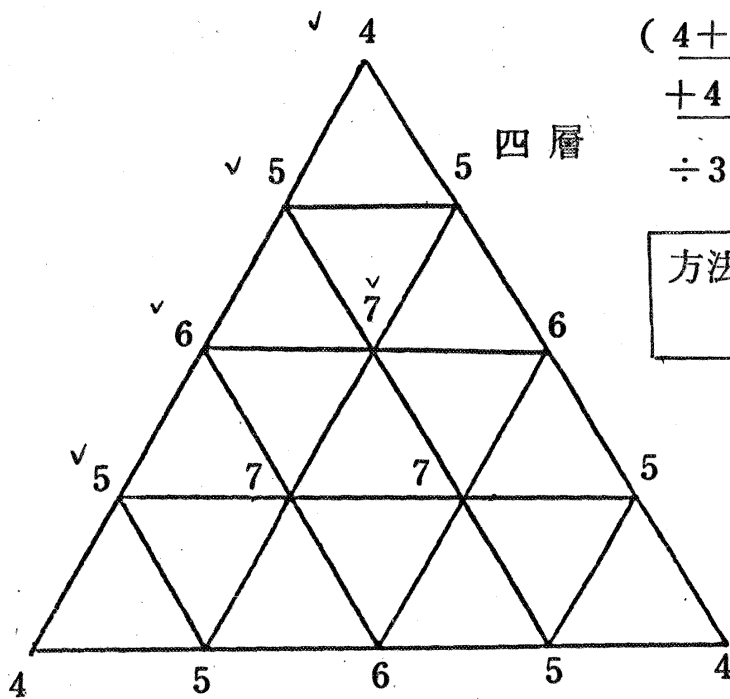
$$(\underline{2+3} + \underline{2+3} + \underline{2+3}) \div 3 = 5$$

方法三：2 + 3 = 5



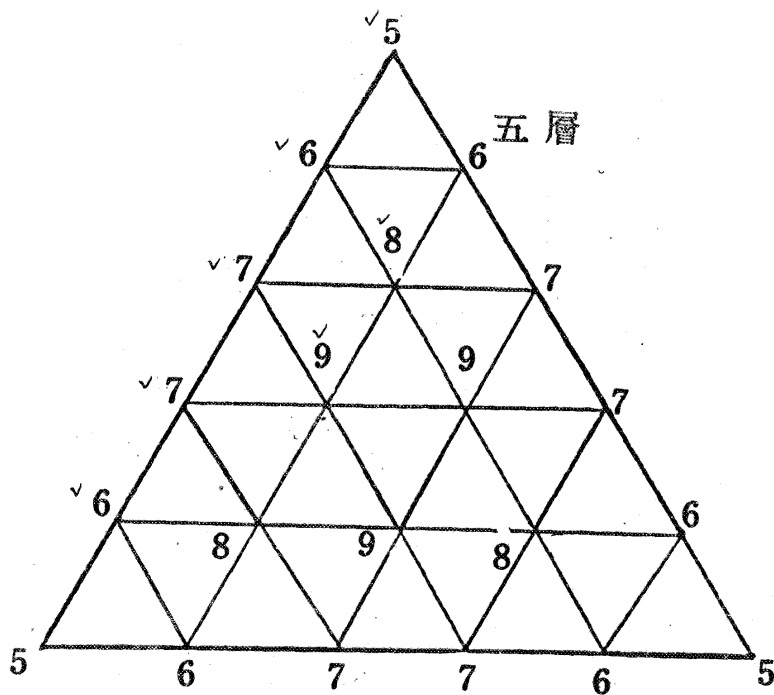
$$(\underline{3+4+4} + \underline{3+4+4} + \underline{3+4+4+6}) \div 3 = 13$$

方法三：3 + 4 + 4 + 6 ÷ 3  
= 13



$$(\underline{4+5+6+5} + \underline{4+5+6+5} + \underline{4+5+6+5+7+7+7}) \div 3 = 27$$

方法三：4 + 5 + 6 + 5 + 7  
= 27



$$\frac{(5+6+7+7+6+5+6+7+7+6+5+6+7+7+6+8+9+8+9+8+9)}{3} = 48$$

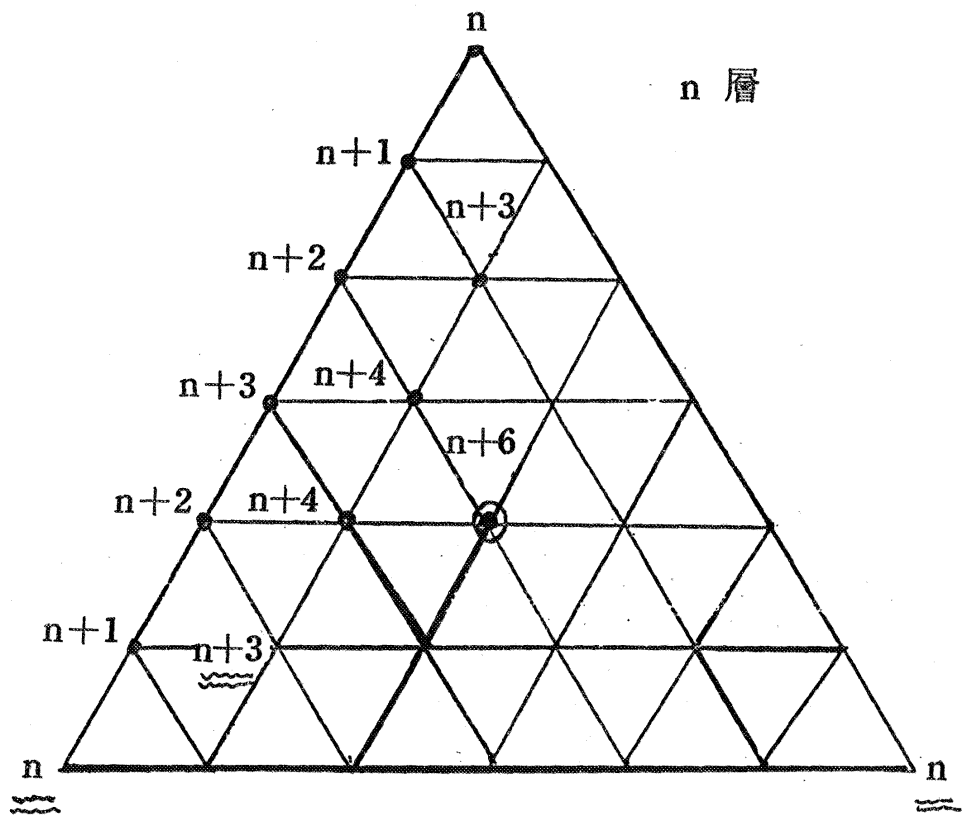
方法三：  $5+6+7+7+6+8+9 = 48$

【方法三】：比較簡單的方法：

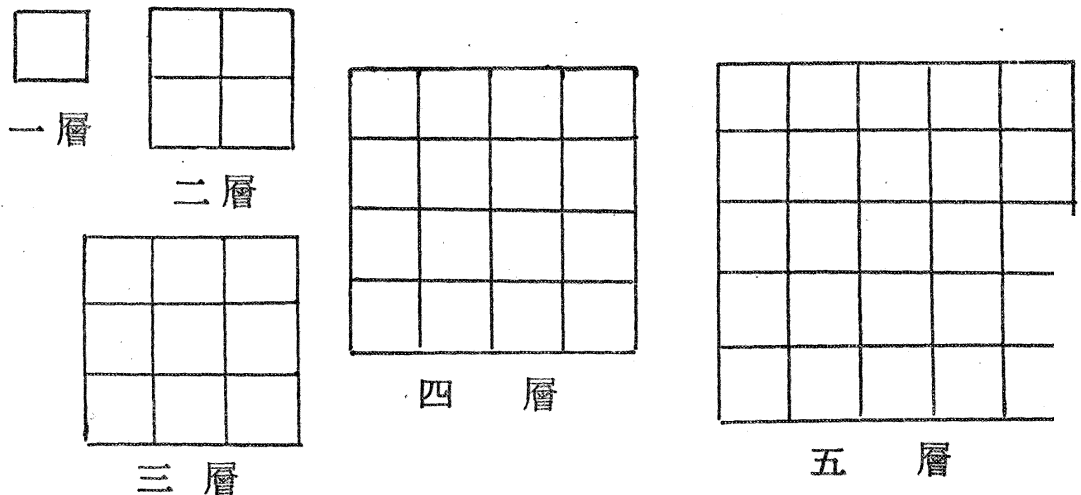
找大三角形的一條最長的邊來，去掉一個角，將邊上每一頂點的正三角形總數相加；接著再往裏面一層推進，把這些大小正三角形的個數加起來，即是該圖所含大小正三角形數，（見方法二圖中，方法三）。

如果層數是 3 的倍數，那麼最中間就會多出一個點，這點的三角形數必先除以 3，再加上其他點的三角形數，才是答案。

填頂點的三角形數要領如下：  
 若大正三角形一邊的牙籤數為  $n$ ：  
 把黑點的三角數相加，再加上  $\odot \div 3$ ，即是下圖所含的  
 大小正三角形總數。



(二) 實際拿牙籤來排成如下圖形 (1 個單位長代表 1 根牙籤長)，來  
 探討研究目的(二)的問題：





(二)一 1 : 探討牙籤總數與上圖的關係 :

先簡化問題, 再列表尋規律 :

層數	一	二	三	四	五	六	.....	n
牙籤總數	4	12	24	40	60	84		
	$4 \times 1$	$4 \times 3$	$4 \times 6$	$4 \times 10$	$4 \times 15$	$4 \times 21$		$4 \times (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{4 \times 2}$ 
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{4 \times 3}$ 
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{4 \times 4}$ 
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{4 \times 5}$ 
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{4 \times 6}$

所以 當大正方形一邊長為 n 根牙籤時, 牙籤總數

$$= 4 \times (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$= 4 \times \left( \frac{1+n}{2} \cdot n \right) = 2 \times (1+n) \cdot n$$

(二)一 2 : 探討一邊長為 n 根牙籤的大正方形內, 大小正方形總數 ?

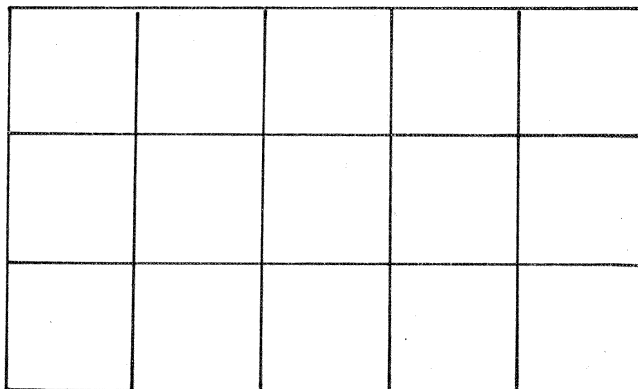
層數	一邊為 n 根牙籤的正方形	算式 <sup>2</sup>	大小正方形的總和
1	1	1	1
2	1 2	$2^2$ 1	$1 + 2^2$
3	1 2 3	$3^2$ $2^2$ 1	$1 + 2^2 + 3^2$
4	1 2 3 4	$4^2$ $3^2$ $2^2$ 1	$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

由上表所得的規律, 我們可知 :

在一邊長為  $n$  根牙籤的大正方形內，大小正方形的總數  
 $= 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$

(二) — 3：探討矩形的長、寬為  $m$ 、 $n$  ( $m \neq n$ ) 內，大小正方形數？

$m=5$ ， $n=3$  時，大小正方形共有多少個？

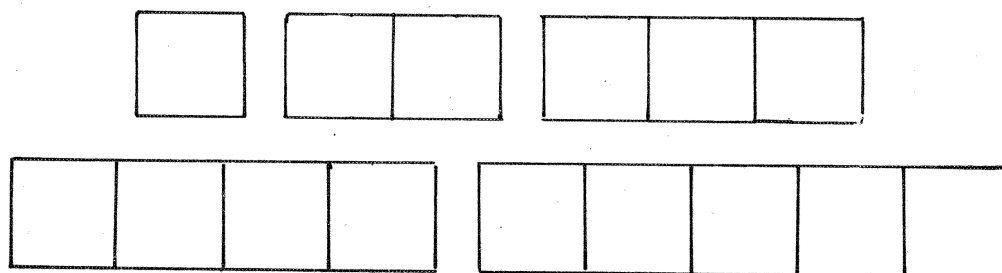


邊長為 $n$ 根牙籤的正方形	算式	大小正方形總數
1	$5 \times 3$	$5 \times 3 + 4 \times 2 + 3 \times 1 = 26$
2	$4 \times 2$	
3	$3 \times 1$	

由上可知，當矩形長寬為  $m$ 、 $n$  ( $m \neq n$  且  $m > n$ ， $m$ 、 $n$  為自然數)，其大小正方形總數  $= mn + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + (m-3)(n-3) + \dots + [m-(n-1)][n-(n-1)]$

(二) — 4：探討在矩形長、寬為  $m$ 、 $n$  內，大小矩形共有多少個？

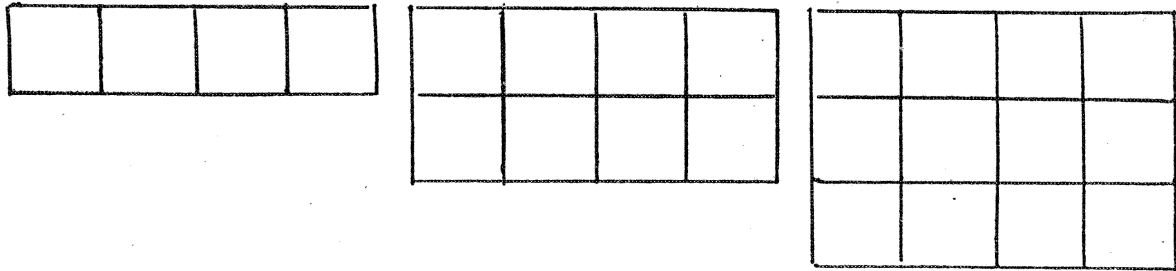
寬為 1 個單位，長為 1 ~  $m$  個單位時，其矩形總數如下：



長(m個單位)	1	2	3	4	5	6	……	m
矩 形 數	1	3	6	10	15	21	……	(1+2+3+4+……+m)

$\begin{array}{cccccc} \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \end{array}$

長為 4 個單位，寬為 1~n 個單位，其矩形總數如下：



寬(n個單位)	1	2	3	4	5	6	……	n
矩 形 數	10	30	60	100	150	210	……	$10 \times (1+2+3+\dots+n)$

$\begin{array}{cccccc} \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \\ 10 \times 2 & 10 \times 3 & 10 \times 4 & 10 \times 5 & 10 \times 6 & \end{array}$

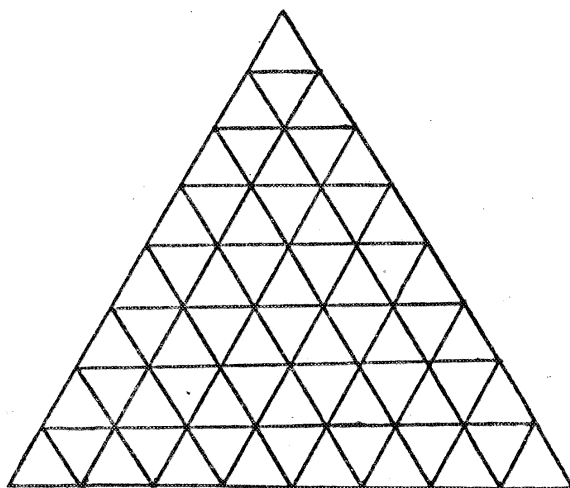
所以 當長為 m 個單位，寬為 n 個單位時，其大小矩形的總數 = (1+2+3+4+……+m)(1+2+3+4+……+n)

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \frac{1}{2} (m+1) m \right] \left[ \frac{1}{2} (n+1) n \right] \\
 &= \frac{1}{4} (m+1) m (n+1) n
 \end{aligned}$$

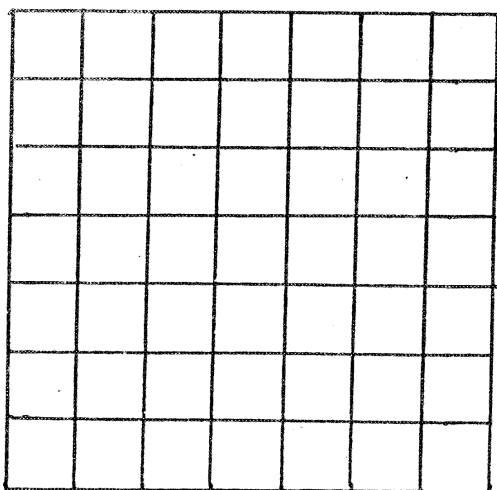
#### 四、結 論

- (一) 1. 用牙籤排列下圖至 n 層時，牙籤的總數 =  $\frac{3}{2} (n+1) n$ 。  
 2. 如下圖，當大正三角形一邊長為 n 根牙籤時，其中含有邊長為

- 1 根牙籤的小正三角形總數 =  $n^2$ 。
3. 下圖中的大小正三角形數的求算方法以研究過程中(一)—3 方法三最快。



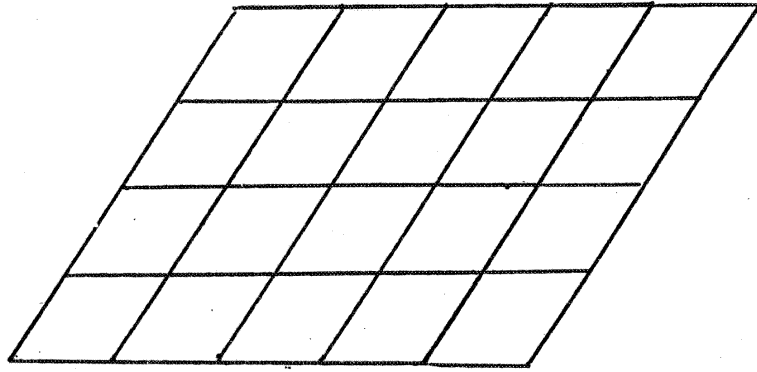
(二)



1. 如左圖，牙籤總數 =  $2(n+1)n$
2. 如左圖，在一邊長為  $n$  根牙籤的大正方形內，大小正方形總數和 =  $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$
3. 當矩形長、寬為  $m$ 、 $n$ ，其大小正方形總數 =  $mn + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + \dots + [m-(n-1)][n-(n-1)]$  (註  $m > n$ )
4. 當矩形長寬為  $m$ 、 $n$  ( $m$ 、 $n$  都為自然數)，其大小矩形的總數 =  $\frac{1}{4}(m+1)m(n+1)n$ 。

## 五、討 論

- (一) 我們所研究出來的計算方法，適用於層數較多且難以點算的時候。
- (二) 結論(二)—2、3、4，不僅適用於大小正方形與矩形，也適用於求算下圖：



- 1.大小菱形數共有幾個？
- 2.大小平行四邊形數共有多少個？

## 評 語

葉一萱等小朋友利用牙籤排出幾何圖形，並以歸納的方法導出計算牙籤數以及正方形數的公式，歸納的技巧很好，所得的公式甚為精緻。