河內寶塔與九連環

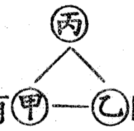
高小組數學科第三名

嘉義縣正義國民小學

作　　者：陳博勝、莊美蘭
陳紋招

指導教師：蔡瑞瓊、王振發

一、研究動機

開學不久，莊美蘭從家裡帶來了一張上面畫有

的圖及六個大小不同的圓形紙盤玩具，到學校來玩，看她玩得很有趣，就向她借來玩。這時自然老師從窗外走過，看到我在玩，就停下來看了一會兒，並指點我應該怎麼玩比較好，並且說：「河內寶塔是很好的益智遊戲，要多用腦筋思考。」哇！原來這遊戲還有一個這麼神奇的名稱，我應該深入的研究一番，說不定能找出什麼取寶的方法呢？就和莊美蘭、陳紋招在老師的指導下，做了一連串的研究。當我們對河內寶塔有了深一層的認識後，發現「河內寶塔」和童玩「九連環」在某些方面有相似的地方，於是再把九連環也探究了一番，皇天不負苦心人，終於我們得到了一些寶藏。

二、研究問題

(一)要怎樣移動紙盤，才能使河內寶塔能用最少的次數完成整個遊戲？完成整個遊戲的最少次數和紙盤的多少有什麼關係？

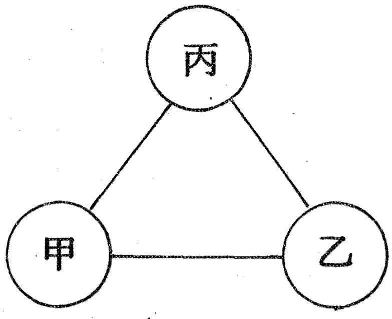
(二)要怎樣移動環，才能用最少的次數完成九連環的下環遊戲？完成整個遊戲的最少次數和環的多少有什麼關係？

(三)九連環和河內寶塔有那些相同和不同的地方？

三、研究過程

河內寶塔的遊戲內容：

請你把下圖甲地內的紙盤用最少的次數搬到乙地。



移動限制：

(1)一次只能移動一張紙盤。

(2)有幾張紙盤同時在一個地方時，一定要由上面的先移動。

(3)移動紙盤時，可由一處移到另一處，但不可放在甲、乙、丙三處以外的地方。

(4)不可在小紙盤上放大紙盤。

【問題一】

要怎樣移動河內寶塔，才能用最少的次數完成整個遊戲？

爲了簡化問題，我們就由 1 個紙盤做起直到 6 個紙盤爲止，每人在 3 、 4 、 5 、 6 個紙盤時各做 10 次，並詳加紀錄，希望能找到完成遊戲最少次數的方法。

(一)我們把各人的紀錄（請參看實驗紀錄）拿來比較，找出完成這個遊戲的最少次數是

表一

紙　　盤　　數	1	2	3	4	5	6
完成整個遊戲的最少次數	1	3	7	15	31	63

〔討論〕

移動第一次的位置，非常重要，如果放錯地方，就要多走好幾步。

(二)我們將各種紙盤數移動最少次的方法，整理出表

〔討論〕

1. 有奇數個紙盤時，1盤要先移往乙；有偶數個紙盤時，1盤則先移往丙。才能用最少的次數完成遊戲。

2. 把移動的步驟以四步分成一組時，每組的前三步都是1、2，1的重覆，每組的第四步則以3、4、3、5、3……3、ㄅ、3……3、5、3、4、3（ㄅ代表紙盤數）的規律循環，並且以ㄅ爲分界點，成上下對稱。

3. 各紙盤移動時也呈現規律的循環：

(1)奇數個紙盤時：

奇數盤（1、3、5……盤）呈乙→丙→甲的反時鐘方向的循環。即

　丙
↙　↖　。
甲→乙

偶數盤（2、4、6……盤）呈丙→乙→甲的順時鐘方向的循環。即

　丙
↗　↘　。
甲←乙

(2)偶數個紙盤時則相反：

奇數盤呈丙→乙→甲的順時鐘方向循環。即

　丙
↗　↘　。
甲←乙

偶數盤呈乙→丙→甲的反時鐘方向循環。即

　丙
↙　↖　。
甲→乙

4. 各紙盤在移動的次數上，越小的紙盤，移動的次數越多，而且成2的倍數增加。

以6個紙盤的移動爲例，可做出下表：

表二

紙盤號碼	1	2	3	4	5	6
各盤移動次數	32	16	8	4	2	1
		16×2	8×2	4×2	2×2	1×2

5.在移動的過程中，有一個比較不容易弄錯的移動方法：

以要移動的最大紙盤（目的盤）做爲分界點，在搬目的盤前，比較小的紙盤都得由甲先搬到丙，使乙空出來，讓目的盤搬進乙，然後再把在丙的紙盤設法搬進乙，以完成整個遊戲。

所以在整個遊戲中，只要把握住每個分界點，就能很快的完成整個遊戲。

【問題二】

完成整個遊戲的最少次數和紙盤的多少有什麼關係？

我們將表一重新畫出，並求出紙盤增多的次數如下表：

表三

紙　盤　數	1	2	3	4	5	6
完成次數	1	3	7	15	31	63
兩種紙盤移動次數的差		2	4	8	16	32

〔討論〕

由表三我們發現：

㈠移動的次數差成 2 的倍數增加。（見表四）

㈡移動次數爲 1 、 3 、 7 、 15 、 31 、 63 恰好比移動次數差少 1，所以可以寫成下表：（見表五）

表四

紙　盤　數	移　動　的　次　數　差
1 ～ 2	$2 = 2 \qquad = 2^1$
2 ～ 3	$4 = 2 \times 2 \qquad = 2^2$
3 ～ 4	$8 = 4 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 \qquad = 2^3$
4 ～ 5	$16 = 8 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \qquad = 2^4$
5 ～ 6	$32 = 16 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

表五

紙盤數(ㄅ)	移　動　次　數　(ㄇ)
1	$1 = 2 - 1 \qquad = 2^1 - 1$
2	$3 = 4 - 1 = 2 \times 2 - 1 \qquad = 2^2 - 1$
3	$7 = 8 - 1 = 2 \times 2 \times 2 - 1 \qquad = 2^3 - 1$
4	$15 = 16 - 1 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1 \qquad = 2^4 - 1$
5	$31 = 32 - 1 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1 \qquad = 2^5 - 1$
6	$63 = 64 - 1 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1 = 2^6 - 1$

由表五我們很快的找出移動次數和紙盤數間關係的可能公式爲：

$$ㄇ = 2^{ㄅ} - 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式一}$$

〔疑　問〕

問題一、二所發現的各種規則性及預估完成遊戲次數的計算方法，對紙盤數更多時，是不是也可以應用？

〔驗　證〕

(1)公式一如果正確可行，當紙盤增加爲 7 、8、9、10 個時，可能完成遊戲的最少次數應該是： 127 ，255 ，511，1023。

(2)我們實際的去探討紙盤數爲 7 、8、9、10 個時的移動情形。結果都符合規則及預估次數。

〔討　論〕

從以上的驗證實驗中，可發現問題一的各種規則，及公式一都可應用在更多的紙盤上。

【問題三】

要怎樣移動才能以最少的次數完成九連環的下環遊戲？

我們把從1～9環的移動步驟加以整理如下：（略）

〔討　論〕

由上面的整理中我們發現：

㈠完成整個遊戲的最少次數是：

表六

環　　數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
移動次數	1	2	5	10	21	42	85	170	341

㈡奇數個環時要先下1環，偶數個環時則先下2環，才能用最少的次數完成遊戲。

㈢奇數個環由第3步，偶數個環由第4步以後，每4步為一組時，每組的前三步都是1、2、1的重覆，每組的第四步也成3、×、3、×……的規律。

㈣各環在移動的次數上，越前面的環，移動的次數越多，增加的情形為2倍減1和2倍加1的循環。

如9環時各環移動的次數為：

表七

環的號碼	1	2	3	4	5	6	7	8	9
移動次數	171	85	43	21	11	5	3	1	1
	85×2 ＋1	43×2 －1	21×2 ＋1	11×2 －1	5×2 ＋1	3×2 －1	1×2 ＋1	1×2 －1	

㈤整個遊戲的竅門是：

要下的「目的環」要和前一環同時留在槓上，而以前的

所有環都要下槓，才能完成，如要下 9 環時，則 9 、 8 兩環都要留在槓上，而 7 ～ 1 環都要在槓下，才能下 9 環，如果連 8 環都在槓下，只留 9 環在槓上，反而無法下 9 環，而 7 環要下，必要先下 5 環……如此反推，則可很快的完成整個遊戲。

【問題四】

要完成整個九連環遊戲的最少次數和環的多少有什麼關係？

我們再將表六重新加以觀察、研究、討論：

表八

環　數（ㄅ）	1	2	3	4	5	6	7	8	9
移動次數(ㄇ)	1	2	5	10	21	42	85	170	341
	3		15		63		255		

〔討　論〕

經過研究討論後，我們發現：

㈠把環數分成（ 1 、 2 ）、（ 3 、 4 ）、（ 5 、 6 ）、（ 7 、 8 ）……二環一組時，每組的偶數環移動次數恰好是奇數環移動次數的 2 倍。

㈡各組移動的「次數和」分別是 3 、 15 、 63 ……，恰好和河內寶塔偶數環移動的次數一樣，由公式一知道，可以用

$2^{ㄅ}-1$ 計算出來。

㈢因為偶數環移動的次數占各組移動次數和的⅔，奇數環移動的次數占各組移動次數和的⅓，因此我們套用公式一，求出：

㈠偶數環移動次數的公式：

$$ㄇ=\frac{2}{3}\left(2^{ㄅ}-1\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式二}$$

㈡奇數環移動次數的公式：

$$ㄇ=\frac{1}{3}(2^{ㄅ+1}-1)\text{…………公式三}$$

（註：ㄅ是奇數環的環數，ㄅ＋1才是偶數環的環數）

【問題五】

「九連環」和「河內寶塔」有那些相同和不同的地方？

我們把以上的研究、討論，加以整理比較，發現有下列異同存在：

「九連環」和「河內寶塔」的異同表	
相同點	(一)「九連環」和「河內寶塔」移動的步驟以四步爲一組時，每組的前三步都是1、2、1的重覆，第四步則有一定的規律趨勢。 (二)移動次數隨環數（或盤數）的增加，而成一定規律的增加。 (三)數目越小的環（或紙盤）移動的次數越多。
不同點	(一)九連環移動的位置只有上、下兩處，河內寶塔移動的位置則有甲、乙、丙三處。 (二)九連環移動時，目的環和比目的環小1的環留在槓上，只要把比目的環小2以上的環全移走，就能移走目的環。河內寶塔必須將同一處比目的環小的紙盤全移走，才能移動目的盤。 (三)九連環和河內寶塔的環數和盤數相等時，九連環移動的次數大約是河內寶塔移動次數的⅔。 (四)九連環靠本身的構造限制移動的方法，而河內寶塔必須靠人爲的約定限制移動的方法。

【問題六】

爲什麼環數和盤數一樣多時，九連環移動的次數只要河內寶塔的⅔左右呢？

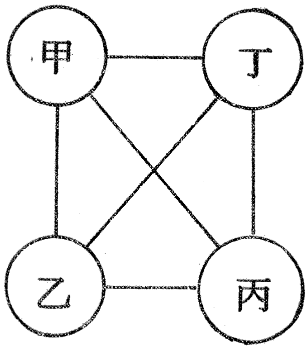
我們由問題五的比較中，推測可能的原因有二：

(一)河內寶塔可移動的位置有三處，九連環則只有兩處。

(二)河內寶塔必須把同在一處比最大紙盤小的紙盤全移走後，才能移動最大的紙盤，九連環則只要把比最大環小 2 以上的環移走，就可以移動最大環。

到底是那個原因在左右移動的次數呢？我們又做了下面的探究：

(一)我們把河內寶塔可移動的位置增加一處，使成下圖：



我們由 1～6 盤做實驗，探討可移動位置的增多對移動次數的影響，結果得到下表：

表九

紙盤數	1	2	3	4	5	6
移動次數	1	3	5	9	13	17

〔討 論〕

我們將表一、表九拿來加以比較，發現：可移動的位置增加時，所須移動的次數反而減少，所以第一個原因應該不是影響河內寶塔移動次數多的原因。

(二)我們把河內寶塔移動的限制②改成和九連環相同的移動條件：

只要把比最大盤小 2 以上的紙盤移走就可移動最大盤。

然後做實驗探討「移動條件」的限制對移動次數的影響。

結果得到下表：

表十

紙盤數	1	2	3	4	5	6
移動次數	1	2	5	10	21	42

〔討 論〕

由上表所得的結果，竟然和九連環的移動次數相同，顯

然是影響移動次數的主要因素。

〔結　果〕

由以上的兩個探討，我們發現：環和盤數相同的河內寶塔較九連環移動次數多的原因是：

河內寶塔把比最大盤小的盤全移走後才能移動最大盤，而九連環只要把比最大環小 2 以上的環全移走就可以移動最大環的移動限制是主要原因。

四、研究心得

在一連串的探討後，我們得到一些心得：

㈠河內寶塔和九連環的遊戲性質相似。

㈡河內寶塔和九連環都因盤或環的增加，而有規律的增加移動的次數。

㈢兩種遊戲的移動步驟以四步分成一組時，前三步都是 1 、 2 、 1 的重覆，第四步也有一定的循環規律。

㈣兩種遊戲在環數和盤數相等時，九連環移動的次數只要河內寶塔的⅔次就能完成遊戲。原因在於移動限制的不同。

㈤九連環的構造本身就限制了移動的方法，而河內寶塔要靠人爲的約定限制移動的方法。顯然九連環的設計要高明些。

㈥現在各校在推行「九連環」時都只當做是一種童玩而已，但願我們的研究能提供給全國的小朋友一些數學的概念。

評　語

河內寶塔與九連環都是很受歡迎的益智遊戲，陳博勝等小朋友將他們熟練的遊戲過程轉化成數學的模式，以數學方法分析遊戲的步驟，得到相當完整的結果，並比較兩種遊戲的數學模式的異同。