

奇數的倍數的識別法

高小組數學科第二名

台南縣保東國民小學

作者：許心怡、張惠雅

許淑梅、許秀卿

指導教師：曾進發、徐世和

一、研究動機

上因數與倍數課時，課本列舉 2、3、5、11 的倍數的識別法，應用起來非常簡便，許心怡同學問老師說：「其他的整數是否也有簡便的識別法呢？」老師說：「大家一起去發現呀！」因此，我們就利用課餘時間，在老師指導下，進行這個研究。

二、研究目的

- (一) 探討個位 1 的整數的倍數的識別法。
- (二) 探討個位 3 的整數的倍數的識別法。
- (三) 探討個位 7 的整數的倍數的識別法。
- (四) 探討個位 9 的整數的倍數的識別法。
- (五) 從研究過程中，養成歸納、整理的能力及了解數學的規律性。
- (六) 增進數學科學習的興趣。

三、研究過程

- (一) 以 100 以內的奇數為研究範圍。
- (二) 尋找 100 以內的奇數。
- (三) 奇數的個位數字一定是 1、3、5、7、9。
- (四) 個位數字 5 的整數的倍數，其個位數字一定是 0 或 5，較為容易識別，本次研究不加以研究。

(五)探討個位 1 的整數的倍數的識別法：

1. 試求與分析：

(1) 尋找 11 的倍數的識別法：

↵ 找出 11 的倍數，如 22、33、44、55……。

↯ 課本中 11 的倍數的識別法，是將所求整數的奇位個數的和與偶位個數的和相減，得數是 0 或 11 的倍數時，這個整數就是 11 的倍數。

□ 我們在練習中發現，將 22、33、44、55……的個位數去掉，再減去個位數，結果均為 0 或 11 的倍數。例如：

$$\begin{array}{r} 2 \cancel{2} \\ - 2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \cancel{3} \\ - 3 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \cancel{4} \\ - 4 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \cancel{5} \\ - 5 \\ \hline 0 \end{array}$$

□ 用這種方法，計算下列各數，例如：

$$\begin{array}{r} 11 \times 25 = 275 \\ 27 \cancel{5} \\ - 5 \\ \hline 2 \cancel{2} \\ - 2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \times 123 = 1353 \\ 135 \cancel{3} \\ - 3 \\ \hline 13 \cancel{2} \\ - 2 \\ \hline 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \times 354 = 3894 \\ 389 \cancel{4} \\ - 4 \\ \hline 38 \cancel{5} \\ - 5 \\ \hline 33 \end{array}$$

得數 0

得數是 11 的倍數

得數是 11 的倍數

↯ 證驗其他 11 的倍數的結果也均為 0 或 11 的倍數，足證這種識別的方法很正確。

↯ 因此，一個整數將個位數去掉，再減去個位數，最後得數是 0 或 11 的倍數時，這個整數就是 11 的倍數。

(2) 尋找 21 的倍數的識別法：

↵ 運用識別 11 的倍數的方法，逐項試求，尋找得數是 0 或 21 的倍數者。例如： $21 \times 32 = 672$

$\begin{array}{r} 67\cancel{2} \\ - 2 \quad (2 \times 1 = 2) \\ \hline 6\cancel{5} \\ - 5 \quad (5 \times 1 = 5) \\ \hline 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 67\cancel{2} \\ + 2 \quad (2 \times 1 = 2) \\ \hline 6\cancel{9} \\ + 9 \quad (9 \times 1 = 9) \\ \hline 15 \end{array}$	$\begin{array}{r} 67\cancel{2} \\ - 4 \quad (2 \times 2 = 4) \\ \hline 6\cancel{3} \\ - 6 \quad (3 \times 2 = 6) \\ \hline 0 \end{array}$
---	--	---

1 倍減去計算得數不是 0 或 11 的倍數 1 倍加法計算得數不是 0 或 11 的倍數 2 倍減法計算得數 0，此法可能是識別 21 的倍數的簡便法

↗ 運用將個位數去掉，再減去個位數的 2 倍的方法，證驗其他 21 的倍數，結果也均為 0 或 21 的倍數，足證這種識別法很正確。

□ 因此，一個整數，將個位數去掉，再減去個位數的 2 倍，得數是 0 或 21 的倍數時，這個整數就是 21 的倍數。

(3) 運用上述的方法，分別尋找 31、41、51、61、71、81、91 各數的倍數的識別法，獲得各數的識別法如下：

31 的倍數的識別法	41 的倍數的識別法	51 的倍數的識別法
$31 \times 29 = 899$	$41 \times 29 = 1189$	$51 \times 29 = 1479$
$\begin{array}{r} 89\cancel{9} \\ - 27 \quad (9 \times 3 = 27) \\ \hline 6\cancel{2} \\ - 6 \quad (2 \times 3 = 6) \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 118\cancel{9} \\ - 36 \quad (9 \times 4 = 36) \\ \hline 8\cancel{2} \\ - 8 \quad (2 \times 4 = 8) \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 147\cancel{9} \\ - 45 \quad (9 \times 5 = 45) \\ \hline 10\cancel{2} \\ - 10 \quad (2 \times 5 = 10) \\ \hline 0 \end{array}$

3 倍減法計算得數 0 4 倍減法計算得數 0 5 倍減法計算得數 0

61 的倍數的識別法	71 的倍數的識別法
$61 \times 29 = 1769$	$71 \times 29 = 2059$
$\begin{array}{r} 176\cancel{9} \\ - 54 \quad (9 \times 6 = 54) \\ \hline 12\cancel{2} \\ - 12 \quad (2 \times 6 = 12) \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 205\cancel{9} \\ - 63 \quad (9 \times 7 = 63) \\ \hline 14\cancel{2} \\ - 14 \quad (2 \times 7 = 14) \\ \hline 0 \end{array}$

6 倍減法計算得數 0

81 的倍數的識別法

$$81 \times 29 = 2349$$

$$\begin{array}{r}
 2\ 3\ 4\ \cancel{9} \\
 -\quad 7\ 2\quad (9 \times 8 = 72) \\
 \hline
 1\ 6\ \cancel{9} \\
 -\quad 1\ 6\quad (2 \times 8 = 16) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

7 倍減法計算得數 0

91 的倍數的識別法

$$91 \times 29 = 2639$$

$$\begin{array}{r}
 2\ 6\ 3\ \cancel{9} \\
 -\quad 8\ 1\quad (9 \times 9 = 81) \\
 \hline
 1\ 8\ \cancel{9} \\
 -\quad 1\ 8\quad (2 \times 9 = 18) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

8 倍減法計算得數 0

9 倍減法計算得數 0

2. 推論：

(1) 整數 11、21、31、41、51、61、71、81、91 的倍數均可用這種簡便的方式識別。

(2) 識別的方法是：

↵ 去掉個位數。

↵ 減去個位數的？倍（倍數表如下）

數目	11	21	31	41	51	61	71	81	91
倍數(常數)	1	2	3	4	5	6	7	8	9

（所乘的倍數稱為常數）

□ 最後得數是 0 或該數的倍數時，這個整數就是該數的倍數。

(3) 常數恰等於十位數的數字。

3. 結論：

個位 1 的整數的倍數的識別法是將所求整數之個位數去掉，再減去個位數與常數的積，最後得數 0 或該數的倍數時，這整數就是該數的倍數。

(六) 探討個位 3 的整數的倍數的識別法，獲得各數的識別法如下：

13 的倍數的識別法

$$13 \times 29 = 377$$

23 的倍數的識別法

$$23 \times 29 = 667$$

$$\begin{array}{r}
 37 \cancel{\times} \\
 + 28 \quad (7 \times 4 = 28) \\
 \hline
 65 \\
 + 20 \quad (5 \times 4 = 20) \\
 \hline
 26
 \end{array}$$

4 倍加法計算得數 26 是 13 的 2 倍

33 的倍數的識別法

$$33 \times 29 = 957$$

$$\begin{array}{r}
 95 \cancel{\times} \\
 + 70 \quad (7 \times 10 = 70) \\
 \hline
 165 \\
 + 50 \quad (5 \times 10 = 50) \\
 \hline
 66
 \end{array}$$

10 倍加法計算得數 66 是 33 的 2 倍

53 的倍數的識別法

$$53 \times 29 = 1537$$

$$\begin{array}{r}
 153 \cancel{\times} \\
 + 112 \quad (7 \times 16 = 112) \\
 \hline
 265 \\
 + 80 \quad (5 \times 16 = 80) \\
 \hline
 106
 \end{array}$$

16 倍加法計算得數 106 是 53 的 2 倍

73 的倍數的識別法

$$73 \times 29 = 2117$$

$$\begin{array}{r}
 66 \cancel{\times} \\
 + 49 \quad (7 \times 7 = 49) \\
 \hline
 115 \\
 + 35 \quad (5 \times 7 = 35) \\
 \hline
 46
 \end{array}$$

7 倍加法計算得數 46 是 23 的 2 倍

43 的倍數的識別法

$$43 \times 29 = 1247$$

$$\begin{array}{r}
 124 \cancel{\times} \\
 + 91 \quad (7 \times 13 = 91) \\
 \hline
 215 \\
 + 65 \quad (5 \times 13 = 65) \\
 \hline
 86
 \end{array}$$

13 倍加法計算得數 86 是 43 的 2 倍

63 的倍數的識別法

$$63 \times 29 = 1827$$

$$\begin{array}{r}
 182 \cancel{\times} \\
 + 133 \quad (7 \times 19 = 133) \\
 \hline
 315 \\
 + 95 \quad (5 \times 19 = 95) \\
 \hline
 126
 \end{array}$$

19 倍加法計算得數 126 是 63 的 2 倍

83 的倍數的識別法

$$83 \times 29 = 2407$$

$\begin{array}{r} 211 \cancel{7} \\ + 154 \quad (7 \times 22 = 154) \\ \hline 36 \cancel{5} \\ + 110 \quad (5 \times 22 = 110) \\ \hline 146 \end{array}$	$\begin{array}{r} 240 \cancel{7} \\ + 175 \quad (7 \times 25 = 175) \\ \hline 41 \cancel{5} \\ + 125 \quad (5 \times 25 = 125) \\ \hline 166 \end{array}$
---	---

22 倍加法計算得數 146 是
73 的 2 倍

25 倍加法計算得數 166
是 83 的 2 倍

93 的倍數的識別法

$$93 \times 29 = 2697$$

$$\begin{array}{r} 269 \cancel{7} \\ + 196 \quad (7 \times 28 = 196) \\ \hline 46 \cancel{5} \\ + 140 \quad (5 \times 28 = 140) \\ \hline 186 \end{array}$$

28 倍加法計算得數 186 是 93 的 2 倍

(七) 探討個位 7 的整數的倍數的識別法，獲得各數的識別法如下：

17 的倍數的識別法

$$17 \times 29 = 493$$

$$\begin{array}{r} 49 \cancel{3} \\ - 15 \quad (3 \times 5 = 15) \\ \hline 34 \end{array}$$

5 倍減法計算得數 34 是 17
的 2 倍

27 的倍數的識別法

$$27 \times 29 = 783$$

$$\begin{array}{r} 78 \cancel{3} \\ - 24 \quad (3 \times 8 = 24) \\ \hline 54 \end{array}$$

8 倍減法計算得數 54 是 27
的 2 倍

37 的倍數的識別法

$$37 \times 29 = 1073$$

$$\begin{array}{r} 107 \cancel{3} \\ - 33 \quad (3 \times 11 = 33) \\ \hline 74 \end{array}$$

11 倍減法計算得數 74 是 37
的 2 倍

47 的倍數的識別法

$$47 \times 29 = 1363$$

$$\begin{array}{r} 136 \cancel{3} \\ - 42 \quad (3 \times 14 = 42) \\ \hline 94 \end{array}$$

14 倍減法計算得數 94 是 47
的 2 倍

57 的倍數的識別法

$$57 \times 29 = 1653$$

$$\begin{array}{r} 1653 \\ - 51 \quad (3 \times 17 = 51) \\ \hline 114 \end{array}$$

17 倍減法計算得數 114 是 57 的 2 倍

67 的倍數的識別法

$$67 \times 29 = 1943$$

$$\begin{array}{r} 1943 \\ - 60 \quad (3 \times 20 = 60) \\ \hline 134 \end{array}$$

20 倍減法計算得數 134 是 67 的 2 倍

77 的倍數的識別法

$$77 \times 29 = 2233$$

$$\begin{array}{r} 2233 \\ - 69 \quad (3 \times 23 = 69) \\ \hline 154 \end{array}$$

23 倍減法計算得數 154 是 77 的 2 倍

87 的倍數的識別法

$$87 \times 29 = 2523$$

$$\begin{array}{r} 2523 \\ - 78 \quad (3 \times 26 = 78) \\ \hline 174 \end{array}$$

26 倍減法計算得數 174 是 87 的 2 倍

97 的倍數的識別法

$$97 \times 29 = 2813$$

$$\begin{array}{r} 2813 \\ - 87 \quad (3 \times 29 = 87) \\ \hline 194 \end{array}$$

29 倍減法計算得數 194 是 97 的 2 倍

(八) 探討個位 9 的整數的倍數的識別法，獲得各數的識別法如下：

19 的倍數的識別法

$$19 \times 29 = 551$$

$$\begin{array}{r} 551 \\ + 2 \quad (1 \times 2 = 2) \\ \hline 57 \\ + 14 \quad (7 \times 2 = 14) \\ \hline 19 \end{array}$$

2 倍加法計算得數 19

29 的倍數的識別法

$$29 \times 29 = 841$$

$$\begin{array}{r} 841 \\ + 3 \quad (1 \times 3 = 3) \\ \hline 87 \\ + 21 \quad (7 \times 3 = 21) \\ \hline 29 \end{array}$$

3 倍加法計算得數 29

39 的倍數的識別法

$$39 \times 29 = 1131$$

$$\begin{array}{r}
 113 \cancel{1} \\
 + \quad 4 \quad (1 \times 4 = 4) \\
 \hline
 11 \cancel{7} \\
 + 28 \quad (7 \times 4 = 28) \\
 \hline
 39
 \end{array}$$

4 倍加法計算得數 39

59 的倍數的識別法

$$59 \times 29 = 1711$$

$$\begin{array}{r}
 171 \cancel{1} \\
 + \quad 6 \quad (1 \times 6 = 6) \\
 \hline
 17 \cancel{7} \\
 + 42 \quad (7 \times 6 = 42) \\
 \hline
 59
 \end{array}$$

6 倍加法計算得數 59

79 的倍數的識別法

$$79 \times 29 = 2291$$

$$\begin{array}{r}
 229 \cancel{1} \\
 + \quad 8 \quad (1 \times 8 = 8) \\
 \hline
 23 \cancel{7} \\
 + 56 \quad (7 \times 8 = 56) \\
 \hline
 79
 \end{array}$$

8 倍加法計算得數 79

99 的倍數的識別法

$$99 \times 29 = 2871$$

$$\begin{array}{r}
 287 \cancel{1} \\
 + 10 \quad (1 \times 10 = 10) \\
 \hline
 29 \cancel{7} \\
 + 70 \quad (7 \times 10 = 70) \\
 \hline
 99
 \end{array}$$

10 倍加法計算得數 99

49 的倍數的識別法

$$49 \times 29 = 1421$$

$$\begin{array}{r}
 142 \cancel{1} \\
 + \quad 5 \quad (1 \times 5 = 5) \\
 \hline
 14 \cancel{7} \\
 + 35 \quad (7 \times 5 = 35) \\
 \hline
 49
 \end{array}$$

5 倍加法計算得數 49

69 的倍數的識別法

$$69 \times 29 = 2001$$

$$\begin{array}{r}
 200 \cancel{1} \\
 + \quad 7 \quad (1 \times 7 = 7) \\
 \hline
 20 \cancel{7} \\
 + 49 \quad (7 \times 7 = 49) \\
 \hline
 69
 \end{array}$$

7 倍加法計算得數 69

89 的倍數的識別法

$$89 \times 29 = 2581$$

$$\begin{array}{r}
 258 \cancel{1} \\
 + \quad 9 \quad (1 \times 9 = 9) \\
 \hline
 26 \cancel{7} \\
 + 63 \quad (7 \times 9 = 63) \\
 \hline
 89
 \end{array}$$

9 倍加法計算得數 89

$$287 \cancel{1}$$

$$10 \quad (1 \times 10 = 10)$$

$$29 \cancel{7}$$

$$+ 70 \quad (7 \times 10 = 70)$$

$$99$$

四、研究心得

(一)任何奇數（個位數字 5 除外）的倍數，都可用此簡便的方法識別。

(二)整數乘法、除法驗算時，用此法驗算既簡便又正確。

(三)除 2 以外的質數必定是奇數，此法也可以用於質數的倍數的識別。

(四)識別的步驟是：

1.捨去個位數。

2.用餘下的數目加上或減去個位數與常數的乘積。

（個位數字 1、7 用減法計算，個位數字 3、9 用加法計算）

3.最後得數是 0 或該數的倍數時，這整數就是所求整數的倍數。

(五) 100 以內奇數的識別常數是：

個位數 1	數目	11	21	31	41	51	61	71	81	91
	識別	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	常數	十位數								
個位數 3	數目	13	23	33	43	53	63	73	83	93
	識別	4	7	10	13	16	19	22	25	28
	常數	十位數 $\times 3 + 1$								
個位數 7	數目	17	27	37	47	57	67	77	87	97
	識別	5	8	11	14	17	20	23	26	29
	常數	十位數 $\times 3 + 2$								
個位數 9	數目	19	29	39	49	59	69	79	89	99
	識別	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	常數	十位數 $+ 1$								

(六)設個位數以外的數目為 n （例如：581 $\rightarrow n$ 即 58），則三位數以上各奇數的識別常數為：

個位數	1	3	7	9
識 別	n	$3n+1$	$3n+2$	$n+1$
常 數				

五、參考資料

- (一)數學課本第九冊。
- (二)數學教學指引第九冊。
- (三)數學遊戲大觀 前程出版社。
- (四)新數學 羅鴻翔教授譯。

評 語

許心怡等小朋友根據在國小數學中所學的質數的倍數的判定法則，深入探討奇數的倍數的判法則，歸納所得的法則甚為完整。