

誤導？誤導！

高小組數學科第一名

苗栗縣建功國民小學

作者：徐碧君、高智泉

江東成、楊浚驊

指導教師：鄔時雯、徐石櫻

一、研究動機及目的

“用0、1、2、3、4、5六個數字，組成分母、分子都是三位數的分數時，最大真分數是多少？”對於這道數學題，全班二十四位同學，幾乎都以“ $\frac{432}{501}$ ”作答，每個人也能說明自己的想法，甚至有的還提出了參考書籍的解答作為引證。這時，胖碧竟找到了一個比 $\frac{432}{501}$ 還要大的真分數“ $\frac{352}{401}$ ”但她卻無法解釋理由。據她表示，那還是和媽媽一塊兒合作，逐一比較挑揀出來的呢！這下可怪了！我們的想法，究竟是哪裡出了問題？

是不是還有比 $\frac{352}{401}$ 更大的真分數？

如果再用更多的數字組成位數更多的真分數時，該如何辨認其大小？能不能歸納出簡易的識別法來？

面對這一連串的疑問，我們請來老師指導，協助研究。

二、研究與討論

【研究一】：我們的想法，究竟是哪裡出了問題？

(一)我們的想法：

想法一：利用識別整數大小的方法來推想

我們識別幾個整數的大小時，是先比較高位數的大小，

大者為大。若數字相同時，再比較次一位數字的大小，大者為大。根據這個概念，我們解題的方法是：

1. 先確定真分數的條件為分母 $>$ 分子。

2. 知道分母的百分位數是 5 時，以 $\frac{4 \times \times}{5 \times \times}$ 為最大。

3. 依此類推，分母的百位數字各是 4、3、2 時，以 $\frac{3 \times \times}{4 \times \times}$

$\frac{2 \times \times}{3 \times \times}$ 、 $\frac{1 \times \times}{2 \times \times}$ 為最大。

4. 又百位數的 $\frac{4}{5} > \frac{3}{4} > \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ ，所以先選取 $\frac{4 \times \times}{5 \times \times}$ ，再決

定十位數以下的數字，分母取最小數，分子取最大數，則

以 $\frac{432}{501}$ 為最大真分數乍看之下，這種想法似乎是蠻有道

理的。但經比較，竟是 $\frac{352}{401}$ 大於 $\frac{432}{501}$ 。這不得不使我們

產生疑問：到底這種想法的毛病是出在哪兒？要怎麼樣做才是正確呢？

於是，我們詳加研究？終於有了結論，也澄清了過去錯誤的觀念：

1. $\frac{432}{501}$ 、 $\frac{352}{401}$ 、 $\frac{254}{301}$ 、 $\frac{154}{203}$ 四個數的百位數字來比較

，因 $\frac{4}{5} = 0.8$ ， $\frac{3}{4} = 0.75$ ， $\frac{2}{3} = 0.66 \dots\dots$ ， $\frac{1}{2} = 0.5$

故以 $\frac{4}{5}$ 為最大。無誤

2. 但十位以下的 $\frac{32}{01}$ 、 $\frac{52}{01}$ 、 $\frac{54}{01}$ 、 $\frac{54}{03}$ 能直接比較成 32

、52、54、18 嗎？

3. 實際上，百位數字的 $\frac{4}{5}$ 是 $\frac{400}{501}$ ， $\frac{3}{4}$ 是 $\frac{300}{401}$ ， $\frac{2}{3}$ 是

$\frac{200}{301}$ ，因此，十位以下的數字 $\frac{32}{01}$ 應是 $\frac{32}{501}$ ， $\frac{52}{01}$ 應是

$\frac{52}{401}$ ， $\frac{54}{01}$ 應是 $\frac{54}{301}$ 的意思。以概算來看：

$\frac{432}{501}$ 的數值應是 $\frac{4}{5} \Rightarrow 0.8$ 加上 $\frac{32}{500} \Rightarrow 0.064$ 約等於 0.864

$\frac{352}{401}$ 的數值應是 $\frac{3}{4} \Rightarrow 0.75$ 加上 $\frac{52}{400} \Rightarrow 0.13$ 約等於 0.88

$\frac{254}{301}$ 的數值應是 $\frac{2}{3} \Rightarrow 0.666$ 加上 $\frac{54}{300} \Rightarrow 0.18$ 約等於 0.846

則 $0.88 > 0.864 > 0.846$ 。故 $\frac{352}{401} > \frac{432}{501} > \frac{254}{301}$

從上面討論中得知：

比較分數的大小，絕不能祇比較分子、分母的最高位數，而不計其餘位數。

想法二：簡化問題（甲模式）

我們先安排些數值簡單的類似問題，經分析列式比較，歸納出解題原則，再依所得法則求得原問題的答案。

1. 先簡化問題：

先簡化題目：

用 0、1、2、3 四個數字（原為六個數字）組成分母、分子都是二位數的分數，且數字不許重複時，最大真分數是多少？

提出問題：

(1) 分母、分子都是一位數的真分數有哪些？最大值是哪個？

(2) 分母、分子都是二位數的真分數有哪些？最大值是哪個？

2. 分析比較簡化的問題：

(1) 組成分母、分子都是一位數的真分數（不逐一列出）

以 $\frac{2}{3}$ 最大。

(2) 組成分母、分子都是二位數的真分數（不逐一列出）

以 $\frac{21}{30}$ 爲最大。

3. 歸納：

將簡化的問題，予以分析、比較，結果得知：

(1) 組成分母、分子都是一位數的最大真分數時，分母取最大數字，分子取次大數字。

(2) 組成分母、分子都是二位數的最大真分數時，十位數的分母取最大數字，分子取次大數字。個位數的分母取剩下的最小數字，分子取剩下的最大數字。

4. 應用：

依據簡化問題（甲模式）所歸納的法則來看，原題目：用 0、1、2、3、4、5 六個數字組成分母、分子都是三位數的最大真分數（數字不許重複）應是：

百位數字——分母取最大數字“5”；分子取次大數字“4”。

十位數以下的其餘數字——分母取剩下的最小數值“01”；分子取剩下的最大數值“32”。

因此，這個最大真分數是 $\frac{432}{501}$ 。

(二) 老師指導：

1. 各位同學在遇到困難問題，能簡化問題、分析問題以歸納結果。並運用原則，推演到原先較複雜的問題上，來解決問題。在想法上，並沒有錯誤，這也是解題的重要方法之一。
2. 除了同學們原有的想法之外，各位不妨朝下面這個方向去試試：倘若仍維持原題意的六個數字，而祇簡化分母、分子成都是一位數與二位數時的最大真分數，各是多少？看會是怎樣的結果。

(三) 另一種的想法（乙模式）

1. 簡化問題

用原題目的六個數字（0、1、2、3、4、5）組成分數

(1)分母、分子都是一位數的真分數有哪些？最大值是哪個？

(2)分母、分子都是二位數的真分數有哪些？最大值是哪個？

2.分析比較簡化的問題：

(1)組成分母、分子都是一位數的真分數（不逐一列出）以 $\frac{4}{5}$ 為最大。

(2)組成分母、分子都是二位數的真分數（不逐一列出）以 $\frac{35}{40}$ 為最大。

3.歸納：

將簡化的問題，予以分析、比較，結果得知：

(1)組成分母、分子都是一位數的最大真分數時，分母取最大數字，分子取次大數字。亦即 $\frac{4}{5}$ 為最大真分數。

(2)組成分母、分子都是二位數的最大真分數時，（除最小的二個數字 0，1 不能做為分母的十位數外，其餘各數字均能當分母的十位數字）分母、分子各取的數字是：在十位數中：

選取分母與分子之間的差為最少的數字。如 $\frac{4 \times}{5 \times}$ 、 $\frac{3 \times}{4 \times}$

個位數是：

分母取剩下的最小數字；分子取剩下的最大數字。

在簡化題目中， $\frac{43}{50}$ 、 $\frac{35}{40}$ 、 $\frac{25}{30}$ 、 $\frac{15}{20}$ 各是分母的十

位數字為 5、4、3、2 時的最大真分數，再比較各分

數大小，得知以 $\frac{35}{40}$ 為最大。

4.應用：

依據簡化問題（乙模式）所歸納的法則來看，原題意：用 0、1、2、3、4、5 六個數字組成分母、分子都是三位數（且數字不許重複）的最大真分數，應是：

除了 0、1 不能做爲分母的百位數外，其餘各數字（2、3、4、5）均能做爲分母的百位數。

先找出分母的百位數是 5、4、3、2 的最大真分數各是

$\frac{432}{501}$ 、 $\frac{352}{401}$ 、 $\frac{254}{301}$ 、 $\frac{154}{203}$ ；再比較結果，以 $\frac{352}{401}$ 爲最大。

(四)討論：

1. 簡化問題甲模式與乙模式，同樣都是將問題簡化後再推演到原題目中。可是，爲什麼會有不同的結果？它們之間的差別在哪裡？

(1) 甲模式：在問題的簡化中，我們不但把原內容的三位數簡化成一位數與二位數，同時，還把數字給簡化了（由六個數字簡化成四個數字）。由於數字少，變化也少，於是造成誤導。因此，推回到原題目時，便以爲 $\frac{432}{501}$ 最大真分數。

(2) 乙模式：在第二次的簡化問題中，我們祇把原內容的三位數簡化成一位數與二位數，而題目的數字仍維持原有的六個數字。由於數字多了，變化也多，於是知道以 5、4、3、2 做爲分母的十位數字時，各有其最大真分數，所以推回到原題目時，便知道以 5、4、3、2 做爲分母的百位數時的各個最大真分數，進而發現了比 $\frac{352}{401}$ 還要大的真分數 $\frac{432}{501}$ 。

2. 根據上述的發現，我們懷疑今後遇到難題而需簡化問題時，是不是都不能把數字簡化？應該要如何取捨？

(1) 遇到難題時，利用簡化問題的方法思考、解題，是很好的一種方法——亦即先造一些數字簡單的類似問題，分別列出算式求出簡化問題的答案，並從中歸納解題的方法，最後依此原則，推演出原問題的解答。

(2) 遇到必須簡化問題才容易瞭解的題目時，怎能不把數字改小呢！祇是這次所遇到的問題，較特殊些罷了。

(3) 至於該如何取捨，則要依實際情形來判斷，並沒有一定的

軌跡可循，千萬別因一個例外，而對簡化問題失去了信心。

【研究二】：是不是還有比 $\frac{352}{401}$ 更大的真分數？

依前面【研究一】的最後探討結果顯示：組成分母、分子都是三位數的真分數時，若以 5、4、3、2 做為分母的百位數字，其最大真分數各是 $\frac{432}{501}$ 、 $\frac{352}{401}$ 、 $\frac{254}{301}$ 、 $\frac{154}{203}$ ；在這四個分數中，又以 $\frac{352}{401}$ 為最大。因此，應該沒有再比 $\frac{352}{401}$ 更大的真分數了。

【研究三】：如果再用更多的數字組成位數更多的真分數時，該如何辨認它的大小？

(一)舉例：

1. 以 0、1、2、3、4、5、6、7 等 8 個數字，組成分母、分子都是三位數與四位數的最大真分數，各是多少？

(1) 最大三位數的真分數是：

百位數中，取分母、分子相差 1 的數字；而十位數以後取剩下的數字：分母的數值最小，分子的數值最大。即

得： $\frac{654}{701}$ 、 $\frac{574}{661}$ 、 $\frac{476}{501}$ 、 $\frac{376}{401}$ 、 $\frac{276}{301}$ 、 $\frac{176}{203}$ 等

真分數，再比較大小，而 $\frac{574}{601}$ 為最大。

(2) 最大四位數的真分數是：

千位數中，取分母、分子相差一的數字，而百位數以後則取剩下的數字，分母的數值最小，分子的數值最大。

即得： $\frac{6543}{7012}$ 、 $\frac{5743}{6012}$ 、 $\frac{4765}{5012}$ 、 $\frac{3765}{4012}$ 、 $\frac{2765}{3012}$ 、

$\frac{1765}{2013}$ 等真分數，再比較大小，以 $\frac{5743}{6012}$ 為最大。

2. 以 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 等 10 個數字組成分母、分子都是三位數、四位數與五位數時的最大真分數，各是多少？

(1)最大三位數的真分數：經比較，以 $\frac{698}{701}$ 為最大。

(2)最大四位數的真分數：經比較，以 $\frac{6985}{7012}$ 為最大。

(3)最大五位數的真分數：經比較，以 $\frac{69854}{70123}$ 為最大。

(二)由以上研究中得知：

先分別找出分母的首位是 9、8、7、6、5、4、3、2 (1、0 除外) 時的最大真分數，再比較各分數後，取得最大真分數。

【研究四】：能不能歸納出簡易的識別法？

分析研究三的例題與原題目，得表如下：

原分數		差多少 是 1	比 較	備 註
三 位 數 的 真 分 數	(原題目)		$\frac{69}{501} = 0.138 \dots\dots$	分母取第一位的數字，其餘各位數計成 0，分子不變。再概算其值，作比較
	$\frac{432}{501}$	$\frac{69}{501}$	$\frac{49}{401} = 0.12 \dots\dots$	
	$\frac{352}{401}$	$\frac{49}{401}$	$\frac{47}{301} = 0.15 \dots\dots$	
	$\frac{254}{301}$	$\frac{47}{301}$	$\therefore \frac{49}{401} < \frac{69}{501}$	
	$\frac{154}{203}$	$\frac{49}{203}$	$\therefore \frac{352}{401}$ 最大	
	(例一)； (例二) 省略			

四 位 數 的 真 分 數	(例一)			
	$\frac{6543}{7012}$	$\frac{469}{7012}$	① $\frac{269}{6012} = 0.044 \dots$	$\frac{6543}{7000} \doteq 0.9347$
	$\frac{5743}{6012}$	$\frac{269}{6012}$	$\frac{249}{5012} \doteq 0.049 \dots$	$\frac{5743}{6000} \doteq 0.957$
	$\frac{4763}{5012}$	$\frac{249}{5012}$	$\therefore \frac{269}{6012} < \frac{249}{5012}$	$\frac{4763}{5000} \doteq 0.9526$
	$\frac{3765}{4012}$	$\frac{247}{4012}$	$\therefore \frac{5743}{6012}$ 最大	$\frac{3765}{4000} \doteq 0.941$
	(例二) 省 略			
五 位 數 的 真 分 數	(例二)			
	$\frac{87654}{90123}$	$\frac{2469}{90123}$	① $\frac{469}{80123} = 0.005 \dots$	$\frac{87654}{90000} \doteq 0.9739$
	$\frac{79654}{80123}$	$\frac{469}{80123}$	$\frac{269}{70123} = 0.003 \dots$	$\frac{79654}{80000} \doteq 0.9956$
	$\frac{69854}{70123}$	$\frac{269}{70123}$	$\frac{249}{60123} = 0.004 \dots$	$\frac{69854}{70000} \doteq 0.99791$
	$\frac{59874}{60123}$	$\frac{249}{60123}$	$\therefore \frac{269}{70123} < \frac{249}{60123}$	$\frac{59874}{60000} \doteq 0.9979$
		$\therefore \frac{69854}{70123}$ 最大	$\frac{49876}{50000} \doteq 0.9975$	

綜合上面研究的結果：歸納出簡易識別各分數大小的法則如下：

- (1) 找到各分數與 1 的差，再比較差數的大小，取其最小者，即為最大真分數。（差的大小，以概數取之。如：

$$\frac{469}{80123} \doteq 469 \doteq 80000 \doteq 0.0059)。$$

- (2) 分母取第一位數字，把其餘各位數字概計成 0，分子不變，

再概算其值做比較。如 $\frac{876}{901} \Rightarrow \frac{876}{900} \doteq 0.973$ ； $\frac{7965}{8012} \Rightarrow$

$$\frac{7965}{8000} \doteq 0.9956。$$

在研究的過程中，我們發現了一個有趣的事實，卻不明白它為什麼會這樣？這有待我們進一步去探討。

(一)用四個連續數字組成二位真分數時，發現以下兩種情形：

- 1.最大數在 4 以下時，以最大數做分母的那一組真分數為最大。

。如：用 0、1、2、3 四個數組成二位真分數時，以 $\frac{21}{30}$ 為最大。

- 2.用超過 4 的任意四個連續數組成的二位真分數，均以第二大數做分母的那一組為最大。

如：用 2、3、4、5 四個數組成二位真分數時，以

$$\frac{35}{42} \text{ 為最大。}$$

(二)用任意六個或八個連續數字，組成三位或四位的真分數時，均以第二大數做分母的那一組為最大。

如：用 7、6、5、4、3、2 六個數組成三位真分數時，以

$$\frac{574}{623} \text{ 為最大。}$$

用 1、2、3、4、5、6、7、8 八個數組成四位真分

數時，以 $\frac{6854}{7123}$ 為最大。

註：上述中，任意選取的連續數字，無論是由 0 開始向後取或由 9 開始向前取，或由中間向前或向後取均可成立。

(三)用十個數字組成五位真分數時，以第三大數做分母的那一組為

最大。即 $\frac{69854}{70123}$ 為最大。

三、討論與建議

(一)應用比較整數大小的方法，來比較多位分數的大小，原以為第一位數字影響最大。如本題的百位以 $\frac{4}{5}$ 最大，十位以後再

取分子愈大、分母愈小的數，即 $\frac{432}{501}$ 為最大真分數，這樣的識別法是不行的。

- (二) 遇到難題時，應用簡化問題、分析問題，再推演回原問題，是很好的方法，但不一定完全行得通。因為簡化問題的方法，也是要力求變化的，千萬不能一成不變。
- (三) 遇到類似像本題，以一定的數字組成一定位數的分數時，最好還是運用排列的方法，找出各數字為分母時的最大真分數。以後再比較大小，找出最大的數來。
- (四) 要比較各分數的大小時，分母取第一位數字，其餘各位數字概計成 0，而分子不變，以概算其數值，再比較大小會較為簡單。
- (五) 目前教科書中，未曾出現過排列的問題，建議今後在修訂教科書的內容時，能斟酌加入些排列組合等基本概念的教材，使得學生在遇到問題時，能夠有較廣的思路去變通應用。
- (六) 建議出版商在提供解答時，一定要負起道德責任請專家來解，千萬不能有錯誤解答出現，以免造成誤導。
- (七) 建議老師們，今後更得實事求是，建立正確的觀念，以免再受到參考書籍中不正確答案的誤導——蓋一般老師參考書中的答案與自己（或學生）的答案一致時，便不再花心思去多做思考。

按：這道題目出自某數學書籍 102 頁的第 14 題，是個歷史悠久的老問題。而該書局所提供的答案，始終是以 $\frac{432}{501}$ 誤作為最大真分數，從未修正。可見使用該書的消費者，包括老師們在內，一直受到誤導仍不自知。希望藉這次同學們的研討，以作為拋磚引玉的開始，進而激勵大家，在日後對數學的研究、解析上，能作更深入、更廣泛的思考。

評 語

從一題班上只有一人做對的令人驚異的結果開始，全班努力去尋找錯誤解法的根由。終於能夠找到有效的，令人接受的正確解法。老師在過程中，是一個提供點子的角色。

學生在此次活動中的確得到一個教訓，就是不要毫不考慮地接受

直觀以為是的答案，因為它可能是錯的。

全班都感染到此次解題的興奮情緒，這是一個屬於整數規劃法的小問題。