片片磁磚，面面學

初小組數學科第二名

彰化縣民生國民小學

作　　者：洪士評、康庭瑞等十人

指導教師：卓滿祝、劉錦秀

一、研習動機

上個學期，我們學校正在興建新教室，下課時候我和幾位好奇的同學總是跑去參觀泥水匠抹牆壁貼磁磚，看他們靈巧的手藝，不一會功夫就舖出一大塊美麗天地，眞叫人佩服！有時我們也撿拾一些丢棄不用的各式各樣小磁磚回來拼拼排排玩圖案，有趣極了！我們不但可以把不同的磁磚鋪滿整整一大塊不留空隙，也可以拼出好幾種多邊形的圖案來。過了一段時間，我們學到角度問題，就將它應用到多邊形上，嘗試找出不同的多邊形的角度變化情形，只是我們能力實在有限，無法明白其中奧妙，於是大家就去請教老師，老師也認爲這個題材有趣又值得探討，就這樣開始了這趟「磁磚數學」之旅。

二、研習目的

(一)激發兒童對數學科的學習興趣，促進思考與推理能力。

(二)藉拼排磁磚遊戲進一步探討多邊形角度和面積等問題，而能與實際生活相溝通。

三、研習設備與器材

磁磚、彩色紙板、尺、方格紙、棉繩、自製360°圓形量角器。

四、研習過程與方法

問題一：找出那些形狀的磁磚可以鋪滿地面？爲什麼？

過程一：調查市面上或家庭中的磁磚有那些形狀，並搜集磁磚樣板分別歸類比較。

發　現：(1)常見的磁磚以正方形和長方形最多。

(2)常見的磁磚模型有的只用一種形狀組合，有的用二種以上。

過程二：用彩色紙板製作一些幾何圖形代替市面上常見和不常見的磁磚，分組加以拼排，繼續探討可以鋪滿地面的磁磚形狀。

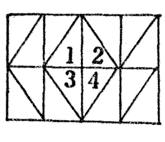
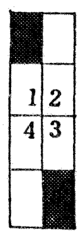
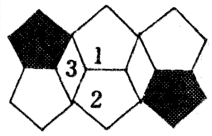
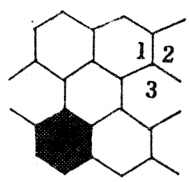
發　現：(1)三角形和正方形、長方形、平行四邊形、菱形、梯形都能單獨使用鋪滿地面。其他的正多邊形中只有正六邊形也能單獨使用鋪滿地面。

(2)從正五邊形到正十二邊形中，除正七邊、正九邊形外，都能和三角形合拼，重覆使用鋪滿地面。

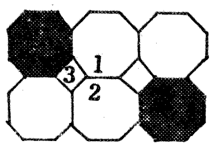
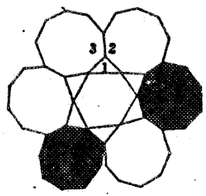
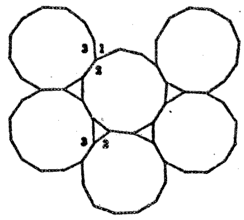
(3)圓形無法和其他幾何圖形合拼，也無法單獨使用鋪滿地面。

過程三：接著我們進一步探討磁磚能夠鋪滿地面的原因。結果如表一。

表一

類別 / 項目	三角形				長方形				正五邊形			正六邊形		
拼成的圖形														
編號	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	1	2	3
同一公共頂點各角度數	90°	90°	90°	90°	90°	90°	90°	90°	108°	108°	144°	120°	120°	120°
同一公共頂點角度和	360°				360°				360°			360°		

續表一

項目 \ 類別	正八邊形			正九邊形			正十二邊形		
拼成的圖形									
編號	1	2	3	1	2	3	1	2	3
同一公共頂點各角度數	90°	135°	135°	80°	140°	140°	60°	150°	150°
同一公共頂點角度和	360°			360°			360°		

發　現：⑴每個拼成的圖形中，公共頂點的各角度，其和都是360°

⑵正方形和長方形的內角是90°，正六角形是120°，正三角形是60°，它們都是360°的因數，所以只需任一種磁磚就很容易能鋪滿地面。

⑶梯形、菱形、平行四邊形和直角△、等腰△、銳角△、鈍角△，這些圖形的內角雖不一定相等，但是單獨使用也能湊成360°，所以只需一種圖形就能鋪滿地面。

⑷其他需用二種以上合拼的圖形，也是能湊成360°而鋪滿地面。

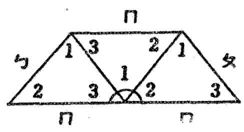
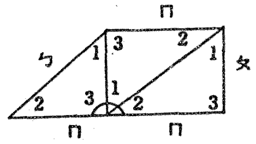
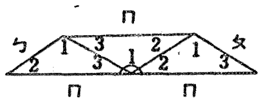
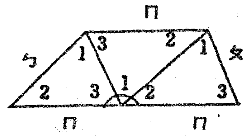
問題二：從拼貼磁磚中，探討正多邊形的內角與內角和的計算公式。

過程四：我們先探討任意三角形的內角和，再利用它探討正多邊形的角度問題。於是取三塊全等的三角形色板加以拼貼如表二。

發　現：⑴任意三角形的三個內角恰好可拼成一平角（180°）。

⑵任意三角形的內角和一定等於180°。

表二

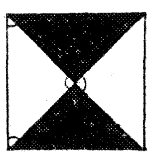
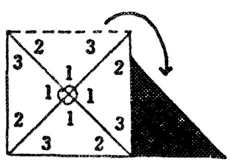
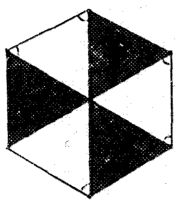
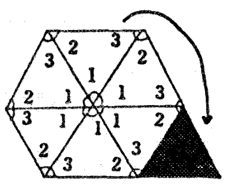
名稱	等腰三角形	直角三角形	鈍角三角形	銳角三角形
拼圖成形				
角度和	180°	180°	180°	180°
實驗測證	$\angle 1=80^\circ$ $\angle 2=50^\circ$ $\angle 3=50^\circ$ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$	$\angle 1=53^\circ$ $\angle 2=37^\circ$ $\angle 3=90^\circ$ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$	$\angle 1=120^\circ$ $\angle 2=28^\circ$ $\angle 3=32^\circ$ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$	$\angle 1=75^\circ$ $\angle 2=40^\circ$ $\angle 3=65^\circ$ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$

過程五：觀察由同一種全等的三角形所拼成的正方形和正六邊形，找出計算內角與內角和的計算公式。（如表三）

發　現：(1)正多邊形的每個內角等於180°－（360°÷邊數），或等於內角和÷邊數。

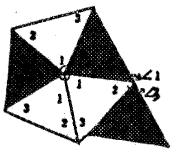
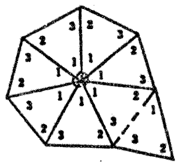
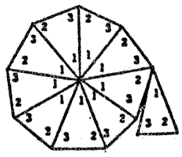
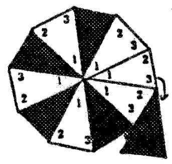
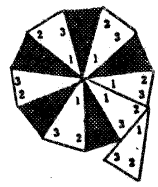
(2)正多邊形的內角和等於180°×（邊數－2）或內角×邊數。

表三

項別	拼成圖形	分解圖	內角		內角和	
			想法	實測	想法	實測
正方形			內角＝∠2＋∠3 ＝180°－∠1 ＝180°－（360°÷4） ＝180°－（360°÷邊數） ＝90°	90°	①內角和＝90°×4 ＝360° ＝內角×邊數 ②由左圖中可知： 180°×4－360° ＝180°×（4－2） ＝180°×（邊數－2） ＝360°	360°
正六邊形			內角＝∠2＋∠3 ＝180°－∠1 ＝180°－（360°÷6） ＝180°－（360°÷邊數） ＝120°	120°	①內角和＝120°×6 ＝內角×邊數 ＝（180°－360°÷邊數）×邊數 ＝720° ②由左圖中可知： 180°×6－360° ＝180°×（6－2） ＝180°×（邊數－2） ＝720°	720°

過程六：由以上發現，繼續驗證其他正多邊形。結果如下表四。

表四

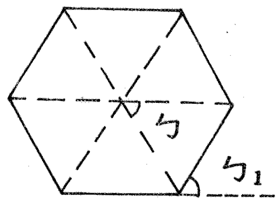
圖形名稱	正五邊形	正七邊形	正九邊形	正十邊形	正十一邊形
拼成圖與分解圖					
內角	180°−(360°÷5) ＝108°	180°−(360°÷7) ＝128.6°	180°−(360°÷8) ＝135°	180°−(360°÷9) ＝140°	180°−(360°÷11) ＝147.3°
內角和	180°×(5−2)＝540°	180°×(7−2)＝900°	180°×(8−2)＝1080°	180°×(9−2)＝1260°	180°×(11−2)＝1620°

發　現：(1)過程五發現的公式可以成立。

(2)正多邊形中，邊數越多，其內角與內角和就越大。

(3)每一正多邊形的中心角等於每個內角的外角。如圖∠ㄅ＝∠ㄅ$_{1}$。

(4)使用不同內角的同一等腰三角形，可拼出不同的正多邊形。

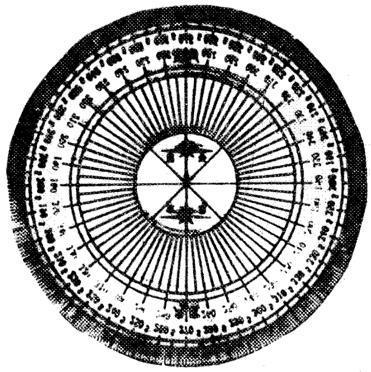


問題三：在拼排磁磚中探討正多邊形的面積與周長算法。

過程七：我們決定把正多邊形加以分割重新拼排，試以方形面積來探討正多邊形的面積算法。

方　法：(1)用自製的圓形（360°）量角器（如圖一），準確地畫出我們需要的正多邊形（正三邊到正十二邊形）。

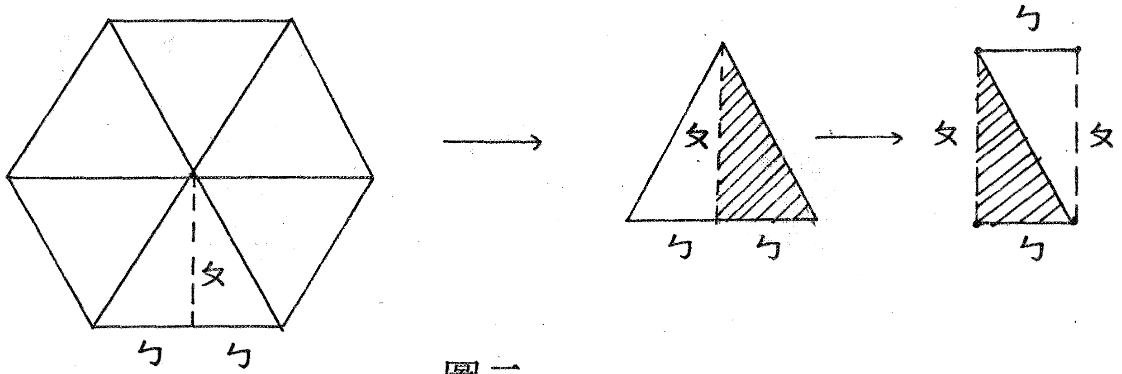
圖一　量角器



(2)畫出腰邊 3 公分的等腰三角形所拼成的正多邊形。

(3)然後把每個等腰三角形切成二個全等的直角三角形。

(4)最後把切出的直角三角形重新拼成一個長方形，以計算其面積。（如圖二）



圖二

(5)加以記錄，如表五。（因篇幅所限，僅列出部分圖形）

發　現：(1)正多邊形的面積＝ㄅ×ㄆ×邊數。

(2)正多邊形的周長＝ㄅ×邊數×2＝ㄅ×2×邊數＝邊長×邊數。

(3)(1)和(2)中的ㄅ＝邊長÷2，即$\frac{1}{2}$邊長。

(4)(1)和(2)中的ㄆ＝正多邊形的中心點到邊的垂直線段。

問題四：透過有趣的磁磚遊戲，擴大數學學習領域。

遊戲一：相同的磁磚塊數一定時，能圍出何種圖形面積最大？

方　法：(1)每人拿數量、大小相同的正方形磁磚，圍出自己喜愛的圖形。（圍時，每塊磁磚只能使用一邊拼排。）

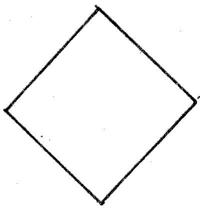
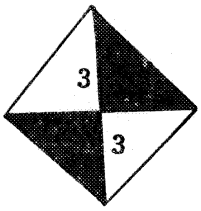
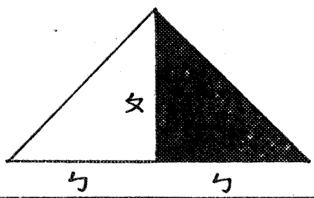
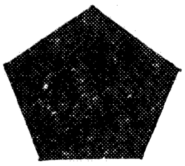
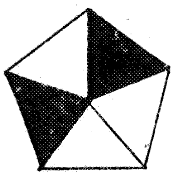
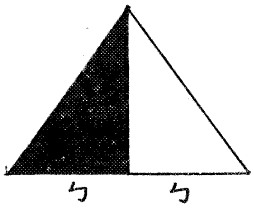
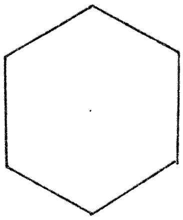
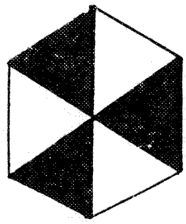
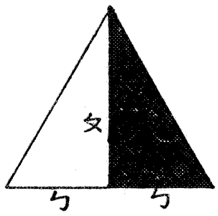
(2)用細繩繞滿所圍出的圖形，並量出繩長加以記錄。如表六。

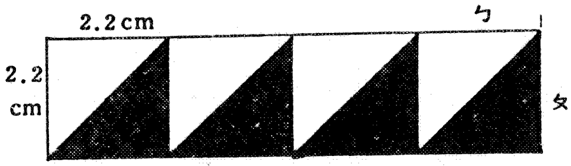
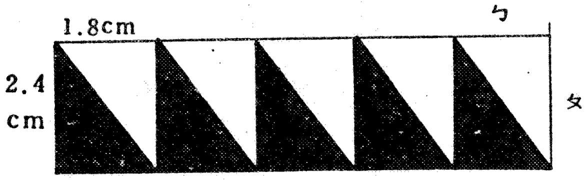
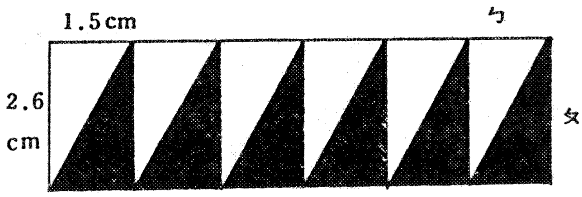
發　現：(1)多邊形中，周長相等時，以正多邊形面積最大，凸多邊形次之。

(2)周長、邊數都相同的圖形中，大小角度相差越大，面積越小；反之則面積越大。

(3)周長、邊數都相同的圖形中，大小邊長相差越大，面積越小；反之則面積越大。

表五

項別／圖形	原圖	切割圖	直角三角形邊長
正四邊形			ㄅ＝2.2 cm ㄆ＝2.2 cm 
正五邊形			ㄅ＝1.8 cm ㄆ＝2.4 cm 
正六邊形			ㄅ＝1.5 cm ㄆ＝2.6 cm 

項別／圖形	合成圖	
正四邊形		面積＝ㄅ×ㄆ×4 ＝19.36(cm²) 周長＝ㄅ×4×2 ＝17.6(cm)
正五邊形		面積＝ㄅ×ㄆ×5 ＝21.6(cm²) 周長＝ㄅ×5×2 ＝18(cm)
正六邊形		面積＝ㄅ×ㄆ×6 ＝23.4(cm²) 周長＝ㄅ×6×2 ＝18 (cm)

表六

圍出的圖形 項別	圖略	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃
圖形名稱	直角三角形	正三角形	等腰三角形	長方形	正方形	菱形	平行四邊形	梯形	正六邊形	六邊形	正十二邊形
磁磚塊數	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
繩長（公分）	289	309	267	331	417	246	311	301	434	395	468
最大邊減最小邊（公分）	8	0	12	8	0	0	8	12	0	8	0
大角減小角	55^0	0	60^0	0	0	99^0	40^0	90^0	0	66^0	0

遊戲二：相同的磁磚塊數一定時，怎樣能圍出最多邊數的圖形？

方　法：每人拿數量、大小相同的正方形磁磚來圍圖形，每塊磁磚使用的邊數不限。（表七甲、乙）

發　現：(1)使用三塊磁磚只能圍出三邊形。

(2)使用四塊以上的磁磚，如果每塊磁磚只使用一邊圍，則塊數等於圍出圖形的邊數。

(3)使用四塊以上的磁磚，如果每塊磁磚，使用的邊數愈多，則圍出的圖形邊數也愈多。

(4)每塊磁磚使用的邊數最多是 3 邊。

遊戲三：奇妙有趣的拼色遊戲。

方　法：(1)每人可任意拿數量、大小、形狀、單色都不同的磁磚來拼排可愛的圖案。

(2)拼排時，兩塊磁磚若以點相交時，必須用同一顏色，如果用邊相交，則需換色。

(3)加以記錄，整理結果如下表八。

發　現：(1)全部以點相交拼排的圖案只需一種顏色。

(2)任何圖案最多只需四種顏色就能

五、討論與結論

(一)我們從問題一的研習中，知道：

1. 在正多邊形中，只有正三角形、正方形、正六邊形的磁磚，能單獨重覆使用將地面鋪滿，其他的正多邊形除了正七邊和正十一邊形兩種外，都能配合三角形鋪滿地面。

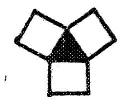
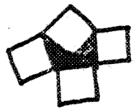
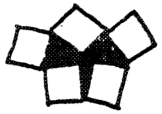
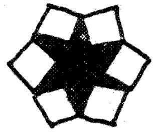
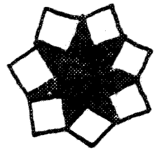
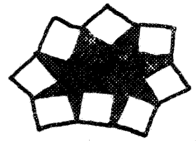
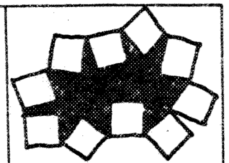
2. 圓形磁磚無法單獨使用，但常和不規則圖形配合使用鋪滿地面。

3. 使用磁磚能鋪滿地面的秘訣是，其每一公共頂點的角度總和是 360°，而正方形、長方形的磁磚的內角都是 90°，鋪貼方向變化較少，最容易拼貼，所以最常見。

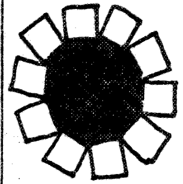
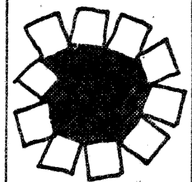
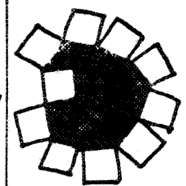
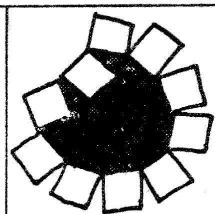
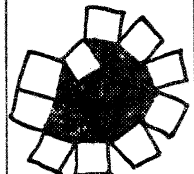
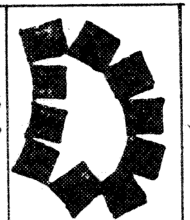
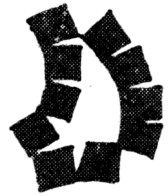
4. 雖然每種三角形磁磚重覆使用，都能鋪滿地面，但是鋪貼方向變化較多，拼排不易，因此並不常見。

表七→

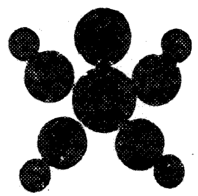
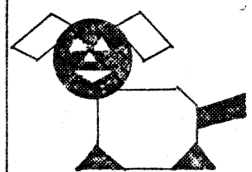
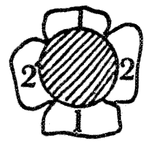
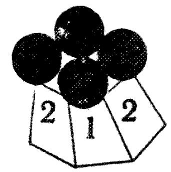
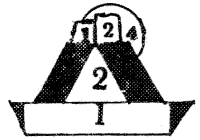
(甲)

圖形							
塊數	3	4	5	6	7	8	10
邊數	3	5	8	12	14	17	20

(乙)

圖形							
塊數	10	10	10	10	10	10	10
邊數	10	11	12	13	14	16	17

表八↓

圖形	棒棒糖 	小　狗 	花　朵 	冰淇淋 	小　船 
使用顏色	1　種	2　種	3　種	3　種	4　種

(二)我們從問題二的研習中，得到：

1. 三角形的內角和都是180°。

2. 正多邊形的內角計算公式是：

(1) $180^\circ-(360^\circ\div$邊數$)$　(2) $180^\circ\times($邊數$-2)\div$邊數。

3. 正多邊形的內角和計算公式是：

(1) $(180^\circ-360^\circ\div$邊數$)\times$邊數　(2) $180^\circ\times($邊數$-2)$。

4. 正多邊形的每個中心角等於每個內角的外角。

(三)我們從問題三的研習中，得到：

1. 正多邊形的面積與周長可用長方形的計算方式來推算。若設ㄅ$=\frac{1}{2}$邊長，ㄆ＝從中心點到邊的距離，則面積＝ㄅ×ㄆ×邊數；周長＝邊長×邊數。

2. 在正多邊形中能鋪滿地面且面積最大者爲正六邊形，難怪蜂窩都是正六邊形。

(四)我們從問題四的研習中，知道：

1. 周長一定時，邊數相同的圖形中，大小角度的差數與面積成反比；大小邊長的差數也與面積成反比。

2. 周長一定時，邊數不同的正多邊形中，邊數愈多則面積愈大。

3. 周長一定時，用磁磚拼排出的各種圖形中以近似圓形面積最大。

4. 用相同的磁磚拼排時，想圍出三角形，其任意兩邊的磁磚塊數之和一定要比第三邊多。（即任意三角形的兩邊和一定大於第三邊）。

5. 用相同的磁磚拼排時，如果塊數相同，則每塊磁磚使用的邊數與圍出的圖形邊數成正比。但每塊磁磚使用的邊數最多只能三邊。

6. 任何圖案中，每個區域若以點相交，則只需一種顏色，而每個圖案中所需的顏色最多是四種就能分辨顏色。

六、參考資料

(一)國小數學課本及數學教學指引－國立編譯館。

(二)青少年科叢書第一輯第十冊－之江文化事業出版社。

㈢光復科學圖鑑—光復出版社。

㈣國語日報。

評　語

從日常生活有關的事物中尋出數學題材，所得結果雖不完全，但表達得很清楚。以初小組的程度而言，相當不錯。