

# 從 1 到 2

## 初小組數學科第一名

台北縣興南國民小學

作者：呂冠穎、沈芳如

陳忻媛、邱馨逸

指導教師：吳琿華、張政義

### 一、研究動機

在上美勞課時，老師要我們用紙黏成「綉球」，我黏了好幾次，發現面都不夠，一再重做，浪費了很多時間。因此，到下課我始終沒有做好一個漂亮的，我很急但是沒有辦法。

回到家我想起來，去年我做科展時，發現任何一種平面的形狀，它「頂點的數加面的數減邊的數都等於 1」。這種情形，不知道能不能用在做「綉球」上，而它會有不同的變化嗎？我向老師提出這個想法，繼續我的研究。

### 二、研究目的

- (一)我想知道「頂點的數+面的數-邊的數」還會等於 1 嗎？
- (二)我也想進一步明白「點」「邊」「面」奇妙的關係。
- (三)我更希望對「點」「邊」「面」的關係，由了解到運用。

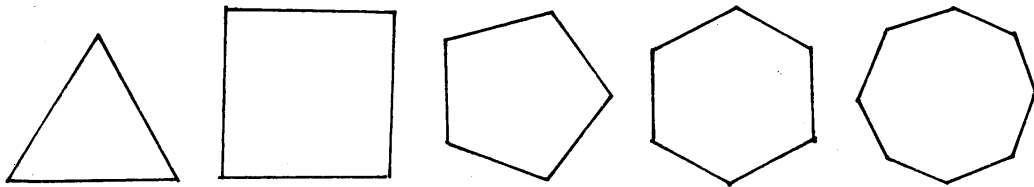
### 三、研究設備器材

筆、紙、尺、圓規、量角器、刀片、膠帶、木塊、黏土、橡皮筋、燈、牙籤、橡皮、洗髮精、照相機、記錄簿。

### 四、研究過程

- (一)綉球要怎樣做呢？它有什麼特別的地方嗎？

研究一方法：我們用①普通紙②硬紙板為材料，以正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形、正八邊形為基本圖形（如下）一塊一塊來黏成綉球。



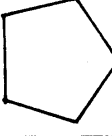
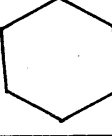
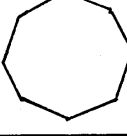



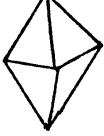
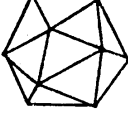

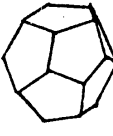

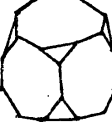
結果：

1. 我們覺得硬紙板做綉球比較好看，而且不容易變形。
2. 我們發現只有正三角形、正方形、正五邊形能做成綉球，而正六邊形、正八邊形必須和小三角形合起來，才能做成綉球。
3. 用正三角形做的綉球變化比較多，有的需要四塊，有的需要八塊，有的需要二十塊，而正方形只要六塊，正五邊形只要十二塊，就可以了。

“○”可以做成

“×”無法做成

|          |    |   |   |   |  |   |
|----------|----|---|---|---|--|---|
| 結果<br>內容 | 形狀 |  |  |  |  |  |
|          | 可否 | ○   | ○   | ○   | ×  | ×   |

|          |   |   |   |   |  |   |   |
|----------|---|---|---|---|--|---|---|
| 結果<br>不同 | 正 三 角 形   |   |   | 正 方 形   | 正 五 邊 形  | 正 六 邊 形   | 正 八 邊 形   |
|          |  |  |  |  |  |  |  |
| 需要塊數     | 4   | 8   | 20  | 4   | 12   | 4 + 4<br>○ △  | 6 + 8<br>○ △  |

研究二方法：

1. 我們拿正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形、正八邊形做成的綉球，分別數出它們「頂點的數」、「面的數」、「邊的數」。
2. 我們用「頂點的數加面的數減邊的數」來計算。

| 內容   | 基本圖形 |    |    | 正 方 形 | 正五邊形 | 正六邊形 | 正八邊形 |
|------|------|----|----|-------|------|------|------|
|      | 頂點   | 面  | 邊  |       |      |      |      |
| 頂點的數 | 4    | 6  | 12 | 8     | 20   | 12   | 24   |
| 面的數  | 4    | 8  | 20 | 6     | 12   | 20   | 14   |
| 邊的數  | 6    | 12 | 30 | 12    | 30   | 30   | 36   |
| 等 於  | 2    |    |    | 2     | 2    | 2    | 2    |

結果：我們發現它們的結果都等於「2」。(情形如上)

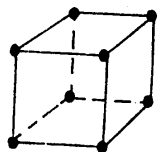
(二)立體的情形「頂點的數加面的邊減邊的數」仍等於1嗎？

問題討論⇒我們數綉球的結果，發現頂點的數加面的數減邊的數都等於2。而綉球雖然是立體，但是只是立體中的一部分，因此，我們又做了下面的研究。

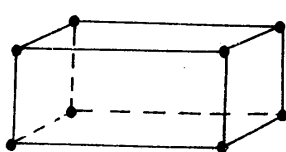
研究三方法：

1. 我們去找一些不同的木塊(如下圖)，數數它們的「頂點」「面」「邊」有幾個。
2. 我們用研究二的方法來計算。

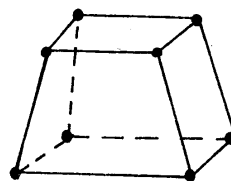
### 方型體



①正方體



②長方體

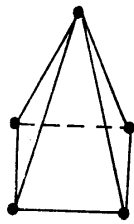


③梯形體

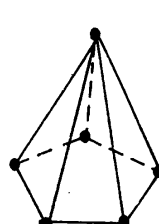
### 角錐



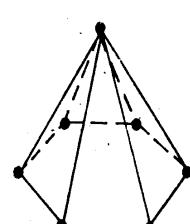
④三角錐



⑤四角錐

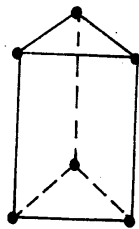


⑥五角錐

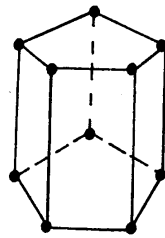


⑦六角錐

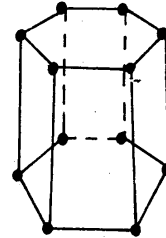
### 角柱



⑧三角柱



⑨五角柱



⑩六角柱

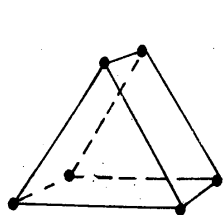
| 內容 \ 形狀結果 | ①  | ②  | ③  | ④ | ⑤ | ⑥  | ⑦  | ⑧ | ⑨  | ⑩  |
|-----------|----|----|----|---|---|----|----|---|----|----|
| 頂點        | 8  | 8  | 8  | 4 | 5 | 6  | 7  | 6 | 10 | 12 |
| 面 (+)     | 6  | 6  | 6  | 4 | 5 | 6  | 7  | 5 | 7  | 8  |
| 邊 (-)     | 12 | 12 | 12 | 6 | 8 | 10 | 12 | 9 | 15 | 18 |
| 等於        | 2  | 2  | 2  | 2 | 2 | 2  | 2  | 2 | 2  | 2  |

結果：我們發現不論是方型體、角錐、角柱，它們「頂點的數加面的數減邊的數」都會等於 2。

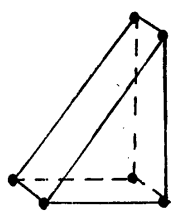
(三)「頂點的數加面的數減邊的數等於 2」和形狀有關係嗎？

研究四方法：

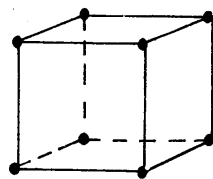
1. 爲了有更多的立體形狀，我們用黏土切成下面的圖形，並用研究二的方法來計算。



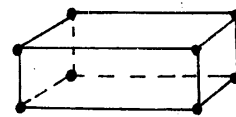
①正三角體



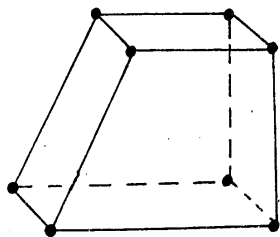
②直角三角體



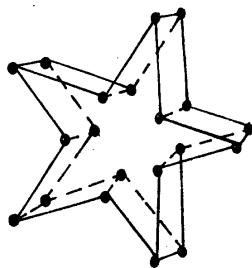
③正方體



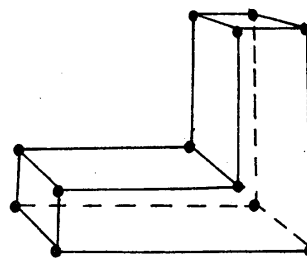
④長方體



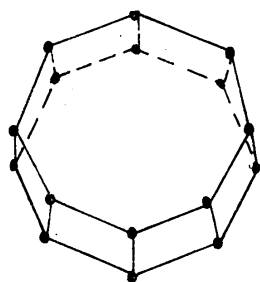
⑤梯形體



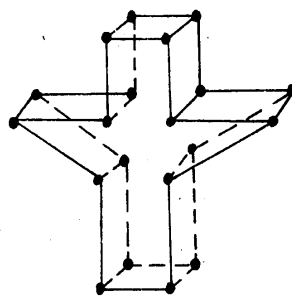
⑥星形體



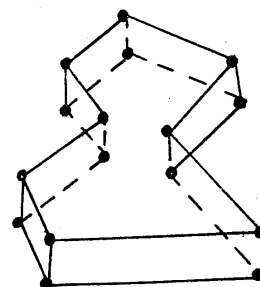
⑦L形體



⑧八角柱體



⑨十字體








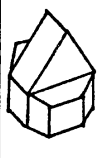
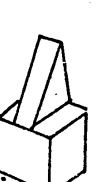



⑩不規則體

2.我們將上面的形狀，隨意加以組合，並用研究二的方法來計算。

結果：

1. ①~⑩的立體形狀，「頂點的數加面的數減邊的數」都等於 2。
2. 隨意組合的立體形狀，組合前和組合後「頂點的數」「面的數」「邊的數」，會因重疊而改變，但是它們計算的結果都等於 2。

| 內容   | 形狀 |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
|      | ①  | ② | ③  | ④  | ⑤  | ⑥  | ⑦  | ⑧  | ⑨  | ⑩  |
| 頂點   | 6  | 6 | 8  | 8  | 8  | 20 | 12 | 16 | 20 | 16 |
| 面(+) | 5  | 5 | 6  | 6  | 6  | 12 | 8  | 10 | 12 | 10 |
| 邊(-) | 9  | 9 | 12 | 12 | 12 | 30 | 18 | 24 | 30 | 24 |
| 等於   | 2  | 2 | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  |

| 結果<br>內容 | 組合  |   |   |   |   |   |  |   |   |   |
|----------|---|---|---|---|---|---|--|---|---|---|
|          | ③<br>+  | ⑤<br>+  | ⑦<br>+  | ⑨<br>+  | ④<br>+  | ①<br>+  | ①<br>+   | ②<br>+  | ①<br>+  | ①<br>+  |
|          | ④   | ⑥   | ⑧   | ⑩   | ⑤   | ⑧   | ③  | ③<br>+  | ⑤<br>+  | ③   |
| 組合圖      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 頂點       | 12  | 22  | 24  | 26  | 12  | 18  | 14   | 14  | 17  | 18  |
| 面(+)     | 8   | 13  | 14  | 15  | 8   | 15  | 11   | 9   | 12  | 11  |
| 邊(-)     | 18  | 33  | 36  | 39  | 18  | 31  | 23   | 21  | 27  | 27  |
| 等於       | 2   | 2   | 2   | 2   | 2   | 2   | 2  | 2   | 2   | 2   |

(四)「頂點」「面」「邊」的變化對結果會有影響嗎?

問題討論⇒我們去年發現平面圖形「頂點的數加面的數減邊的數」等於「1」。但是現在我們却由研究二、三、四知道立體的形狀，它的結果等於「2」。因此，我們將平面和立體的形狀加以比較，做了下面的研究。

研究五方法：

1. 我們用硬紙做出研究三的立體模型，以研究二的方法來計算。
2. 將模型拆開成平面，也用研究二的方法來計算。
3. 比較立體和平面的不同。

結果：

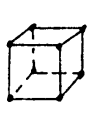
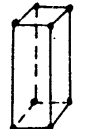







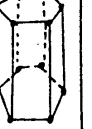












1. 立體模型拆開成平面以後，頂點的數和邊的數會增加，而面的數不會改變。
2. 立體模型計算的結果等於 2，平面模型計算的結果等於 1。

“+” 增加

“-” 減少

“×” 不變

| 形狀 | 內容<br>結果 | 頂 | 點 | 面 | 邊 |
|----|----------|---|---|---|---|
|    |          | 立 | 體 | — | × |
| 平  | 面        | + | × | + |   |

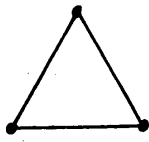
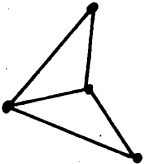
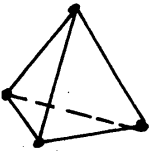

| 組合<br>結果<br>內容 |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |  |  |   |  |   |  |   |  |   |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|--|---|---|---|---|---|---|---|---|
|                | 拆開後   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |  |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
| 頂點             | 8   | 14  | 8   | 14  | 8   | 14  | 4   | 6   | 5   | 8   | 6   | 10  | 7  | 12   | 6   | 10  | 10  | 18  | 12  | 22  |   |   |
| 面(+)           | 6   | 6   | 6   | 6   | 6   | 6   | 4   | 4   | 5   | 5   | 6   | 6   | 7  | 7  | 5   | 5   | 7   | 7   | 8   | 8   |   |   |
| 邊(-)           | 12  | 19  | 12  | 19  | 12  | 19  | 6   | 9   | 8   | 12  | 10  | 15  | 12   | 18   | 9   | 14  | 15  | 24  | 18  | 29  |   |   |
| 等於             | 2   | 1   | 2   | 1   | 2   | 1   | 2   | 1   | 2   | 1   | 2   | 1   | 2  | 1  | 2   | 1   | 2   | 1   | 2   | 1   |   |   |

研究六方法：

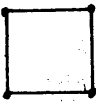
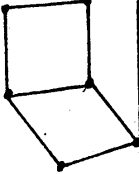
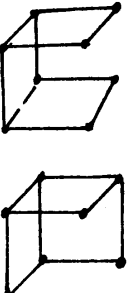
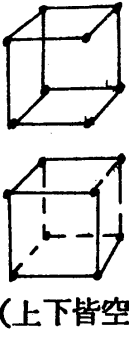
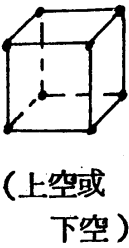
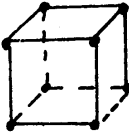
1. 我們用①正三角形②正方形，每次加一面來研究。
2. 我們用研究二的方法來計算和比較。

結果：

1. 我們發現每增加一面，頂點和邊的數也會增加。
2. 如果增加一面而頂點和邊的數不會改變的話，那麼「頂點的數+面的數-邊的數」會等於2。（如三角錐三面到四面，正方體五面到六面。）
3. 如果增加一面而頂點不改變的話，那麼「頂點的數+面的數-邊的數」會等於0（此指正方體四面上下空的情形）。
4. 情形如下：

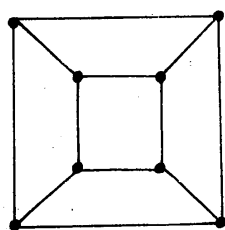
| 結果<br>內容 | 一 面   | 二 面   | 三 面  | 四 面   |
|----------|---|---|--|---|
| 圖        |  |  |  |  |
| 頂 點      | 3   | 4   | 4  | 4   |
| 面 (+)    | 1   | 2   | 3  | 4   |
| 邊 (-)    | 3   | 5   | 6  | 6   |
| 等 於      | 1   | 1   | 1  | 2   |



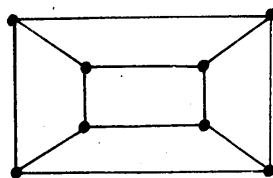
| 結果<br>內容 | 面數 | 一面  | 二面  | 三面  | 四面   | 五面   | 六面  |    |
|----------|----|---|---|---|--|--|---|----|
|          | 圖  |  |  |  | <br>(上下皆空) | <br>(上空或下空) |  |    |
| 頂點       | 4  | 6   | 8   | 7   | 8  | 8  | 8   |    |
| 面(+)     | 1  | 2   | 3   | 3   | 4  | 4  | 5   | 6  |
| 邊(-)     | 4  | 7   | 10  | 9   | 11   | 12   | 12  | 12 |
| 等於       | 1  | 1   | 1   | 1   | 1  | 0  | 1   | 2  |

研究七方法：

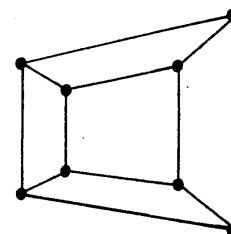
1. 我們用橡皮筋做出研究三的各種模型。
2. 用拉的方法，把立體拉成平面，用研究二的方法來計算。



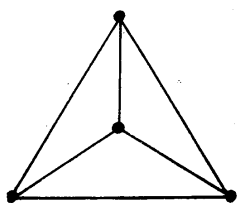
① 正方體



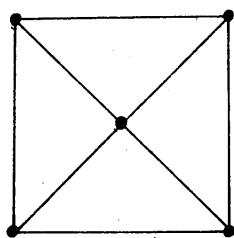
② 長方體



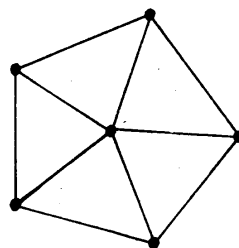
③ 梯形體



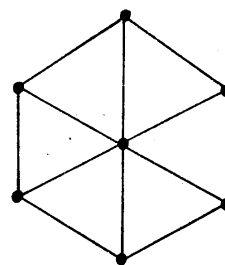
④ 三角錐



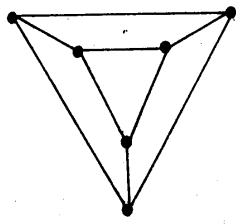
⑤ 四角錐



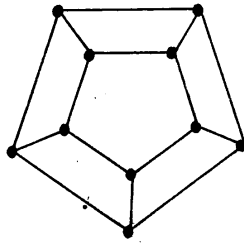
⑥ 五角錐



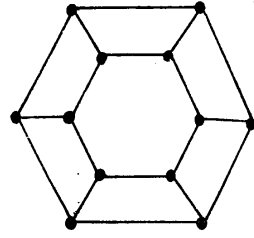
⑦ 六角錐



⑧三角柱



⑨五角柱



⑩六角柱

結果：

1. 我們發現結果都等於 1。

2. 我們和立體模型比較，少了一個底面，頂點和邊不會改變。

“○”改變 “×”不變 “+”增加 “-”減少

| 內容 | 形狀<br>改變 | 形狀 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----|----------|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|    |          | ①  | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ | ⑩ |
| 頂  | 點        | ×  | × | × | × | × | × | × | × | × | × |
| 面  |          | ⊖  | ⊖ | ⊖ | ⊖ | ⊖ | ⊖ | ⊖ | ⊖ | ⊖ | ⊖ |
| 邊  |          | ×  | × | × | × | × | × | × | × | × | × |
| 結  | 果        | ⊖  | ⊖ | ⊖ | ⊖ | ⊖ | ⊖ | ⊖ | ⊖ | ⊖ | ⊖ |

| 內容   | 形狀<br>結果 | 形狀 |    |    |    |    |    |   |   |   |   |    |    |    |    |   |   |    |    |    |    |
|------|----------|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|----|----|----|----|---|---|----|----|----|----|
|      |          | ①  |    | ②  |    | ③  |    | ④ |   | ⑤ |   | ⑥  |    | ⑦  |    | ⑧ |   | ⑨  |    | ⑩  |    |
|      |          | 立  | 拉  | 立  | 拉  | 立  | 拉  | 立 | 拉 | 立 | 拉 | 立  | 拉  | 立  | 拉  | 立 | 拉 | 立  | 拉  | 立  | 拉  |
| 頂    | 點        | 8  | 8  | 8  | 8  | 8  | 8  | 4 | 4 | 5 | 5 | 6  | 6  | 7  | 7  | 6 | 6 | 10 | 10 | 12 | 12 |
| 面(+) |          | 6  | 5  | 6  | 5  | 6  | 5  | 4 | 3 | 5 | 4 | 6  | 5  | 7  | 6  | 5 | 4 | 7  | 6  | 8  | 7  |
| 邊(-) |          | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 6 | 6 | 8 | 8 | 10 | 10 | 12 | 12 | 9 | 9 | 15 | 15 | 18 | 18 |
| 等    | 於        | 2  | 1  | 2  | 1  | 2  | 1  | 2 | 1 | 2 | 1 | 2  | 1  | 2  | 1  | 2 | 1 | 2  | 1  | 2  | 1  |

(五)立體的形狀很複雜的時候，我們怎麼辦？

問題討論⇒爲了研究「頂點」「面」「邊」的關係，我們算得辛苦，因此我們想由它們的關係，找出便捷的方法，並且加以運用。我們先用牙籤和橡皮擦做成各種模型，用燈光照射，用牆壁上的影子來算邊或點，但是邊或點有時會交叉重疊，反而更不好算，因此，我們使用其他的方法。

研究八方法：我們觀察研究三模型的頂點、面和邊的變化。

結果：我們發現在立體中：

- ①三條邊會共用一個頂點。（除角錐的錐頂以外）
- ②二個面會共用一條邊。

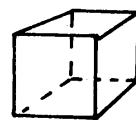
研究九方法：

- 1.我們用六塊一樣大的正方形和四塊一樣大的正三角形，用單獨和組合的方法來研究。
- 2.我們用研究二的方法來計算。

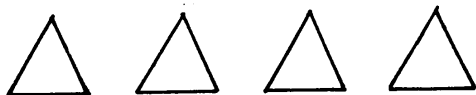
①



②



③



④



結果：

| 結果組合<br>內容 | 形狀 □ |    | △  |   |
|------------|------|----|----|---|
|            | ①    | ②  | ③  | ④ |
| 頂 點        | 24   | 8  | 12 | 4 |
| 面          | 6    | 6  | 3  | 3 |
| 邊          | 24   | 12 | 12 | 6 |

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$$

↓

$$24 \div 8 = 3 \dots \text{點}$$

$$24 \div 12 = 2 \dots \text{邊}$$

$$\textcircled{3} \div \textcircled{4}$$

↓

$$12 \div 4 = 3 \dots \text{點}$$

$$12 \div 6 = 2 \dots \text{邊}$$

①③組成③④以後頂點的數減少為原來的 $\frac{1}{3}$ ，邊的數減少為原來的 $\frac{1}{2}$ ，而面的數不變。

問題討論⇒我們在研究八中，發現立體模型三個邊會共用一個頂點，二個面會共用一條邊。而由平面變立體的時候，頂點的數因共用的關係，減少為原來的 $\frac{1}{3}$ ，邊的數也因共用的關係減少為原來的 $\frac{1}{2}$ ，而面的數不變，因此，我們就從這裡再研究「點」和「邊」的關係。

研究十方法：觀察和計算研究九的變化。

結果：因為面不變，所以立體中頂點的數 $\times 3 =$ 邊的數 $\times 2$

研究十一方法：

1.我們用硬紙板做出研究三的模型，計算「頂點的數」「面的數」「邊的數」以後，再把它切開成一塊一塊的。（圖形從略）

2.用研究十的公式來計算：頂點的數 $\times 3 =$ 邊的數 $\times 2$

| 模型<br>比較內容 | ①   |     | ②   |     | ③   |     | ④   |     | ⑤   |     | ⑥   |     | ⑦   |     | ⑧   |     | ⑨   |     | ⑩   |     |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|            | 拆開前 | 拆開後 | 拆開前 | 拆開後 | 拆開前 | 拆開後 | 拆開前 | 拆開後 | 拆開前 | 拆開後 | 拆開前 | 拆開後 | 拆開前 | 拆開後 | 拆開前 | 拆開後 | 拆開前 | 拆開後 | 拆開前 | 拆開後 |
| 頂點         | 8   | 24  | 8   | 24  | 8   | 24  | 4   | 12  | 5   | 16  | 6   | 17  | 7   | 18  | 6   | 18  | 10  | 30  | 12  | 36  |
| 面(+)       | 6   | 6   | 6   | 6   | 6   | 6   | 4   | 4   | 5   | 5   | 6   | 6   | 7   | 7   | 5   | 5   | 7   | 7   | 8   | 8   |
| 邊(-)       | 12  | 24  | 12  | 24  | 12  | 24  | 6   | 12  | 8   | 16  | 10  | 17  | 12  | 18  | 9   | 18  | 15  | 30  | 18  | 36  |
| 等於         | 2   | 6   | 2   | 6   | 2   | 6   | 2   | 4   | 2   | 5   | 2   | 6   | 2   | 7   | 2   | 5   | 2   | 7   | 2   | 8   |

①  $8 \times 3 = 12 \times 2$

⑤  $5 \times 3 \neq 8 \times 2$

⑨  $10 \times 3 = 15 \times 2$

②  $8 \times 3 = 12 \times 2$

⑥  $6 \times 3 \neq 10 \times 2$

⑩  $12 \times 3 = 18 \times 2$

③  $8 \times 3 = 12 \times 2$

⑦  $7 \times 3 \neq 12 \times 2$

④  $4 \times 3 = 6 \times 2$

⑧  $6 \times 3 = 9 \times 2$

結果：我們發現，頂點的數 $\times 3 =$ 邊的數 $\times 2$ ，除了角錐以外，是對的。

研究十二方法：

1. 我們把「頂點的數  $\times 3 =$  邊的數  $\times 2$ 」的結果和「頂點的數 + 面的數 - 邊的數 = 2」來比較。
2. 我們用研究三的模式來比對。

結果：

1. 因為「頂點的數 + 面的數 - 邊的數 = 2」所以如果：
  - ① 知道頂點的數，那麼頂點的數  $\times 3 \div 2 =$  邊的數。
  - ② 知道邊的數，那麼邊的數  $\times 2 \div 3 =$  頂點的數。
2. 再利用「頂點的數 + 面的數 - 邊的數 = 2」的結果，就可以知道面的數。

## 五、討 論

(一) 我們用 (甲) 減少邊 (乙) 減少點的方法來探討研究七的平面。  
(圖形從略)

結果：

1. (甲) 去掉一邊，一定會減少一個面或一個頂點。  
(乙) 去掉一個頂點，邊和面也都會減少。
2. 不論用 (甲) 或 (乙) 的方法，最後都會剩下一個頂點。
3. 如果剩下的頂點再加上由立體拉成平面時，所減少的一個面，就會等於 2。

(二) 我們用牙籤代表邊，橡皮擦代表點，做成研究三的模式，並以 (甲) 減少邊 (乙) 減少點的方法來研究。

結果：

1. 減少第一條邊和減少第一個頂點的時候，減少的頂點 + 減少的面 = 減少的邊 + 1。
2. 最後都會剩下一個頂點。
3. 由以上我們可以知道最後剩下的一個點再加上研究七中失去的 1 個底面，或者 ① 中所減少的「1」，可以解釋為什麼「頂點的數 + 面的數 - 邊的數 = 2」。
4. 因為結果都等於 2，所以頂點或面增加一個，邊也要增加一

個；如果頂點或面減少一個，邊也要減少一個。

## 六、結 論

- (一)我們發現只有正三角形、正方形、正五邊形能做成綉球。
- (二)在立體中「頂點的數+面的數-邊的數」結果都等於 2。
- (三)我們發現「頂點的數+面的數-邊的數」立體的形狀會等於 2，平面的形狀會等於 1。
- (四)在立體的形狀很複雜的時候，我們可以用頂點的數 $\times 3 =$ 邊的數 $\times 2$ 的關係來運用「頂點的數+面的數-邊的數=2」的結果。

## 七、參考資料

- (一)國民小學第三冊、第八冊數學課本（國立編譯館主編）
- (二)奇妙的葉子 作者呂冠穎等四人 七十四學年度縣賽科展作品
- (三)基礎數學統合（高二選修乙，上册，師範大學科學教育中心主編）。

## 評 語

雖然是已知的數學知識，但參與的學生以實驗的方式，自行重新發現，並且能以單純的道具說明，實屬難能可貴。