磁磚和正多邊形

國中組數學科第三名

桃園縣立仁美國民中學　　作　　者：何祥志、盧自強
陳彥源
指導教師：蔡國強

一、研究動機

在日常生活中，我們常看到房子的地板或牆壁貼著磁磚，許多是由正多邊形所購成的。我們非常好奇到底那些正多邊形可以當做磁磚的形狀？老師建議我們從一年級上學期學過的正多邊形著手，再運用二年級所學的方程式、不等式，以科學方法，試著去尋找正確的等案。

二、研究目的

如果我們想要用正多邊形做爲磁磚的圖形，就下列各種情形來考慮，各有那些組成立？

(一)用一種全等正多邊形。

(二)用兩種全等正多邊形。

(三)用三種全等正多邊形。

(四)用四種或四種以上全等正多邊形。

三、研究過程及討論

(一)基本假設：

仔細觀察磁磚地板或牆壁，每塊磁磚均能緊密相接，且可用同樣的圖形無限地平舖一平面，這些磁磚之間具備以下的特性：

1. 各種正多邊形的邊長相等。
2. 共用一頂點的所有內角角度的和均爲360°。

因爲，正多邊形的邊長可任意控制以決定磁磚的大小，所以

，磁磚的形狀與邊長無關。但正多邊形的內角是固定的，並非所有正多邊形均可符合第2個特性。如圖(一)的正五邊形即因共用A點的∠1∠2及∠3之和不為360，會造成缺口，而無法成為磁磚圖形。

圖(二)共用B點的四個正方形及圖(三)共用C點的三個正六邊形，即可符合上述兩個特性，我們稱之為一組磁磚圖形。

因為正多邊形的內角相等，故我們可假設：在一組正多邊形中，各取一內角，若能使其角度之和為360，則這組多邊形可以成為磁磚圖形。

我們便以上述假設做為判別一組正多邊是否成為磁磚圖形之標準來加以推論。

(二)推論：

1. 一組圖形包含一種正多邊形：

若a個全等正n邊形為一組磁磚圖形，因正n邊形之每一內角角度為 $(n-2)/n \cdot 180$

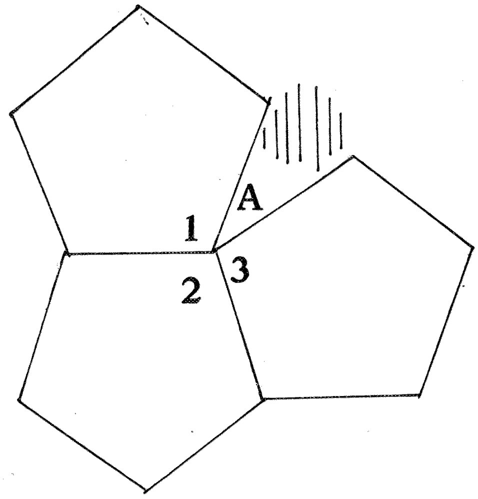
故可列式 $a(n-2)/n\,180=360$ ……(1)

因 $n \geq 3$，$a(n-2)/n=2$，其中 $0<(n-2)/n<1$

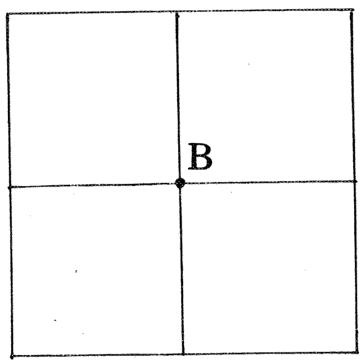
所以 $2<a\leq 6$

由此可推得下列表(一)的三組解：

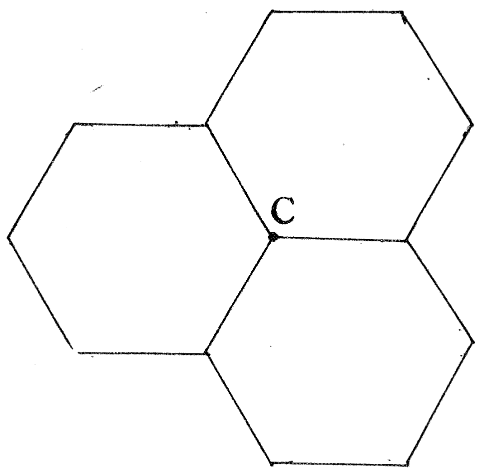
故可知：含一種全等正多邊形的



圖(一) 交於A點的三個正五邊形



圖(二) 一組交於B點的正方形



圖(三) 一組交於C點的此六邊形

磁磚圖形可能有三組。

表(一)一種全等形

組　別	a	n
A	6	3
B	4	4
C	3	6

2. 一組圖形含兩種全等正多邊形：

若取 a 個正 n 邊形，b 個正 m 邊形，（$3 \leq n < m$）使成為一組磁磚圖形

可列式為：

$$a(n-2)/n \cdot 180 + b(m-2)/m \cdot 180 = 360 \quad \cdots\cdots(2)$$

因 a，b 是自然數，且 $1 \leq a \leq 4$，$1 \leq b \leq 2$

故正多邊形之內角顯然都是整數，即邊數為 360 之因數。

欲解得(2)式中複雜四元方程式，可先找出角度是整數的正多邊形，如下列表(二)：

表(二)角度是整數的正多邊形

邊數	3	4	5	6	8	9	10	12	15	18	20
角度	60	90	108	120	135	140	144	150	156	160	162
邊數	24	30	36	40	45	60	72	90	120	180	360
角度	165	168	170	171	172	174	175	176	177	178	179

從表(二)可輕易地推出(2)式中如表(三)的六組解：

表(三)兩種全等正多邊形

組　別	a	n	b	m
D	1	3	2	12
E	1	4	2	8
F	2	5	1	10
G	2	3	2	6
H	3	3	2	4
I	4	3	1	6

故可知含兩種正多邊形之磁磚圖形可能有六組。

3. 一組圖形包含三種全等正多邊形：

若取 a 個正 n 邊形，b 個正m 邊形，c 個正 ℓ 邊形，（設 $3 \leq n < m < \ell$）使成爲磁磚圖形。可列式如下：

$a(n-2)/n \cdot 180 + b(m-2)/m \cdot 180 + c(\ell-2)/\ell \cdot 180 = 360$ ……………………………………(3)

同理從表㈡代入(3)式可得下表㈣的七組解：

表㈣含三種全等正多邊形

組　別	a	n	b	m	c	ℓ
J	1	3	1	8	1	24
K	1	3	1	9	1	18
L	1	3	1	10	1	15
M	1	4	1	5	1	20
N	1	4	1	6	1	12
O	2	3	1	4	1	12
P	1	3	2	4	1	6

故可知含三種全等正多邊形的磁磚圖形可能有七組。

4. 一組圖形含四種或四種以上全等正多邊形：

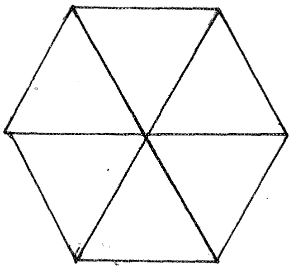
從表㈡取邊數最少的四種正多邊形：正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形各取一內角之和爲：$60 + 90 + 108 + 120 = 378 > 360$，故不可能由四種或四種以上邊數不同的正多邊形組成一組磁磚圖形。

㈢驗證：

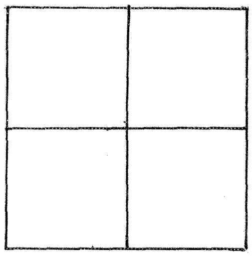
因爲我們擔心假設不夠周延，推論的A、B………O、P等十六組解有些也許不能構成磁磚圖形。於是，我們進行實驗，先利用量角器、直尺、圓規，作出表㈠、表㈢、表㈣的所有正多邊形的近似圖形，各種正多邊形之邊長相等。再用卡紙剪下許多全等形，然後，進行拼圖實驗。得出下列的結果：

1. 證實可做爲磁磚圖形的各組如下：

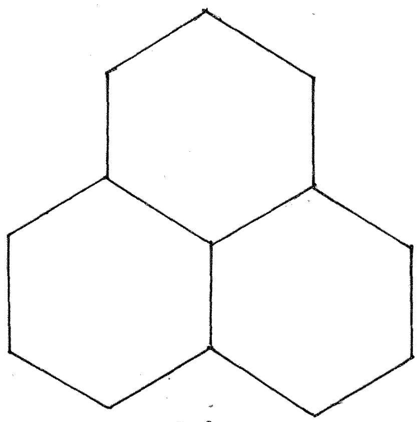
(1)含一種全等正多邊形的三組均成立（如下圖）：



A組



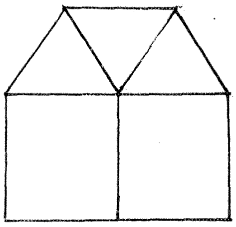
B組



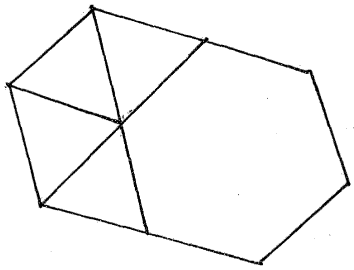
C組

⑵含兩種全等正多邊形的六組之中，有D 、E 、G 、H 、I 等五組成立（如下圖）：

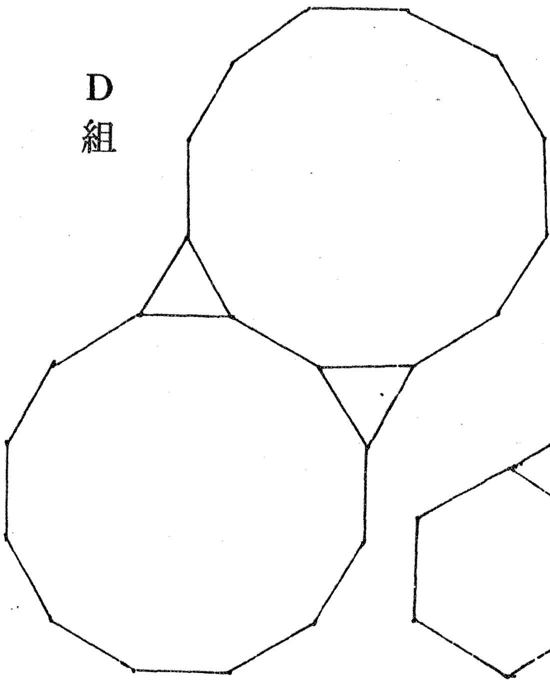
H組



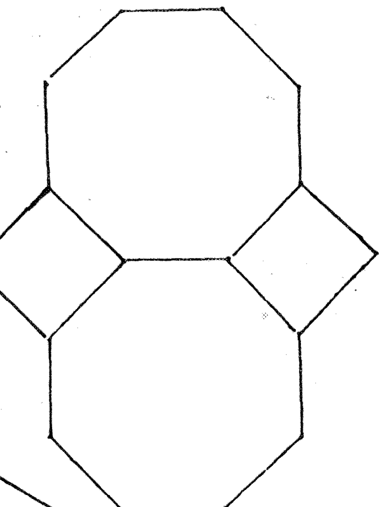
I 組



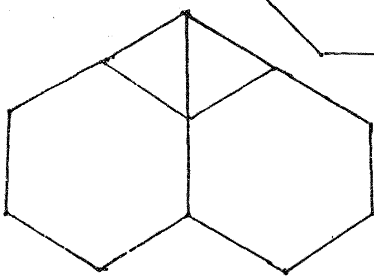
D組



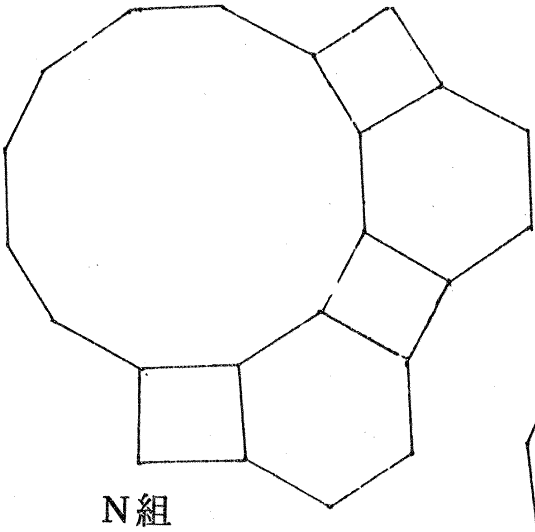
E組



G組

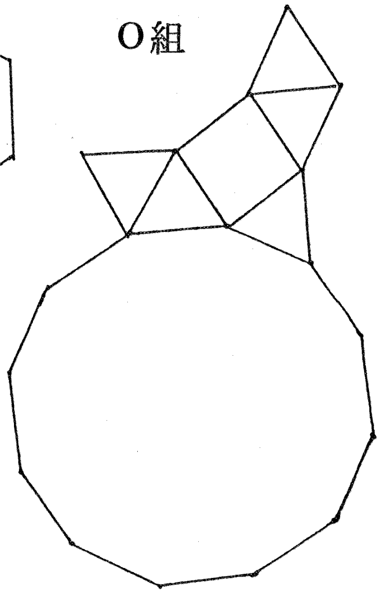


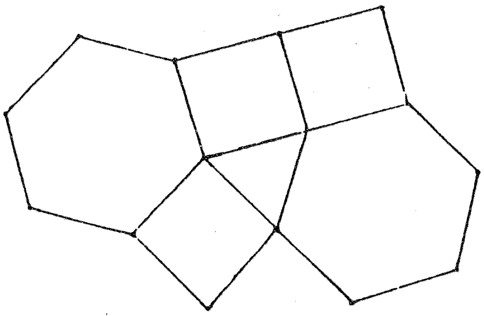
(3)含三種全等正多邊形中，只有N、O、P三組成立（如下圖）：



N組

O組





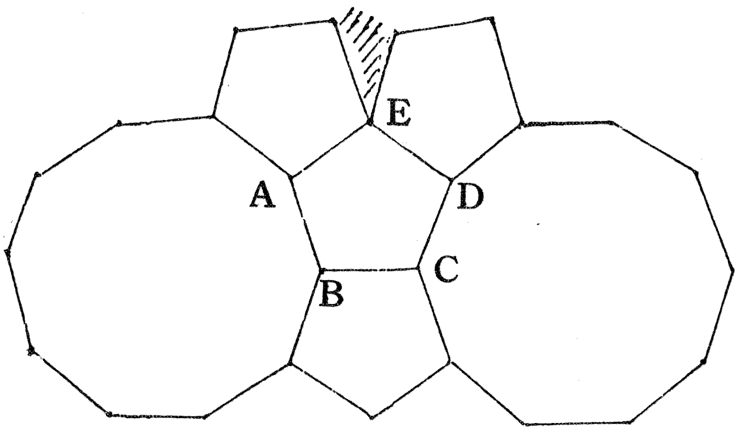
P組

2. 可做為磁磚圖形之正多邊形中，只含正三角形、正方形、正六邊形、正八邊形、正十二邊形，其邊數均為 24 的因數。

3. 合乎假設的標準，卻無法通過實驗的計有F、J、K、L、M等五組，普遍存在著如F組的兩種現象：（見下圖）

(1)均含正奇數邊形。

(2)在正奇數邊形的各頂點之中，定會發現其中有一頂點的一組正多邊形與假設不合的現象（如E點處即可能出現缺口）。



F　組

四、結　論

(一)一組磁磚圖形之所有正多邊形各取一內角，其度數和爲360。但一組正多邊形中，若含正奇數邊形，各取一內角，其度數和雖爲360，仍未必是磁磚圖形。

(二)若要用正多邊形做爲磁磚的圖形，可有如下表的十一種取法：

種　　類	形　　狀	個數（比）
一種全等形	正三角形	6
	正方形	4
	正六邊形	3
兩種全等形	正三角形：正十二邊形	1：2
	正方形：正八邊形	1：2
	正三角形：正六邊形	2：2或4：1
	正三角形：正方形	3：2
三種全等形	正方形：正六邊形：正十二邊形	1：1：1
	正三角形：正方形：正六邊形	1：2：1
	正三角形：正方形：正十二邊形	2：1：1

(三)可做爲磁磚圖形之正多邊形，其邊數必爲24的因數。

(四)磁磚圖形不能包含四種或四種以上邊數不同的全等正多邊形。

評　語

「磁磚」問題對國中生程度較爲恰當，作者將其歸納出十一種方法相當不錯，可惜的是作者並沒有證明爲什麼只有十一種方法。